УДК 519.2

СТИСНЕНА ОЦІНКА БЕТА КОЕФІЦІЄНТА

Тарас Заболоцький, Олександр Цяпа

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua, sashatsyapa@gmail.com

Роботу присвячено побудові та дослідженню властивостей стисненої оцінки бета коефіцієнта, який часто використовується на практиці для оцінки ризику портфеля фінансових активів у порівнянні з деяким еталонним портфелем. Такий підхід можна обґрунтувати тим, що звичні для використання на практиці вибіркові оцінки для невідомих параметрів є ефективним у випадку наявності великих вибірок історичних значень у порівнянні з кількістю параметрів, які мають бути оцінені [2]. При недостатньому обсягу вибірки історичних значень властивості вибіркових оцінок є незадовільними [3]. Один з підходів до вирішення цієї проблеми ґрунтується на асимптотиці великої розмірності чи асимптотиці Колмогорова [4]. За такого підходу припускається, що і кількість спостережень для побудови вибіркових оцінок і кількість невідомих параметрів прямують до нескінченості. Ефективним рішенням в цьому випадку є використання стиснених оцінок.

Під час дослідження використовувалися наступні припущення:

1. Ваги портфелів інвестора $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ та еталонного $\mathbf{w}_b=(w_{b1}, w_{b2}, \ldots, w_{bk})'$ є сталими та містяться на відрізку [0; 1].

2. Матриця спостережень $\mathbf{X}_n=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ складається з n k-вимірних векторів дохідностей активів $\mathbf{x}_i$, причому для всіх $i\in\{1,\ldots,n\}$ $\mathbf{x}_i$ нормально розподілений з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}_n$ та матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}_n$.

3. Матриця коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}_n$ є невипадкова $k\times k$ додатно визначена матриця.

4. Існує випадкова $k\times n$ матриця $\mathbf{Y}_n$, така, що $\mathbf{X}_n=\boldsymbol{\mu}_n\mathbf{1}_n'+ (\boldsymbol{\Sigma}_n)^{1/2}\mathbf{Y}_n$, де $\mathbf{1}_n$ n-вимірний вектор складений з 1, причому всі елементи матриці $\mathbf{Y}_n$ мають рівномірно обмежені моменти порядку $4+\varepsilon$ для деякого $\varepsilon>0$.

5. $k/n \to c\in(0;1)$ при $n \to +\infty$.

В роботі розглядається стиснена оцінка бета коефіцієнта $\hat{\beta}_{sh}$ вигляду

$$\hat{\beta}_{sh} = \alpha\hat{\beta} + (1-\alpha)\beta_0\,, \tag{1}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_32.pdf де β_0– довільна константа, $\hat{\beta}$ – вибіркова оцінка бета коефіцієнта, α – параметр стиснення. Використовуючи результати роботи [1], за виконання припущень 1-2, та мінімізуючи відносно α функцію втрат вигляду

$$L(\beta, \hat{\beta}_{sh}) = E(\beta - \hat{\beta}_{sh})^2 , \tag{2}$$

де

$$\beta = \frac{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{w}_b}{\mathbf{w}_b' \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{w}_b}$$

– точне значення бета коефіцієнта, отримаємо, що функція (2) досягає мінімуму при значенні параметра стискання α

$$\alpha^* = \frac{\left(\beta - \beta_0\right)^2}{\left(\beta - \beta_0\right)^2 - \frac{1}{n-3}\left(\frac{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{w}}{\mathbf{w}_b' \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{w}_b} - \beta^2\right)} . \tag{3}$$

Оскільки оптимальна інтенсивність стискання (3) залежить від невідомої на практиці матриці коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}_n$, то в роботі доведено також, що

$$\left|\alpha^* - \hat{\alpha}^*\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{a.s} 0 ,$$

де $\hat{\alpha}^*$ – вибіркова оцінка параметра α^* (3). Отже, підставляючи в (1) замість параметра α вибіркову оцінку оптимальної інтенсивності стискання $\hat{\alpha}^*$, стиснена оцінка бета коефіцієнта може бути використана на практиці.

1. *Bodnar T., Gupta A.K., Vitlinskiy V., Zabolotskyy T.* Statistical inference for the β coefficient // Risks. – 2019. – № 7. – 56.
2. *Le Cam L., Yang G.L.* Asymptotics in statistics: Some basic concepts. – NY: Springer, 2000. – 300 p.
3. *Ledoit O., Wolf M.* Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection // Journal of empirical finance. – 2003. – **10**. – P. 603–621.
4. *Bai Z.D., Silverstein J.W.* Spectral analysis of large dimensional random matrices. – NY: Springer, 2010. – 568 p.

SHRINKAGE ESTIMATOR OF BETA COEFFICIENT

In the paper, the shrinkage estimator for beta coefficient is constructed. Using the precise probability properties of the sample estimator of the beta coefficient, the optimal shrinkage intensity is found, and it is proved that the sample estimator of this parameter converges almost surely to the true value of the optimal shrinkage intensity. It means that a constructed shrinkage estimator with a beta coefficient can be used in practice.