Національна академія наук України

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ – 2023

до 95-річчя від дня народження академіка НАН України
Ярослава Степановича Підстригача,
45-річчя створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України та
70-річчя утворення механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені Івана Франка

Збірник наукових праць

За загальною редакцією
академіка НАН України Р.М. Кушніра
та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха

Львів – 2023

УДК 539.3; 510(061)

Сучасні проблеми механіки та математики – 2023: збірник наукових праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – 454 с. – Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/proceedings.mpmm2023.pdf

Збірник наукових праць містить матеріали доповідей, виголошених на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (23–25 травня 2023 р., м. Львів), присвяченій 95-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача, 45-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України та 70-річчю утворення механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Праці стосуються, в основному, таких актуальних проблем механіки і математики: математичне моделювання в механіці деформівних твердих тіл, механіка неоднорідних та низьковимірних структур, механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями, динаміка неоднорідних середовищ, оптимізація та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем, міцність і втома матеріалів, математичні методи в прикладних дослідженнях, теорія функцій і функціональний аналіз, диференціальні рівняння і математична фізика, алгебра, геометрія і топологія, математичне моделювання та інформаційні технології вирішення важливих для оборони і безпеки держави завдань, включаючи кібербезпеку, сучасні методи навчання в галузі прикладної математики і механіки.

Збірник буде корисним для науковців, докторантів, аспірантів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Редактори: академік НАН України *Р.М. Кушнір*,
член-кореспондент НАН України *В.О. Пелих*

Заступники редакторів: д.ф.-м.н. *О.Р. Гачкевич*,
д.ф.-м.н. *Ю.В. Токовий*

Відповідальні секретарі: к.ф.-м.н. *Р.О. Івасько*,
к.ф.-м.н. *А.М. Кузь*

Члени редакційної колегії: д.т.н. *М.І. Андрійчук*, д.ф.-м.н. *М.В. Демидюк*, д.ф.-м.н. *Я.І. Кунець*, д.ф.-м.н. *Х.Й. Кучмінська*, д.ф.-м.н. *М.В. Марчук*, д.ф.-м.н. *В.В. Матус*, д.ф.-м.н. *В.В. Михаськів*, д.ф.-м.н. *Я.М. Пастернак*, д.ф.-м.н. *В.М. Петричкович*, д.ф.-м.н. *Д.І. Попович*, д.ф.-м.н. *Б.В. Процюк*, д.т.н. *Я.Д. П'янило*, к.ф.-м.н. *М.М. Симотюк*, д.ф.-м.н. *В.З. Станкевич*, д.ф.-м.н. *Г.Т. Сулим*, д.ф.-м.н. *Р.Ф. Терлецький*, д.ф.-м.н. *Є.Я. Чапля*, к.ф.-м.н. *І.В. Чернега*, д.ф.-м.н. *І.П. Шацький*, д.ф.-м.н. *В.А. Шевчук*, д.ф.-м.н. *В.П. Щедрик*, д.ф.-м.н. *М.С. Яджак*.

Рецензенти: чл.-кор. НАН України, д.т.н. *І.М. Дмитрах*,
д.ф.-м.н., проф. *П.І. Каленюк*

Ухвалено до друку
Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України (протокол № 5 від 2.05.2023)

© Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023

National Academy of Sciences of Ukraine

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics

CURRENT PROBLEMS OF MECHANICS AND MATHEMATICS – 2023

to the 95th Birth Anniversary of Yaroslav Pidstryhach
(Academician of the Academy of Sciences of Ukraine),
the 45th Anniversary of the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, and
the 70th Anniversary of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Ivan Franko National University of Lviv

Collection of scientific papers

Edited by

Roman M. Kushnir (Academician of NAS of Ukraine)
and Volodymyr O. Pelykh (Corresponding Member of NAS of Ukraine)

Lviv – 2023

UDC 539.3; 510(061)

Current problems of Mechanics and Mathematics – 2023: Collection of Scientific Papers / Edited by Roman M. Kushnir (Academician of NAS of Ukraine) and Volodymyr O. Pelykh (Corresponding Member of NAS of Ukraine) [Published Online] // Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. – 2023. – 454 p. – Access by the link: http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/proceedings.mpmm2023.pdf

This Collection of Scientific Papers contains brief overviews of the talks delivered during the International Scientific Conference "Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023" (May 23–25, 2023, Lviv, Ukraine), dedicated to the 95th Birth Anniversary of Yaroslav Pidstryhach (Academician of the Academy of Sciences of Ukraine), the 45th Anniversary of the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, and the 70th Anniversary of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Ivan Franko National University of Lviv. The talks cover current topics of mechanics and mathematics, i.e., mathematical modeling in mechanics of deformable solids, mechanics of nonhomogeneous solids and low-scaled structures, mechanics of contact interaction, so-lids with cracks and thin inclusions, dynamics of nonhomogeneous media, optimization and design of structural members and biomechanical systems, strength and fatigue of materials, mathematical methods in applied research, theory of functions and functional analysis, differential equations and mathematical physics, algebra, geometry and topology, mathematical modeling and information technologies for solving urgent problems of the national defense and security, including cyber security, modern methods of teaching in the field of applied mathematics and mechanics.

The book may be helpful to scientists, Ph.D. students, post-graduate students, masters, and students of relevant specialties.

Editors: *R.M. Kushnir* (Acad. NAS of Ukraine)
V.O. Pelykh (Corresponding Member of NAS of Ukraine)

Associate Editors: *O.R. Hachkevych* (Dr.Sci.)
Yu.V. Tokovyy (Dr.Sci.)

Corresponding Secretaries: *R.O. Ivas'ko* (Ph.D.)
A.M. Kuz' (Ph.D.)

Board Members: *M.I. Andriychuk* (Dr.Sci.), *Ye.Ya. Chaplya* (Dr.Sci.), *I.V. Cherneha* (Ph.D.), *M.V. Demydyuk* (Dr.Sci.), *Kh.Yo. Kuchmins'ka* (Dr.Sci.), *Ya.I. Kunets'* (Dr.Sci.), *M.V. Marchuk* (Dr.Sci.), *V.V. Matus* (Dr.Sci.), *V.V. Mykhas'kiv* (Dr.Sci.), *Ya.M. Pasternak* (Dr.Sci.), *V.M. Petrychkovych* (Dr.Sci.), *D.I. Popovych* (Dr.Sci.), *B.V. Protsyuk* (Dr.Sci.), *Ya.D. Pyanylo* (Dr.Sci.), *I.P. Shats'kyy* (Dr.Sci.), *V.P. Shchedryk* (Dr.Sci.), *V.A. Shevchuk* (Dr.Sci.), *V.Z. Stankevych* (Dr.Sci.), *H.T. Sulym* (Dr.Sci.), *M.M. Symotyuk* (Ph.D.), *R.F. Terlets'kyy* (Dr.Sci.), *M.S. Yadzhak* (Dr.Sci.).

Reviewers: *I.M. Dmytrakh* (Corresponding Member of NAS of Ukraine)
P.I. Kalenyuk (Dr.Sci.)

Approved for publication
by the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine (Meeting Record No. 5, May 2, 2023)

© Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, 2023

ЗМІСТ

Олександр Гачкевич, Роман Кушнір Академік Ярослав Підстригач – видатний учений, організатор науки та громадянин 25
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/yp01_01.pdf

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Микола Гачкевич, Анна Козярська, Роман Кушнір Числово-аналітична методика оптимізації відносно напруженого стану режимів технологічного нагріву складених осесиметричних кусково-однорідних скляних оболонок 31
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_01.pdf

Олександр Гачкевич, Микола Гачкевич, Богдан Боженко Моделювання оптимальних температурних полів відпалу для скінченної циліндричної оболонки при різних умовах закріплення торців 33
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_02.pdf

Ніна Антоненко, Ірина Ткаченко Про один підхід до розв'язання просторової задачі теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами 35
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_04.pdf

Наталя Вайсфельд, Зінаїда Журавльова Точний розв'язок вісесиметричної задачі поропружності для шару з циліндричним включенням 37
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_05.pdf

Олександр Горечко, Надія Заводовська Конструктивна термочутливість прямокутних пластин 39
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_06.pdf

Олександр Гачкевич, Ростислав Терлецький, Орест Гуменчук Моделювання теплообміну випромінюванням та напруженого стану тіл з покриттями за врахування сухого тертя 41
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_07.pdf

