УДК 519.6

КВАЗІПОЛІНОМІАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ГАММЕРШТЕЙНА

Юрій Тополюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

top@iapmm.lviv.ua

Будуємо розв'язок інтегрального рівняння типу Гаммерштейна:

$$f(\zeta) = \int_{-1}^{1} F(\zeta') K(c,\zeta,\zeta') e^{i \arg f(\zeta')} d\zeta' . \tag{1}$$

Тут функція $F(\zeta')$ і ядро $K(c,\zeta,\zeta') = \sin c(\zeta-\zeta') / \pi(\zeta-\zeta')$ є відомі, числовий параметр $c > 0$. Функція $f(\zeta) \in L_2(-1,1)$ є шуканою.

Для розв'язування рівняння (1) використовували як ітераційні [1], так і аналітично-числові методи [2]. При аналітично-числовому підході використовували поліноміальне подання розв'язку. При цьому розв'язання (1) зведено до системи транценцендентних рівнянь відносно обернених величин до коренів, так званого, породжуючого полінома. Вперше такий підхід було використано в [3].

Тут для розв'язання рівняння (1) використано подання розв'язку у вигляді квазімногочлена з невідомими комплексними параметрами.

Відомо, що квазімногочлен подається у вигляді:

$$g(v) = \sum_{k=0}^{n} p_k(v) e^{\tau_k v} , \ \tau_0 = 0 ,$$

де $p_k(v)$ – поліном степеня k , τ_k – комплексні параметри.

Скористаємось частковим випадком розвинення Вейерштраса для квазімногочлена:

$$g(v) = \prod_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{v}{v_k}\right) e^{\frac{v}{v_k}} , \tag{2}$$

де $v_k = v'_k + i v''_k$ – послідовність невідомих комплексних параметрів, N – натуральне число. Для простоти запису позначимо $\eta_k = 1/v_k$ і (2) перепишемо у вигляді:

$$g(v) = \prod_{k=0}^{N} (1-\eta_k) e^{\eta_k} . \tag{3}$$

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді:

$$f(\zeta) = |f(\zeta)| e^{i \arg g(\zeta)} . \tag{4}$$

Підставивши (4) в (1), домноживши ліву і праву частини на $e^{i \arg g(\zeta)}$ і виділивши дійсну й уявну частини, отримаємо:

$$|f(\zeta)| = \int_{-1}^{1} F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') \mathrm{Re}\left[e^{i[\arg g(\zeta') - \arg g(\zeta)]} \right] d\zeta' , \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') \mathrm{Im}\left[e^{i[\arg g(\zeta') - \arg g(\zeta)]} \right] d\zeta' = 0 . \tag{6}$$

Вираз (6) можна факторизувати до системи трансцендентних рівнянь відносно невідомих комплексних параметрів η_k $(k = 1, 2, ..., N)$. Знайшовши ці параметри і підставивши в (3), знайдемо в (4) аргумент (фазу) шуканої функції $f(\zeta)$. Вираз (5) дає подання модуля цієї функції і остаточно розв'язує задачу в класі квазімногочленів (2).

Одним зі способів факторизації (6) є метод найменших квадратів. Якщо нев'язка при цьому буде дорівнювати нулю, одночасно вирішується й питання існування розв'язку.

1. *Bulatsyk O.O., Katsenelenbaum B.Z., Topolyuk Yu.P., Voitovich N.N.* Phase Optimization Problems. – Weinheim: WILEY-VCH, 2010. – 318 p.
2. *Voitovich N.N., Topolyuk Yu.P., Reshnyak O.O.* Approximation of compactly supported functions with free phase by functions with bounded spectrum // AMS. Fields Inst. Commun. – 2000. – **25**. – P. 531–541.
3. *Voitovich N.N., Topolyuk Yu.P.* Antenna synthesis according to prescribed amplitude radiation pattern and the phase problem // Proc. of II Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), September 26–29, 1997, Lviv, Ukraine. – 1997. – P. 90–92.

QUASIPOLINOMIAL SOLUTION OF A HAMMERSTEIN-TYPE INTEGRAL EQUATION

An integral equation of the Hammerstein type is solved in the class of quasipolynomials.