

УДК 519.6

РОЗВИТОК СТРУКТУРНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Ігор Баранов, Олег Кравченко, Ірина Суворова

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

igbaranov.84@gmail.com, krav@ipmach.kharkov.ua, suvirina@gmail.com

Структурні методи розв'язання крайових задач математичної фізики ґрунтуються на використанні математичних засобів теорії R-функцій та полягають у побудові координатних базисних функцій, які задовольняють крайові умови задачі. Застосування структурних методів дає змогу точно враховувати геометричну інформацію про форму області, різні граничні умови та додаткову інформацію про симетрію області. Базисні функції, які побудовано з використанням стандартних систем R-операцій, є універсальними, що дає змогу розв'язувати широкий клас задач геометричного проектування, механіки, електродинаміки, гідродинаміки, теорії пластин, теорії пружності та пластичності та ін.

Цю роботу присвячено розвитку конструктивних засобів структурних методів для точнішого врахування поведінки розв'язків крайових задач в околах кутових точок межі області.

Важливою властивістю R-операцій є збереження нормалізованості [2], яке використовується для багатьох структур. Всі відомі R-операції, що зберігають нормалізованість, не є гладкими в точці (0,0). В [1] показано, що ця властивість є загальною для всіх R-операцій, які зберігають нормалізованість. Доведено, що властивість нормалізованості для гладких R-операцій можна зберегти асимптотично та запропоновано нову систему гладких R-операцій R_{nk} , функції з якої належать класу $C^{k-1}(\mathbb{R}^2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, та мають вигляд:

$$x_{\wedge}^{kan} y = \frac{(x+y) \left((|x|^k + |y|^k + \alpha^k)^{1/k} - \alpha \right)}{(|x|^k + |y|^k)^{1/k}} - (|x|^k + |y|^k + \alpha^k)^{1/k} + \alpha;$$

$$x_{\vee}^{kan} y = \frac{(x+y) \left((|x|^k + |y|^k + \alpha^k)^{1/k} - \alpha \right)}{(|x|^k + |y|^k)^{1/k}} - (|x|^k + |y|^k + \alpha^k)^{1/k} + \alpha;$$

$$\bar{x} = -x.$$

Запропоновано нову систему R-операцій, функції з якої є нормалізовані $k-1$ разів. Ця система має вигляд:

$$x \wedge_{nk} y = x + y - \sum_{i=1}^n \left(\left(\sin \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right) |x| \right)^k + \left(\cos \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right) |y| \right)^k \right)^{\frac{1}{k}} \bigg/ \sum_{i=1}^n \cos \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right),$$

$$x \vee_{nk} y = x + y + \sum_{i=1}^n \left(\left(\sin \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right) |x| \right)^k + \left(\cos \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right) |y| \right)^k \right)^{\frac{1}{k}} \bigg/ \sum_{i=1}^n \cos \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right),$$

$$\bar{x} = -x.$$

Показано, що при $n \rightarrow \infty$ кривизна цих функцій зменшується, а самі функції поточною прямоють до функцій з системи R_0 .

Для розв'язання крайової задачі Діріхле з розривними граничними умовами побудовано вагові розривні функції, лапсасіан яких є обмеженою функцією в області розв'язання крайової задачі. При розв'язанні крайових задач в областях з негладкою межею для рівняння Пуассона побудовано вагові гармонічні знаковизначені функції для апроксимації узагальнених розв'язків крайової задачі Діріхле. Показано, що зазначені функції можуть бути використані для задач прогину мембрани, кручення стрижнів та теплових задач.

Розроблені конструктивні засоби розширюють можливості структурних методів та дозволяють більш точного врахування поведінки розв'язків крайових задач в околах кутових точок межі області.

1. Баранов И.А. Новые R-операции различного класса гладкости для построения базисов краевых задач // Вісник Запорізького нац. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки. – 2011. – № 2. – С. 13–28.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.

DEVELOPMENT OF STRUCTURAL METHODS FOR SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN DOMAINS OF A COMPLEX SHAPE

Structural methods for solving boundary-value problems in domains of complex shapes are developed to enhance calculation accuracy in the vicinity of corner points. It is shown that the property of normalization for smooth R-operations can be applied asymptotically, and a new system of asymptotically normalized smooth R-operations is developed. It is also developed the new system of R-operations, the functions of which are normalized a given number of times. In order to solve the Dirichlet boundary value problem under discontinuous boundary conditions, the solution structures were constructed to accurately take into account the behavior of the solutions in the vicinity of the break points. To solve boundary-value problems in domains with a non-smooth boundary for the Poisson equation, weighted harmonic functions of definite sign are constructed to approximate the generalized solutions of the Dirichlet boundary-value problem. It is shown that the proposed approaches can be effectively used for problems of membrane deflection, rod torsion, and thermal problems.