Томаш Волчаньскі, Олександр Гачкевич, Тереза Козакевич Математичне моделювання та опис структурного і напруженого залишкових станів у сталевих тілах за технологічного нагріву 43
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_08.pdf

Роман Івасько, Аніда Станік-Беслєр, Наталія Івасько Математичне моделювання фізико-механічних процесів у металізованій феритовій пластині за дії об'ємних магнітостатичних хвиль 45
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_09.pdf

Кирило Трапезон, Олександр Трапезон Метод симетрії і апроксимації в задачах для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами 47
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_11.pdf

Михайло Довжик, Володимир Назаренко Руйнування високоеластичних матеріалів при стиску вздовж приповерхневої тріщини. Плоска задача 49
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_12.pdf

Борис Карпінос Особливості моделювання фізико-механічних процесів при деформуванні конструкційних матеріалів 51
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_15.pdf

Роман Кушнір, Ярослав Пастернак, Георгій Сулим Матричний підхід до побудови фундаментальних розв'язків задач теорії пружності про усталені коливання квазікристалів 53
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_16.pdf

Роман Тучапський Розрахунок локально навантаженої консольної тонкої замкнутої конічної оболонки на основі класичної та деяких уточнених теорій ... 55
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_17.pdf

Ігор Ориняк, Кирило Даниленко Чисельний метод узгоджених січень для пластин Міндліна з вирізами 57
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_18.pdf

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка Моделювання шорсткості у термомеханіці локально неоднорідних твердих тіл 59
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_19.pdf

Олександр Хіміч Сучасні засади математичного моделювання 61
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_21.pdf

Олег Венгринюк, Ольга Звірко, Себастьян Ліпец, Ігор Дзьоба Оцінювання схильності трубних сталей до крихкого руйнування на стадії росту тріщини . 63
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_22.pdf

Сергій Кобельський Змішана схема скінченних елементів у тривимірних задачах механіки руйнування елементів обладнання АЕС 65
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_23.pdf

Леонід Хорошун, Олена Шикула, Наталія Жукова Модель нелінійного деформування волокнистих композитів 67
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_26.pdf

Юрій Глухов Про одну динамічну задачу для нестисливого півпростору з початковими напруженнями 69
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_27.pdf

Юрій Кононов Моделювання обертання пружного твердого тіла у вигляді системи пружно зв'язаних твердих тіл у середовищі з опором 71
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_28.pdf

Юрій Кононов, Ярослав Святенко Про стійкість обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі у середовищі з опором під дією постійного моменту 73
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_29.pdf

Ігор Ориняк, Гліб Юдін Фундаментальні розв'язки для трьох варіантів теорії тонкостінних циліндричних оболонок 75
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_30.pdf

Наталя Вайсфельд, Юрій Процеров, Андрій Толкачов Точний розв'язок задачі про крутильні коливання циліндра в пружному півпросторі 77
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_31.pdf

Ігор Ориняк, Костянтин Кулик, Роман Мазурик Аналіз геометрично нелінійного деформування 3D балок методом базових хелікcних ділянок 79
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_32.pdf

Роман Мусій, Наталія Мельник, Стефан Моринь, Адріан Торський Математичне моделювання термонапруженого стану електропровідних трубчастих елементів при їх магнітоімпульсній обробці 81
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_33.pdf

Павло Стеблянко, Олександр Петров, Юрій Черняков Нелінійна модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалу з пам'яттю форми 83
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_34.pdf

Ігор Ориняк, Роман Мазурик Метод базових (розривних) та поправочних розв'язків для геометрично нелінійного аналізу балок та канатів 85
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_35.pdf

Олександр Григоренко, Ігор Лоза, Світлана Сперкач, Анна Безугла Поширення акустоелектричних хвиль у суцільному неоднорідному п'єзокерамічному циліндрі 87
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_36.pdf

Богдан Маркович, Юлія Сеник Рівноважний стан деформівного електропровідного нефероманітного півпростору 89
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_37.pdf

Ігор Сенченков, Василь Чекурін, Ольга Червінко Напруження при горизонтальному зберіганні РДТП 91
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_38.pdf

Володимир Ромащенко, Світлана Тарасовська Дослідження впливу товщин та матеріалів шарів металокомпозитних циліндрів на міцність при внутрішньому вибуховому навантаженні 93
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_39.pdf

Олександр Чирков, Валерій Харченко Сучасні підходи механіки непружного деформування для розрахункового обгрунтування міцності та прогнозування ресурсу критичних елементів обладнання АЕС 95
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_40.pdf

Володимир Трач, Андрій Подворний, Олександр Бондарський Деформування нетонких анізотропних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, за термосилової дії 97
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_41.pdf

Олександр Григоренко, Максим Борисенко, Олена Бойчук, Наталія Борейко Вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки змінної товщини 99
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_42.pdf

Володимир Козлов, Юрій Лелюх, Любов Зінчук Вимушені резонансні коливання та дисипативний розігрів шаруватої конічної панелі із в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів 101
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_43.pdf

Володимир Онишкевич, Галина Барабаш Модель «третього тіла» в задачах трибології 103
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_44.pdf

Віктор Ревенко Знаходження фізично обґрунтованих розв'язків рівнянь теорії термопружності 105
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_45.pdf

Ярослав Пастернак, Тетяна Третяк, Юрій Михалюк, Світлана Патлашинська Обчислення фундаментального розв'язку задачі про усталені коливання анізотропного середовища 107
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_03.pdf

Богдан Дробенко, Михайло Марчук, Микола Хом'як, Володимир Сіренко, Дмитро Клименко, Володимир Харченко Комп'ютерне моделювання руйнівних випробувань складних конструкцій ракетної техніки 108
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_13.pdf

Богдан Дробенко, Тетяна Бардин Оптимізація зварного з'єднання штуцера і колектора 109
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_14.pdf

Лілія Рожок Моделювання напруженого стану нетонких неоднорідних циліндричних оболонок, близьких до кругових, при дії локального поздовжнього навантаження 110
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_20.pdf

Кирил Васільєв, Георгій Сулим Пружна рівновага анізотропного біматеріального півпростору з міжфазною тріщиною за поздовжнього зсуву 111
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_24.pdf

Григорій Зражевський, Віра Зражевська Моделювання дефектів точковими особливостями при гармонійних коливаннях пружного стрижня 112
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_25.pdf

МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТА НИЗЬКОВИМІРНИХ СТРУКТУР

Віктор Шевчук Наближений підхід до розв'язування задач теорії термопружності для тіл з тонкими багатошаровими трансверсально-ізотропними покриттями 113
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_01.pdf

Карен Казарян, Роман Мусій, Наталія Мельник Термонапружений стан біметалевих пластин за індукційного нагріву неусталеним електромагнітним полем 115
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_03.pdf

Степан Савка, Дмитро Попович Процеси формування наноструктур ZNO типу «ядро-оболонка»: метод молекулярної динаміки 117
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_04.pdf

Євгеній Ірза Розрахунок термонапруженого стану структурно неоднорідних тіл .. 119
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_05.pdf

Оксана Вовк Дослідження теплового стану двох ідеально контактуючих термочутливих шарів за складного теплообміну 121
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_06.pdf

Галина Гарматій, Богдан Калиняк, Мирослав Кутнів Вплив температурної залежності термомеханічних характеристик ФГМ на термонапружений стан порожнистої кулі 123
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_08.pdf

Ольга Грицина, Мар'ян Грицина Варіаційне формулювання крайових задач локально градієнтної електропружності з урахуванням мікроінерції та флексодинамічного ефекту 125
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_09.pdf

Юрій Токовий Визначення двовимірних температурних полів у радіально неоднорідних порожнистих циліндрах 127
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_10.pdf

Микола Юзв'як, Юрій Токовий Пружна рівновага прямокутного паралелепіпеда 129
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_12.pdf

Петро Костробій, Ірина Рижа Моделювання впливу поверхні на густину йонів у напівобмежених металевих системах 131
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_14.pdf

Борис Процюк Квазістатичний термопружний стан шаруватого функціонально градієнтного циліндра за нелінійних теплових граничних умов 133
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_13.pdf

Ivan Mohylyak, Dmytro Popovych Nanostructuring of the Si surface under the action of laser pulses 134
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_02.pdf

Галина Гарматій, Михайло Глобчак Визначення неусталеного теплового стану функціонально-градієнтного порожнистого циліндра за складного теплообміну 135
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_07.pdf

Yuriy Tokovyy, Dmytro Boiko, Dariusz Perkowski Three-dimensional stress analysis of an inhomogeneous transversely isotropic elastic layer 136
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_11.pdf

