

УДК 532.5

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ТОЧОК ТЕЧІЇ СТОКСА В ПРЯМОКУТНІЙ ПОРОЖНИНІ

Руслана Мороз, Олександр Курилко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ivankamoros08@gmail.com, alexandr.kurylko@knu.ua

Упродовж останніх десятиліть спостерігається посилюється інтерес науковців до вивчення якісного та ефективного перемішування в'язких рідин у двовимірних прямокутних порожнинах без участі фізичних змішувачів в самому процесі. Це стає можливим, наприклад, при збудженні течії нестисливої в'язкої рідини у прямокутній порожнині за допомогою дотичних швидкостей, прикладених на її стінках. Результати, одержані в цьому напрямку, стосуються задач, в яких бічні стінки в прямокутній порожнині є вільними від навантажень.

Метою даної роботи є дослідження моделі для задачі про рух нестисливої в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини із закріпленими нерухомими бічними стінками при складному розподілі дотичних швидкостей, прикладених на верхній та нижніх стінках. Також на меті є знаходження спеціальних періодичних точок третього порядку та встановлення їх типу.

Двовимірна повільна Стоксова течія нестисливої в'язкої рідини може бути описана в рамках бігармонічної задачі. Якщо такий рух є настільки повільним, що інерційними силами, які містять квадрати швидкостей, можна знехтувати, порівняно з в'язкими членами, то функція течії ψ задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta\psi = 0.$$

У декартових координатах ейлерові компоненти вектора швидкості u і v визначаються як

$$u = \frac{d\psi}{dy}, v = -\frac{d\psi}{dx}.$$

Постановка задачі, геометрія порожнини та методика побудови аналітичного розв'язку, в основі якого лежить метод суперпозиції, детально описані в роботі [1]. При цьому рух верхньої та нижньої стінок порожнини задавався періодичним чином згідно зі співвідношенням [2]

$$U(x) = U_{top}(x) = -U_{bot}(x) = U_1^{(1)} \cos \frac{\pi x}{2a} - U_1^{(2)} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (1)$$

Для розв'язання задачі використовувався аналітичний метод суперпозиції та був реалізований в програмному пакеті Wolfram Mathematica – системі ком'ютерної алгебри, що містить багато функцій як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків.

Встановлено існування періодичних точок течії, які мають наступні координати: $A_L = (-2.11, 0)$, $A_C = (0, 0)$, $A_R = (2.11, 0)$.

Координати періодичних точок, та параметри $U_1^{(1)}$ та $U_1^{(2)}$ в (1) підбиралися згідно з таким алгоритмом: 1) періодичні точки A_L та A_C мають належати одній лінії течії; 2) точки A_L та A_R знаходяться на однакових відстанях від центральної точки A_C . При таких значеннях $U_1^{(1)}$ та $U_1^{(2)}$ періодичні точки A_L та A_C за півперіод $\tau = T/2$ ($T = 2$, змінюється від 0 до $T/2$ переходять одна в одну, обмінюються положеннями (перехід відбувається за годинниковою стрілкою), а права A_R – залишається нерухомою. В період часу від $T/2$ до T задана швидкість на границях змінює значення на протилежне, починає діяти в зворотному напрямку. В такому випадку ліва періодична точка залишається нерухомою, а центральна і права переходять одна в одну, змінюючи при цьому положення (перехід відбувається проти годинникової стрілки). За 3 повних періоди T точки повернуться на свої початкові положення.

Таким чином, знайдені точки є періодичними точками третього порядку еліптичного типу. Тип цих точок встановлювався чисельно-аналітично на основі розв'язання рівнянь адвекції та побудови Якобіана лінеаризованої системи. Ці точки відіграють важливу роль в теорії змішувань рідин і входять до складу так званих "уявних стержнів".

1. *Курилко О.Б.* Топологічний хаос у течії в двовимірній прямокутній порожнині // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка, серія: фіз-мат. науки. – 2010. – № 2. – С. 61–64.
2. *Kumar P., Chen J., Stremmer M.* Stirring with ghost rods in a lid-driven cavity // Bulletin of the APS. – 2009. – **63**, No. 19. – LB.005.

INVESTIGATION OF SPECIAL PERIODIC POINTS OF THE STOKES FLOW IN A RECTANGULAR CAVITY

A two-dimensional biharmonic problem for a rectangular cavity is considered. The method of superposition is used for solving mechanical problems concerning Stokes flows inside a rectangular cavity set up by tangential velocities applied on its walls. The existence of the third order elliptic periodic points inside a rectangular cavity is demonstrated. An appropriate choice of boundary velocity on the top and bottom walls guarantees the existence of such special periodic points that are belong to the structure of "ghost rods".