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Олександр Максимук, Іван Васильків, Володимир Широков, Юрій Сачук Взаємодія штампів періодичної структури з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі 137
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_02.pdf

Микола Маковійчук, Тарас Даляк Згин пологої сферичної оболонки з тріщиною та колінеарною щілиною 140
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_29.pdf

Григорій Марченко, Ірина Рудавська, Олександра Дацишин, Оксана Кравчук Числовий аналіз процесу розкриття / закриття крайової тріщини в круговому диску під час контакту кочення 141
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_01.pdf

Олександр Пономаренко Напруження в безмежній тонкій пластині з двома круговими включеннями 143
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_03.pdf

Анатолій Камінський, Михайло Дудик, Юлія Решітник, Юрій Чорноіван Про модель повороту міжфазної тріщини від межі поділу квазіпружних матеріалів 145
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_04.pdf

Тетяна Соляр, Ольга Соляр Числовий алгоритм визначення контактних напружень для штампів складної форми з наперед невідомими ділянками контакту 147
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_05.pdf

Микола Махоркін Спосіб побудови сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші для з'ясування напружено-деформованого стану клинової системи за антиплоскої деформації 149
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_06.pdf

Олександр Демидов, Всеволод Попов Визначення нестаціонарного хвильового поля у скінченному циліндрі методом модифікованих скінченних різниць за часом 151
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_07.pdf

Олександр Бедзір, Василь Шопа Фрикційна взаємодія коаксіальних циліндричних оболонок з неоднорідним заповнювачем 153
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_08.pdf

Христина Середницька, Микола Шевцов Аналітично-числовий розв'язок задачі термопружності для біматеріалу з міжфазними високопровідними дефектами 155
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_09.pdf

Христина Середницька Термопружна поведінка біматеріалу з міжфазною тріщиною за поздовжньої теплопровідності її берегів 157
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_10.pdf

Ольга Соляр Контактна взаємодія штампа осесиметричної форми з півпростором за врахування зношування 159
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_11.pdf

Віктор Михаськів, Іванна Бутрак Вплив натягу поверхонь на розкриття кругової тріщини та напруження в її околі 161
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_12.pdf

Юрій Сибіль Чисельне розв'язування стаціонарної задачі теплопровідності для тривимірного рівняння Лапласа з умовою трансмісійного типу на розімкнутій ліпшицевій поверхні 163
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_14.pdf

Олег Назаренко, Анжела Стехун Побудова розривного розв'язку хвильового рівняння для сферичного дефекту 165
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_16.pdf

Всеволод Попов, Ольга Кирилова Напружений стан в півпросторі з дволанковою крайовою тріщиною при коливаннях поздовжнього зсуву 167
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_17.pdf

Всеволод Попов Визначення хвильового поля при дифракції пружних хвиль на системі тріщин ітераційним методом 169
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_18.pdf

Микола Слободян, Леся Куротчин Згин круглої пластини з системою тріщин з урахуванням смугового контакту їхніх берегів 171
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_19.pdf

Володимир Назаренко, Олександр Кіпніс Гранична рівновага біоднорідної площини з маломасштабними міжфазними тріщинами у кутовій точці межі поділу за наявності внутрішньої півнескінченної тріщини 173
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_20.pdf

Олександр Кривий, Юрій Морозов Вплив міжфазного включення на міцність середовища при температурному навантаженні 175
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_21.pdf

Віктор Силованюк, Наталія Івантишин, Максим Філіпов Відновлення ін'єктуванням міцності циліндра з тріщиною при крученні 177
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_22.pdf

Андрій Василишин, Ярослав Пастернак, Іван Звізло, Георгій Сулим Термомагнітоелектропружність скінченних кусково-однорідних тіл за наявності сполучного прошарку та внутрішніх тонких включень 179
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_23.pdf

Костянтин Архипенко, Олександр Кривий Міжфазна тріщина із зонами контакту у неоднорідній анізотропній площині 181
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_24.pdf

Володимир Острик Контактна задача для міжфазного відшарованого напівнескінченного включення 183
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_25.pdf

Віктор Адлуцький, Максим Левченко, Володимир Лобода Визначення параметрів руйнування п'єзоелектричного біматеріалу при наявності інтерфейсної тріщини з використанням МСЕ 185
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_26.pdf

Михайло Саврук, Володимир Кравець, Любов Онишко, Олексій Кваснюк Поздовжній зсув ортотропного тіла з анізотропними криволінійними включеннями 187
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_27.pdf

Володимир Кравець, Андрій Чорненький Напружений стан квазіортотропної пластини з пружним криволінійним включенням 189
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_28.pdf

Ігор Прокопишин, Іван Прокопишин, Іван Дияк Числове дослідження контакту осесиметричних пружних тіл з урахуванням кулонівського тертя 191
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_13.pdf

Іван Шацький, Андрій Величкович Модель конструкційного демпфування у фрикційному модулі оболонкового амортизатора 192
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_15.pdf

ДИНАМІКА НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Роман Рабош, Ярослав Кунець, Віктор Міщенко Асимптотичні моделі тонких пружних неоднорідностей у магнітоелектрокерамічній матриці 193
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_09.pdf

Лідія Курпа, Тетяна Шматко, Ганна Лінник Аналіз стійкості та вільних коливань пористих функціонально градієнтних сендвич пластин 194
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_07.pdf

Костянтин Мисов Динамічна задача кручення двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конуса 195
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_01.pdf

Надія Жоголева Аналіз ефектів нелінійної взаємодії поверхневих SH хвиль при мембранному покритті поверхні хвилеводу 197
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_02.pdf

Олександр Жук, Ярослав Жук Дія радіаційних сил акустичного поля в рідині на краплі іншої рідини 199
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_03.pdf

Наталія Городецька, Тетяна Соболь, Тетяна Щербак Типи поверхневих хвиль на межі рідини і поропружного півпростору 201
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_04.pdf

Василь Перепічка До питання побудови розв'язків задачі динаміки стержня із зовнішнім сухим тертям при нелінійних навантаженнях 203
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_05.pdf

Віктор Михаськів, Ігор Жбадинський Симетрична задача гармонічного навантаження гексагональної ґратки з кругових тріщин у пружному тілі 205
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_06.pdf

Олена Савченко, Олег Деркач Застосування варіаційного принципу Хелінгера–Рейсснера для аналізу демпфування нестаціонарних коливань багатошарових пластин 207
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_08.pdf

Роман Андрійчук, Ярослав Кунець, Валерій Матус, Василь Пороховський Динамічна взаємодія пружного тіла з тонким п'єзокерамічним включенням змінної товщини 209
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_10.pdf

ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЄКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Дмитро Клименко, Володимир Харченко Напружено-деформований стан різьбового з'єднання оболонок з упорною різьбою 211
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_03.pdf

Володимир Харченко Розрахункове моделювання механічного стану стиків ракетних конструкцій із композиційних матеріалів для умов випробувань на міцність 212
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_06.pdf

Мирослав Демидюк Математичне моделювання навантаженої ходи людини з гомілковостопними пружинними ортезами 213
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_01.pdf

Олександр Сад, Олена Мікуліч, Наталя Коменда Симуляційний аналіз у оптимізації механічних характеристик пористих біоматеріалів 215
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_02.pdf

Анатолій Дзюба, Володимир Сіренко Обґрунтування достовірності розрахунку міцності конструкцій ракетно-космічної техніки з урахуванням похибок вхідних даних та результатів неруйнівних випробувань 217
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_04.pdf

Богдан Кіндрацький, Роман Літвін Моделювання коливальних процесів у приводі електропідсилювача керма електробуса 219
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_05.pdf

МІЦНІСТЬ І ВТОМА МАТЕРІАЛІВ

Володимир Бабуров, Дмитро Клименко, Тетяна Дяченко Оцінка міцності різьбового з'єднання елементів конструкції з різнорідних за фізико-механічними характеристиками матеріалів 221
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_03.pdf

Олександр Андрейків, Ірина Долінська, Нікіта Звягін, Святослав Настасяк, Орест Свірчевський Методи дослідження кінетики втомних коротких тріщин і визначення періоду їх докритичного росту 223
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_02.pdf

Костянтин Буйських, Євгеній Задворний, Леонід Кравчук, Микола Феофентов Чисельне моделювання впливу на напружено-деформований стан елементів конструкцій деградуючого за термоциклічної дії газового потоку поверхневого шару 225
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_04.pdf

Богдан Дробенко, Степан Будз Оцінка експлуатаційного ресурсу барабана котлоагрегата енергоблоку ТЕС, пошкодженого при його експлуатації 227
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_05.pdf

Костянтин Червінка, Тарас Нагірний До впливу шорсткості на міцність пружних плівок 229
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_06.pdf

Володимир Шваб'юк, Віктор Захарчук, Роман Казмірчук, Дмитро Ткачук Визначення граничного навантаження для ортотропної балки–смуги з крайовою тріщиною 231
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_07.pdf

Дмитро Акімов, Дмитро Клименко Визначення напружено-деформованого стану багатошарової конструкції під дією надлишкового тиску та порівняння з результатами експерименту 233
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_01.pdf

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Віктор Вербіцький, Вікторія Крачилова Апостеріорний оцінювач скінченно-елементної апроксимації дробового рівняння адвекції дисперсії 234
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_03.pdf

Петро Жук Математичний опис геополітичних процесів 235
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_33.pdf

Михайло Андрійчук, Борис Євстигнеєв Моделювання характеристик випромінювання середовищ з нерівномірно розміщеними включеннями малого розміру 237
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_34.pdf

Михайло Бартіш, Наталія Огородник, Ольга Ковальчук Про деякі модифікації методу Стеффенсена розв'язування нелінійних операторних рівнянь . 239
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_01.pdf

Ігор Черевко, Тетяна Щур Моделювання поширення інфекційних захворювань на основі SIR моделей із запізненням 241
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_02.pdf

Світлана Іліка, Олександр Матвій, Лариса Піддубна, Ігор Черевко Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування . 243
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_04.pdf

Юлія Калоша, Олександр Зуєв Спостерігач Луенбергера для моделі пружної балки у гамільтоновій формі 245
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_05.pdf

Ростислав Бовгира Структура та електронні властивості нанокластерів оксиду цинку $(ZnO)_n$ (n=96, 120), легованих різними металами 247
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_06.pdf

Михайло Марчук, Володимир Харченко, Микола Хом'як, Віра Пакош Метод скінченних елементів на основі b-сплайнів для циліндричного згину пластини-смуги, податливої до трансверсального зсуву та стиснення 249
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_07.pdf

Євген Сторожук, Володимир Максимюк, Іван Чернишенко, Світлана Харенко Чисельне розв'язання фізично нелінійних задач для конічних елементів ракет з прямокутними отворами 251
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_08.pdf

Ігор Косович Моделювання навчання з підкріпленням для соціального дистанціювання під час COVID-19 253
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_10.pdf

Ігор Скородинський Особливості обчислення вертикальних переміщень у нескінченному в'язкопружному шарі на жорсткій основі при періодичних циклічних навантаженнях 255
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_11.pdf

Іван Крикун Новий підхід до статистичного аналізу природничих явищ 257
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_12.pdf

Dmytro Leshchenko, Tetiana Kozachenko Evolution of motions in a resistive medium of a gyrostat subjected to constant body-fixed torques 259
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_13.pdf

Леся Постолакі Дослідження інформативних параметрів оптичного методу неруйнівного визначення переміщень у скінченному порожнистому циліндрі .. 261
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_14.pdf

Ігор Баранов, Олег Кравченко, Ірина Суворова Розвиток структурних методів для розв'язання крайових задач в областях складної форми 263
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_15.pdf

Руслана Мороз, Олександр Курилко Дослідження спеціальних періодичних точок течії Стокса в прямокутній порожнині 265
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_16.pdf

Яна Лебеденко, Юрій Міхлін Дослідження резонансного стану та перехідного процесу в двох неідеальних системах 267
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_18.pdf

Юлія Сурганова, Юрій Міхлін Нелінійні моди коливань і складна поведінка маятникової системи у магнітному полі 269
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_19.pdf

Етері Гарт, Олексій Семенча Скінченно-елементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами та стрічковими включеннями 271
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_20.pdf

Етері Гарт, Богдан Терьохін Про раціональні параметри кільцевих включень із функціонально-градієнтного матеріалу при комп'ютерному моделюванні поведінки пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами 273
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_21.pdf

Ольга Чернуха, Юрій Білущак, Анастасія Чучвара Модель очищення забрудненого розчину у водному фільтрі з пом'якшенням жорсткої води за експериментальних даних на межі 275
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_22.pdf

Мирослав Притула, Назар Притула, Ярослав П'янило, Зоя Притула, Ольга Химко Дослідження впливу якості розкриття газоносних пластів на режими експлуатації підземних сховищ газу 277
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_23.pdf

Ярослав П'янило, Ганна Лянце, Галина П'янило Дослідження впливу потужності пористого середовища на фільтрацію газу в околі свердловини 279
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_24.pdf

Софія Твардовська, Ярослав П'янило Числово-аналітичні методи дослідження коливного процесу пористого шару під дією електричного поля 281
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_26.pdf

Дмитро Бобилєв Метод граничних елементів для аналізу задач поропружності в неоднорідних середовищах 283
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_27.pdf

Галина Крайнічук, Ігор Пилявець, Євгеній Радченко CIP-квазігрупи 4-го порядку з оборотним елементом X^2 серед ізотопів групи Клейна 285
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_29.pdf

Юрій Тополюк Квазіполіноміальний розв'язок одного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна 287
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_31.pdf

Тарас Заболоцький, Олександр Цяпа Стиснена оцінка бета коефіцієнта 289
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_32.pdf

Богдан Гнатик Магнітогідродинамічні процеси та ударні хвилі в космічній плазмі 291
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_09.pdf

Mykola Pasichnyy Classical nucleation theory and stochastic kinetic mean field approach 292
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_17.pdf

Костянтин Авдонін Симетричне подання матриці повороту та його застосування до теорії гіроскопічних явищ 293
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_25.pdf

Дмитро Редчиць, Олег Польовий, Світлана Моісеєнко, Володимир Заіка Застосування рівнянь Нав'є–Стокса для розв'язання прикладних задач аерогідродинаміки 294
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_28.pdf

Андрій Латиш Задача оптимального керування еволюційними функціонально-диференціальними рівняннями 295
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_30.pdf

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ І ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Khrystyna Kuchminska Corresponding continued fractions in many variables 296
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_01.pdf

Svitlana Vasylyshyn Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra 298
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_16.pdf

Андрій Загороднюк Дослідження алгебр аналітичних функцій на нескінченновимірних банахових просторах 299
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_18.pdf

Віра Лозинська Числення Вейля аналітичних півгруп 301
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_06.pdf

Олександр Барановський, Микола Працьовитий Перетворення та функції, які «зберігають хвости» E-зображення чисел 303
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_08.pdf

Микола Працьовитий, Софія Ратушняк Розподіли значень функцій канторівського типу, пов'язаних з ланцюговими A_2-дробами 305
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_09.pdf

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко Оцінки поперечників класів узагальнених інтегралів Пуассона періодичних функцій 307
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_10.pdf

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк Рівномірні наближення сумами Фур'є на класах згорток періодичних функцій високої гладкості 309
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_11.pdf

Ярослав Заболотний Оцінки добутків деяких степенів конформних радіусів однозв'язних областей 311
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_12.pdf

Дмитро Боднар, Ірина Біланик Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях 313
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_13.pdf

Олег Макарчук, Богдан Халецький Про множину розв'язків рівняння $\nu_0(x) = f(x)$, що містить функцію $\nu_0(x)$ частоти нуля в s-ковій системі числення 315
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_14.pdf

Руслан Салімов, Марія Стефанчук Про глобальне скінченне середнє коливання та рівняння Бельтрамі 317
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_15.pdf

Зоряна Новосад Оператори топологічного змішування на несепарабельних просторах 319
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_02.pdf

Nataliia Baziv Double symmetric analytic functions on Banach spaces 320
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_03.pdf

Ірина Чернега Симетричні структури в нескінченновимірних просторах 321
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_04.pdf

Viktoriia Kravtsiv, Anrii Yaselskyi Spectra of algebras of block symmetric analytic functions of bounded type 322
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_05.pdf

Maria Martsinkiv Tropical semirings of Lipschitz functions 323
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_07.pdf

Володимир Дільний, Андріана Вінсковська, Артур Петриченко Оборотність у вагових просторах Гарді 324
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_17.pdf

Taras Vasylyshyn, Vasyl Zahorodniuk Weakly symmetric functions on spaces of Lebesgue integrable functions 325
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_19.pdf

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

Тарас Кузьо, Олег Петрук Вплив неоднорідностей зоряного викиду на ранню еволюцію залишків наднових зір 326
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_01.pdf

Юрій Ловейкін, Анна Сукретна Оптимізація коливань у двомасовій системі ... 327
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_03.pdf

Grzegorz Kuduk Nonlocal problem with an integral condition for a nonhomogeneous system of evolution equations of the second order 329
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_04.pdf

Grzegorz Kuduk Problem with integral conditions for system of partial differential equations of third order 331
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_05.pdf

Софія Репетило Крайова задача з мішаними умовами для рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом 333
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_07.pdf

Віктор Кулик, Ганна Кулик, Надія Степаненко Збереження регулярності при збуреннях в лінійних розширеннях динамічних систем на торі 335
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_08.pdf

Володимир Макаров, Наталія Майко, Вячеслав Рябічев Непокращувана оцінка швидкості збіжності методу перетворення Келі для операторної експоненти в гільбертовому просторі 337
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_09.pdf

Микола Феник Про виділення розв'язків рівнянь Матісона-Папапетру, що описують рух власного центра маси в полі Шварцшільда 339
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_10.pdf

Олександр Дяченко Про регулярність розв'язків деяких параболічних систем .. 341
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_11.pdf

Kateryna Buryachenko Qualitative properties of linear and nonlinear fourth-order hyperbolic equations 343
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_12.pdf

Марія Сердюк Радіальні розв'язки псевдо-диференціальних рівнянь *p*-адичного аргументу зі слабким виродженням 345
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_13.pdf

Ольга Возняк, Віталій Дронь, Ігор Мединський Коректна розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині 347
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_14.pdf

Ігор Мединський, Галина Пасічник Про властивості об'ємного потенціалу для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів 349
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_15.pdf

Іванна Бондар Умови керування для не завжди розв'язних імпульсних систем інтегро-диференціальних рівнянь 351
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_16.pdf

Іван Буртняк, Ганна Малицька Вироджені параболічні рівняння типу дифузії з інерцією 353
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_17.pdf

Геннадій Грабчак Асимптотика спектра власних коливань струнної сітки з жорсткими, але легкими компонентами 355
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_20.pdf

Надія Гузик, Оксана Бродяк Задача Стефана для параболічного рівняння зі слабким виродженням 357
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_21.pdf

Іван Пукальський, Богдан Яшан Оптимальне керування в задачі Діріхле для еліптичних рівнянь з виродженням 359
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_22.pdf

Оксана Гентош, Анатолій Прикарпатський Раціональна факторизація потоків типу Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів 361
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_23.pdf

Оксана Сатур Динаміка конфліктної взаємодії в термінах мінімальних гравців . 363
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_24.pdf

Oleksandr Hnatiuk, Volodymyr Kyrylych, Olha Milchenko Optimal control of a hyperbolic system of countable semilinear equations 365
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_25.pdf

Галина Івасюк, Наталія Процах, Тоня Фратавчан Про прямі та обернені задачі для рівнянь типу Ейдельмана 367
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_27.pdf

Володимир Ільків, Наталія Страп, Ірина Волянська Нелокальна крайова задача для диференціально-операторного рівняння у просторах експоненційного типу рядів Діріхле-Тейлора 369
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_28.pdf

Іван Савка Про коректність задачі спряження з багатоточковими умовами для факторизованих рівнянь високого порядку 371
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_29.pdf

Володимир Ільків, Михайло Симотюк, Ярослав Слоньовський Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера 373
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_34.pdf

Антон Кузь Задача з інтегральними умовами для узагальненого рівняння Трікомі 375
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_33.pdf

Vasyl Fedorchuk, Volodymyr Fedorchuk Classification of symmetry reductions for some P(1,4)-invariant partial differential equations 376
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_02.pdf

Олександр Лагодзінський Резонансні тривимірні усталені коливання рідини в контейнері квадратного перерізу 377
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_06.pdf

Oleh Buhrii, Oksana Kholyavka Evolution stokes system of the third order with variable exponent of nonlinearity 378
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_18.pdf

Iryna Kmit Hopf bifurcation for general 1D semilinear wave equations with delay 379
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_19.pdf

Галина Лопушанська, Ольга М'яус, Олена Пасічник Обернена задача з багатьма невідомими у правій частині рівняння дробової дифузії 380
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_26.pdf

Volodymyr Pelykh, Yurii Taistra Poynting vector of one-way null electromagnetic field In the Kerr space-time 381
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_30.pdf

Ольга Кічмаренко, Володимир Сапожніков Метод усереднення диференціально-різницевих включень 382
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_31.pdf

Ігор Борачок, Роман Хапко Про метод фундаментальних розв'язків для нестаціонарного рівняння Стокса 383
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_32.pdf

Микола Бобик, Михайло Симотюк Операторні рівняння з діагональними операторами у просторах послідовностей комплексних чисел 385
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma13_02.pdf

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Алла Луценко Матричні квазігрупи з властивістю схрещеної оборотності 386
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_01.pdf

Роман Попович Про елементи великого поряду в скінченних полях, заданих двочленом 388
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_02.pdf

Володимир Прокіп, Орест Мельник, Ростислава Коляда Про подільність многочленних матриць над полем 389
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_04.pdf

Галина Зеліско Про існування та єдиність розв'язків лінійних матричних рівнянь над квадратичними кільцями з інволюцією 391
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_05.pdf

Ігор Ориняк, Дмитро Кольцов, Роман Мазурик Порівняння плоских балкового коротаційного сплайну і геометрично нелінійної балки 393
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_06.pdf

Назар Пирч Універсально M-еквівалентні відображення 395
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_07.pdf

Богдан Шаваровський Повна система інваріантів відносно напівскалярної еквівалентності для 3x3-матриці простої структури 397
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_08.pdf

Дмитро Карвацький Канторвали та тригонометричні функції 399
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_09.pdf

Ростислав Кривошия, Дмитро Скакун Про множину нерухомих точок функції частоти нуля чисел, що мають Q_S-представлення 401
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_10.pdf

Володимир Щедрик Матриці та пов'язані з ними групи Зеліска 403
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_12.pdf

Наталія Джалюк, Василь Петричкович Розв'язність матричного рівняння $AX=YB$ у кільці блочно-трикутних матриць 405
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_13.pdf

Ярослав Грушка Теорема про неповернення для універсальних кінематик та деякі її застосування 407
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_14.pdf

Наталія Ладзоришин, Василь Петричкович Еквівалентність пар матриць над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$ 409
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_15.pdf

Марта Малоїд-Глєбова Вторинно-мультиплікаційні модулі та їх властивості ... 411
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_16.pdf

Андрій Романів Розклад оборотної матриці у добуток двох матриць із заданими властивостями 413
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_17.pdf

Микола Працьовитий, Ірина Лисенко, Юлія Маслова G-зображення дійсних чисел та його застосування 415
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_18.pdf

Віталій Бондаренко, Мирослав Стойка, Марина Стьопочкіна Про комбінаторні властивості частково впорядкованих множин 6-го порядку надсуперкритичного мінімаксного типу 417
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_19.pdf

Тарас Гой Про комбінаторні тотожності з узагальненими числами Леонардо 419
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_20.pdf

Михайло Митрофанов, Олександр Равський Справедлива представимість соціально відділених підмножин прямої 421
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_03.pdf

Ivanna Melnyk Quasi-prime ideals of noetherian semirings 422
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_11.pdf

Дмитро Селютін Про перетин сімейств ультрафільтрів 423
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_21.pdf

Mykhailo Mytrofanov, Alex Ravsky Complete representability of socially distant sets 424
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_22.pdf

Svyatoslav Nykorovych Approximation relations on the posets of pseudoultrametrics .. 425
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_23.pdf

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВИРІШЕННЯ ВАЖЛИВИХ ДЛЯ ОБОРОНИ І БЕЗПЕКИ ДЕРЖАВИ ЗАВДАНЬ, ВКЛЮЧАЮЧИ КІБЕРБЕЗПЕКУ

Роман Синкевич, Світлана Майстренко, Костянтин Хурцилава, Тарас Донцов-Загреба, Іван Ковалець Пілотна система аналізу невідомих джерел радіоактивних забруднень в атмосфері засобами оберненого моделювання 426
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_05.pdf

Олександр Трофимчук, Юрій Калюх, Володимир Дунін, Сергій Кураш Моделювання за допомогою цифрових двійників реакції будівель та споруд на динамічні впливи 427
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_01.pdf

Михайло Яджак, Олександр Поліщук Проблема розпаралелювання обчислень під час агрегованого оцінювання автотранспортної системи великого міста .. 429
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_02.pdf

Олександр Поліщук Про уразливість складних мережевих систем та міжсистем-

них взаємодій 431
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_03.pdf

Serhiy Semenyuk Infinitesimal operator for the continuous time Markov modulated Poisson process 433
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_04.pdf

Марія Тютюнник Про деякі підходи до оптимізації прогностичного оцінювання об'єктів складної системи 435
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_06.pdf

Nazarii Dzhaliuk Investigation of server vulnerabilities on webapp using cross-platform Node.js 437
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_07.pdf

СУЧАСНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ В ГАЛУЗІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Михайло Яджак Про викладання основ паралельного програмування для здобувачів вищої освіти в галузі прикладної математики та інформатики 438
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma12_01.pdf

Ольга Терендій, Оксана Грицай, Артем Марущак Застосування евристичних підходів у викладанні операційних систем для задач розпаралелювання 440
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma12_02.pdf

Тетяна Соляр, Тимофій Пасічник, Ірина Комар Інтерактивні технології навчання в освітньому процесі закладу вищої освіти 442
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma12_03.pdf

* * *

Андрій Бомба, Сергій Барановський Ідентифікація і оптимізація параметрів моделі інфекційного захворювання з урахуванням сорбційної терапії та дифузійних збурень 444
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma13_01.pdf

Валерій Сатокін Дослідження напружено-деформованого стану циліндричних оболонок неруйнівним методом контролю в процесі їх виготовлення..... 446
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mo13_01.pdf

Алфавітний покажчик 448

АКАДЕМІК ЯРОСЛАВ ПІДСТРИГАЧ – ВИДАТНИЙ УЧЕНИЙ, ОРГАНІЗАТОР НАУКИ ТА ГРОМАДЯНИН

Олександр Гачкевич, Роман Кушнір

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

dyrector@iapmm.lviv.ua

Академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор Я.С. Підстригач – видатний український вчений у галузі математичних проблем механіки та прикладної математики, чільний представник сучасної Львівської наукової школи механіків і матеріалознавців, формування якої відбувалося у повоєнний період [1]. Він – автор фундаментальних робіт з математичного моделювання деформування тіл з урахуванням їх реальної структури та взаємозв'язку деформації і процесів немеханічної природи. Коло наукових інтересів ученого охоплювало широкий спектр споріднених природничих наук. З його іменем, зокрема, пов'язані глибокі дослідження з використанням сучасного математичного аппарату, в галузі термомеханіки, термодинаміки нерівноважних процесів, механотермодифузії, гідроакустики, поверхневих явищ і механіки тіл з покриттями, взаємодії деформівних середовищ з електромагнітними полями та в інших напрямках сучасної механіки [2, 3]. Ці дослідження успішно продовжує розвивати науковий колектив створеного ним 45 років тому Інституту прикладних проблем механіки і математики (ІППММ) НАН України, директором якого він був до останніх днів свого життя (28 травня 1990 року).

Ярослав Підстригач народився 25 травня 1928 р. у с. Самостріли Корецького району Рівненської області у селянській родині. Його батько, Степан Захарович, у передвоєнний період був керівником місцевої «Просвітянської хати» Волинського українського об'єднання, утвореної після заборони польською владою у 1930 р. «Просвіти». У 1940 р., вже через 5 місяців після вступу Червоної армії на Західну Україну, його було заарештовано органами НКВС і 3 червня 1941 р. засуджено на 8 років виправно-трудових таборів. Покарання відбував на Північному Уралі (Свердловська область), де й помер 12 січня 1942 р., очевидно, від виснаження і хвороб [2]. 12-річного Ярослава разом із мамою та 3-річним братом Тарасом висилають до Червоноармійського району Кокчетавської області Казахстану, де сім'я перебувала до 1945 р., після чого їм було дозволено повернутися в Україну. Вже маючи завершену середню освіту, він ще раз іде до Межиріцької середньої школи, після закінчення якої зі срібною медаллю в 1946 р. вступає на фізико-математичний фа-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/yp01_01.pdf

культет Львівського державного університету (ЛДУ) ім. Івана Франка. Спочатку він хотів вступати на журналістику, але при подачі документів йому порадили не робити цього, враховуючи трагічну долю його родини.

Студентське життя Ярослава Підстригача було нелегким і напівголодним, проте це аж ніяк не впливало на його жадобу до знань. Маючи непересічні здібності до математичних наук, він почав відвідувати Львівський міський семінар з механіки під керівництвом академіка АН УРСР Г.М. Савіна, якого в 1945 р. перевели з Дніпропетровська для керівництва Львівським філіалом АН УРСР, а в 1948 р. призначили ректором ЛДУ імені Івана Франка. Починаючи з 4-го курсу, Ярослав Підстригач працював обчислювачем у Львівській астрономічній обсерваторії, де й виконав та опублікував першу наукову роботу з небесної механіки в «Доповідях та повідомленнях ЛДУ імені Івана Франка».

Після закінчення з відзнакою у 1951 р. фізико-математичного факультету ЛДУ ім. І. Франка вступив до аспірантури при Інституті машинознавства та автоматики АН України (зараз Фізико-механічний інститут (ФМІ) ім. Г.В. Карпенка), де під керівництвом академіка АН України Г.М. Савіна досліджував концентрацію напружень біля отворів. Після захисту у 1954 р. дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук Я.С. Підстригач подальшу свою роботу в основному пов'язував з розвитком теорії і методів термомеханіки тонкостінних елементів, термодинамічних основ побудови узагальнених математичних моделей деформування середовищ у розширеному фазовому просторі, основ нелокальної механіки. Зокрема, при проведенні досліджень з термопружності він побудував зображення загального розв'язку взаємозв'язаної динамічної задачі, її фундаментальні розв'язки для опису та оцінки впливу термопружного розсіювання на механічну поведінку деформівних тіл за швидкозмінних навантажень. Я.С. Підстригач, з використанням операторного методу, розробив нову ефективну методику зведення тривимірної задачі теплопровідності до двовимірної та здійснив послідовне формулювання основних положень і співвідношень теплопровідності та термопружності тонких оболонок. Подальший розвиток операторного методу для зведення просторових задач до двовимірних, який не вимагає попередніх гіпотез кінематичного характеру, дозволив йому отримати рівняння теплопровідності однорідних, шаруватих і з покриттями пластин та оболонок, а також опромінюваних і рулонованих оболонок. Основні ідеї та конструктивні підходи цього методу були використані у математичному моделюванні теплообміну в системі тіл при неідеальному тепловому контакті та через тонкі проміжкові і приповерхневі шари, що стало основою для ґрунтовних досліджень з механіки поверхневих явищ і покрить.

У 50–60-х роках минулого століття розвиток промисловості потребував розрахунків елементів конструкцій, які експлуатуються при одночасній дії агресивних середовищ, підвищених температур і силових навантажень. Для розв'язання цієї проблеми Я.С. Підстригач, з використанням останніх досягнень механіки суцільного середовища, фізики твердого тіла, термодинаміки

нерівноважних процесів, побудував математичну модель для дослідження у взаємозв'язку процесів деформації, теплопровідності та дифузії у термодинамічних системах, стан яких визначається тензорами напружень і деформації, температурою та ентропією, хімічним потенціалом і концентрацією дифундуючої речовини, а пізніше удосконалив цю модель шляхом введення замість скалярних параметрів стану (хімічного потенціалу та концентрації) відповідних тензорних величин. Принципово суттєвим кроком у розвитку математичного моделювання і дослідження взаємозв'язаних процесів стало введення ним, крім термодинамічних функцій стану, кінетичних потенціалів як характеристичних функцій термодинамічних сил, які, як і відповідні їм термодинамічні потоки, могли мати тензорний характер. Такий підхід дозволив отримати нелокальні реологічні співвідношення і у прикладному аспекті – досліджувати релаксаційні явища, дифузійну стабільність хімічного складу твердих розчинів та сумішей, прогнозувати довговічність і робочий ресурс конструкцій в екстремальних умовах експлуатації з урахуванням локальних неоднорідностей типу включень, дислокацій, приповерхневих явищ й інших факторів, які інтенсифікують процеси та їх взаємозв'язок. Ці результати увійшли до його докторської дисертації «Деякі питання дифузійної теорії процесу деформації твердих тіл», яку він успішно захистив у Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка у 1967 р. Через новаторські підходи, використані в роботі, її затвердження тривало майже півтора року.

Запропонований термодинамічний підхід до побудови моделей механіки набув особливого розвитку при дослідженні взаємодії матеріальних середовищ з електромагнітними полями, при побудові теорії деформації електропровідних тіл, поширеної на електропровідні суміші та тверді розчини, і при дослідженні механотермоелектродифузійних явищ в приконтактних шарах. Багато уваги вчений приділяв питанням побудови розрахункових моделей термопружності тіл кусково-однорідної та неоднорідної структури з використанням апарату узагальнених функцій, розробці методів розв'язування вихідних рівнянь термопружності, єдиних для всієї кусково-однорідної області, питанням урахування у термомеханіці скінченної швидкості поширення тепла, дослідженням термомеханічних процесів у тілах із залежними від температури характеристиками. Я.С. Підстригачем разом з учнями розроблено теоретичні і прикладні проблеми оптимізації, створено наукові засади визначення режимів зміцнювальної локальної термообробки елементів конструкцій та теорії оптимального за швидкодією керування температурними режимами при нагріві з урахуванням обмежень на керування, параметри нагріву і термонапруження.

Академіком Я.С. Підстригачем разом з учнями запропоновано новий спосіб зведення задач пружної граничної рівноваги непологих і пологих оболонок з розрізами (тріщинами) до систем інтегральних рівнянь та запропоновано метод їх розв'язування, досліджено граничний стан циліндричних і сферичних оболонок із системами тріщин. Ними розроблено ефективний неруйнівний теоретико-експериментальний метод визначення залишкових напру-

жень, який грунтується на розв'язуванні відповідних обернених задач. На цій основі розроблено відповідну методику прискорених досліджень довговічності склоконструкцій складної форми.

Наукова спадщина вченого у галузі математичного моделювання фізико-механічних процесів та математичних проблем механіки – це невичерпне джерело сміливих ідей, основоположних досліджень, які опубліковані у понад 300 роботах, зокрема у 14 монографіях [2, 3].

Нові узагальнені математичні моделі взаємозв'язаних процесів різної природи показали, що для успішного проведення на їх основі якісних і кількісних досліджень механічної поведінки неоднорідних середовищ необхідно застосувати сучасні математичні методи і засоби математичного моделювання. Для вирішення цієї актуальної проблеми необхідно було сформувати потужний науковий колектив. Я.С. Підстригач відразу ж після створення у 1962 р. відділу термоміцності постійно і наполегливо працював над підготовкою спеціалістів високої кваліфікації для формування такого коллективу – математиків, механіків і фізиків. Успішна робота у цьому напрямку дала можливість йому організувати сектор механіки і математики у ФМІ АН України, а в 1973 р. на його базі – Львівський філіал математичної фізики Інституту математики АН України. Його активна науково-організаційна діяльність була зауважена академічною науковою громадськістю, він був обраний членом-кореспондентом (грудень 1969 р.), а потім й академіком АН УРСР (17 березня 1972 р.).

Після досягнення створеного ним колективу належного наукового рівня, визнання його результатів досліджень провідними науковими центрами академік Я.С. Підстригач у 1978 році домігся реорганізації цього філіалу в ІППММ АН України. Зробити це було досить непросто, але Президія Академії і особисто академік Б.Є. Патон підтримали ідею створення окремого інституту. Сприяли цьому і організація в 1975 р. Обчислювального центру при Філіалі для проведення прикладних досліджень та впровадження їх результатів насамперед на приладобудівних підприємствах Львова та західного регіону України, заснування тоді ж міжвідомчого збірника наукових праць «Математичні методи і фізико-механічні поля» (з 1988 р. почав перекладатися англійською видавництвом Plenum, а з 1996 р. став щоквартальним науковим журналом, який з 2008 р. перекладається видавництвом Springer як складова частина Journal of Mathematical Sciences), а також відкриття у 1976 р. Спеціалізованої вченої ради з присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних і технічних наук за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла».

Під керівництвом академіка Я.С. Підстригача ІППММ АН України одразу посів гідне місце серед академічних установ України, розвинув свою матеріально-технічну базу, став координаційним центром розвитку досліджень у галузі математики, математичних проблем механіки і математичного моделювання у західному регіоні України, організатором двох всесоюзних (з 1992 р. мають статус міжнародних) наукових конференцій з математичних

проблем механіки неоднорідних структур (з 1983 р. проводяться раз на 4–5 років, 10-та відбулася у 2019 р.) та з сучасних проблем математики (з 1987 р., проводяться раз на 3–4 роки, 11-та відбулася у 2020 р.).

Важливу роль у формуванні та в утвердженні наукової школи Я.С. Підстригача у галузі термомеханіки відіграла плідна співпраця з науковцями Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, зокрема академіком АН України А.Д. Коваленком та представниками його наукової школи – академіками НАН України Я.М. Григоренком і В.Т. Грінченком, членом-кореспондентом НАН України А.Ф. Улітком, а також членом-кореспондентом АН СРСР Е.І. Григолюком із Московського авіаційного інституту та його учнями. Були налагоджені тісні контакти з академіком ПАН Вітольдом Новацьким та представниками його наукової школи, чому в значній мірі сприяло проведення радянсько-польських (а по суті українсько-польських) конференцій з некласичних проблем теорії пружності [1].

Варто також відзначити і довголітню наукову та науково-організаційну співпрацю Я.С. Підстригача з академіками НАН України В.В. Панасюком та І.Р. Юхновським, професором Д.В. Гриліцьким (довголітнім завідувачем кафедри механіки ЛДУ ім. Івана Франка), яка розпочалася ще під час їхнього спільного навчання на фізико-математичному факультеті цього університету. Кожен із цих видатних українських вчених створив свої наукові школи, представники яких і надалі активно співпрацюють.

Академік Я.С. Підстригач був талановитим стратегом і організатором вітчизняної науки. Впродовж багатьох років був членом Президії АН України, головою Західного наукового центру АН України, членом Національного комітету з теоретичної і прикладної механіки СРСР і Наукової ради союзної академії з проблем міцності і пластичності, а також обіймав багато інших державних і громадських посад. Науково-організаційна діяльність академіка Я.С. Підстригача належно оцінені державою і науковою громадськістю. Він нагороджений орденами та медалями держави, відзначений Державною премією України у галузі науки і техніки (1975 р.) та премією ім. М.М. Крилова АН України (1978 р.), йому присвоєно почесне звання Заслуженого діяча науки України (1979 р.). Під його керівництвом започатковані нові форми взаємозв'язку науки з виробництвом, у рамках яких були розроблені ефективні підходи до розв'язування актуальних, важливих для народного господарства проблем та реалізовані через міжвідомчі науково-виробничі комплекси в інтересах провідних галузей економіки західного регіону України.

Академік Ярослав Підстригач розумів, що для вирішення актуальних проблем народного господарства потрібні висококваліфіковані кадри. Багато зусиль та енергії віддав він створенню у регіоні ефективної системи підготовки спеціалістів, наукових та науково-педагогічних працівників вищої школи, науково-дослідних установ і підприємств та удосконаленню всіх її ланок. Вона включає в себе участь науковців у відшуканні талановитих школярів і роботу з ними у Малій академії наук та залучення їх до навчання у спеціалізованих ліцеях або у спецкласах гімназій регіону; виявлення здібних до науко-

вої праці студентів в університетах, читання їм спецкурсів, керівництво з боку провідних науковців академічних установ їх курсовими і магістерськими роботами, перш за все, на спільних з установами кафедрах; активна співпраця з вузівськими партнерами щодо підбору кандидатур для стажування та навчання в аспірантурі і докторантурі установ, всебічне сприяння їм у проведенні наукових досліджень та апробації отриманих результатів. Плідну наукову та науково-організаційну роботу професор Я.С. Підстригач успішно поєднував з педагогічною діяльністю. Понад чверть століття викладав у Львівському університеті ім. І. Франка, завідував створеною в університеті за його ініціативою на базі ІППММ АН України кафедрою математичного моделювання. Серед учнів Ярослава Степановича Підстригача – понад 50 докторів і кандидатів наук.

Ярослав Степанович Підстригач був великим патріотом України, вболівав за розвиток освіти і науки, намагався зробити все від нього залежне, щоб результати українських учених були широко відомі у світі. Він брав безпосередню участь у відновленні діяльності в Україні Наукового товариства імені Шевченка (НТШ) – першої української наукової академічної інституції, організованої у Львові ще в 1873 р. Проте на початку 1940 р. НТШ було ліквідовано, частину його майна передано новоствореним академічним установам, багато членів Товариства змушені були покинути Україну, деякі з них трагічно загинули. У післявоєнні роки Товариство відновило свою діяльність за кордоном, почали функціонувати крайові осередки НТШ у Західній Європі, Австралії, Канаді та США. Лише у 1989 р., завдяки авторитету академіків Я.С. Підстригача, Р.В. Кучера, В.В. Панасюка, І.Р. Юхновського, членів-кореспондентів Я.Й. Бурака, М.А. Голубця, Г.Г. Максимовича, О.М. Романіва, відомих науковців-гуманітаріїв Я.Р. Дашкевича, Я.Д. Ісаєвича, О.А. Купчинського та інших, вдалося відновити діяльність Товариства в Україні і налагодити плідну співпрацю вчених академічних установ і вишів України зі своїми колегами в єдиному світовому НТШ-ому просторі.

Академік АН України Я.С. Підстригач своєю науковою, науково-організаційною та громадською діяльністю постійно дбав про розвиток наукового та інтелектуального потенціалу держави, створення і підтримання високого авторитету вітчизняної науки.

1. *Панасюк В.В.* Львівська наукова школа з проблем механіки матеріалів і матеріалознавства. – Львів: СПОЛОМ, 2015. – 522 с.
2. *Кіт Г.С., Кушнір Р.М.* Видатний учений, організатор науки, громадянин (до 90-річчя від дня народження академіка Я.С. Підстригача) // Вісник НАН України. – 2018. – № 5. – С. 108–116.
3. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.

ACADEMICIAN YAROSLAV PIDSTRYHACH – AN OUTSTANDING SCIENTIST, ORGANIZER, AND CITIZEN

A brief biography of academician Ya.S.Pidstryhach and survey of his scientific, scientific-pedagogical and scientific-organizational activities are presented.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

УДК 539.3

ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНА МЕТОДИКА ОПТИМІЗАЦІЇ ВІДНОСНО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ РЕЖИМІВ ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ СКЛАДЕНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СКЛЯНИХ ОБОЛОНОК

Микола Гачкевич, Анна Козярська, Роман Кушнір

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Політехніка Опольська (Польща)

dept13@iapmm.lviv.ua, kushnir@iapmm.lviv.ua

У багатьох виробничих процесах широко використовується технологічний нагрів, зокрема, при виготовлені обладнання вакуумної техніки. Основними елементами такої техніки, як правило, є скляні вироби оболонкового типу. В [1] наведено формулювання задач оптимізації в процесах термовакуумної обробки, зокрема, знегажування електровакуумних приладів (ЕВП), їх корпусів за допомогою різних способів нагріву. Як правило, такі корпуси є кусково-однорідними (складені з різних типів оболонок). Внаслідок цього, конструктивні та інші неоднорідності, особливо в умовах градієнтного розподілу температури, приводять до виникнення значних рівнів напружень, які можуть перевищувати допустимі і спричинювати руйнування оболонки [1]. У зв'язку з низьким рівнем допустимих напружень для скла (крихкого матеріалу) необхідно розвивати підходи до оптимізації, зокрема при термовакуумній обробці, кусково-однорідних оболонок обертання і розробка методики побудови оптимальних за напруженнями режимів нагріву, широко використовуваних в інженерній практиці (як складових елементів багатьох пристроїв), таких оболонок. У процесі виготовлення, обробки та експлуатації вони зазнають впливу нестаціонарних температурних полів унаслідок технологічного або супутнього нагріву, а також силового навантаження. Рівні напружень і деформацій, що виникають при цьому, суттєво залежать як від характеру розподілу температури чи силового навантаження, так і від неоднорідності властивостей матеріалу. Вони можуть перевищувати допустимі, приводячи при цьому до появи тріщин і руйнування оболонок. Тому актуальною є проблема оптимізації за напруженим станом режимів нагріву таких оболонок з врахуванням їх неоднорідності при заданих областях допустимої зміни температури і температурних напружень, які відображають специфіку та можливості

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_01.pdf

конкретного способу технологічного або експлуатаційного нагріву, а також враховують властивості міцності матеріалу. Вирішення різних аспектів цієї проблематики є важливим при побудові оптимальних теплових режимів багатьох видів цільової термообробки кусково-однорідних оболонкових елементів (як зі скла, так і інших крихких матеріалів) – складових елементів значної кількості сучасних пристроїв конкретного цільового призначення, зокрема, вакуумного та енергетичного обладнання.

Окремі питання, що виникають при розгляді задач оптимізації для кусково-однорідних оболонок, розглянуто в роботі [1]. Ці питання вимагають певного узагальнення та систематизації і розгляду з єдиних позицій. Спроба такого розгляду зроблена далі на прикладі осесиметричних за напруженим станом режимів технологічного нагріву кусково-однорідних складених скляних оболонок обертання.

Сформульовано математичну постановку та запропоновано методику розв'язування задачі оптимізації (при врахуванні неоднорідності розглянутих тонких скляних кусково-однорідних оболонок обертання) при заданих областях допустимої зміни температури та температурних напружень, що відображають специфіку та можливості конкретного способу нагріву, а також властивості міцності матеріалу. Задача розв'язується в квазістатичній постановці і в припущенні про розподіл температури по товщинній координаті поліномом третього степеня, а також при залежності від температури коефіцієнтів теплового розширення. За критерій оптимальності прийнято мінімум функціоналу максимальних нормальних напружень, а функцією управління є температура зовнішнього середовища. Задача розв'язується числовим методом локальних варіацій (послідовних наближень) [1], який базується на варіаціях у просторі станів функції управління при відомому розв'язку прямої задачі, що описує термонапружений стан. При цьому обчислюється значення критерію оптимальності та вибираються величини, які відповідають його мінімуму.

Запропоновано алгоритм побудови початкового наближення функції управління, у якому вихідним є оптимальний режим нагріву для однорідної сферичної оболонки при мінімумі функціоналу енергії пружної деформації та виконання обраних обмежень на температуру та напружений стан.

Як приклад, побудований оптимальний режим нагріву за умови конвективного теплообміну на внутрішній поверхні $\gamma = -h$ кусково-однорідної циліндричної оболонки, спряженої з напівсферичною при заданих областях допустимої зміни значень температури і напружень.

4. *Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Будз С.Ф.* Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок. – Львів: Ін–т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – 334 с.

A NUMERICAL-ANALYTICAL TECHNIQUE FOR THE OPTIMIZATION (REGARDING THE STRESS STATE) OF THE TECHNOLOGICAL HEATING REGIMES FOR COMPOSITE AXISYMMETRIC PIECEWISELLY HOMOGENEOUS GLASS SHELLS

This talk is devoted to the development of a stress state optimization methodology for technological heating modes for composite piecewise-homogeneous glass shells within given range of allowable temperature change and thermal stresses, taking into account the thermal sensitivity of the coefficient of linear thermal expansion of the material.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ВІДПАЛУ ДЛЯ СКІНЧЕННОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ ЗАКРІПЛЕННЯ ТОРЦІВ

Олександр Гачкевич, Микола Гачкевич, Богдан Боженко

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Політехніка Опольська (Польща)

dept13@iapmm.lviv.ua

У процесі зварювання елементів тонкостінних конструкцій і приладів виникають залишкові напруження і деформації, які можуть негативно впливати на їх експлуатаційні властивості. Тому однією з важливих науково-технічних проблем підвищення міцності тонкостінних зварних конструкцій є розробка методів зняття або зниження рівня залишкових зварних напружень. Для цього в інженерній практиці широко використовують локальну термообробку зон зварних швів – зональний відпал (відпуск).

При локальній термообробці в процесі нагрівання або охолодження виникають температурні напруження, значення яких істотно залежать від характеру відповідних температурних полів, геометричних параметрів та властивостей матеріалу елементів, що зварюються, умов закріплення. Значні рівні таких напружень суттєво погіршують ефективність термообробки. Зокрема, температурні напруження, накладаючись на залишкові, можуть перевищувати допустимі, що приводить до утворення додаткових пластичних деформацій або появи тріщин. З іншого боку, можливе таке накладення температурних і залишкових напружень, яке в зоні високих температур приводить до низького рівня сумарних напружень, внаслідок чого релаксація залишкових напружень не відбувається. Тому виникає потреба визначення таких режимів локального нагріву, при якому розподіл сумарних (температурних і залишкових) напружень у процесі термообробки був би оптимальним.

В роботі запропоновано варіант моделі визначення оптимальних за напруженим станом температурних полів технологічного нагріву циліндричної оболонки скінченної довжини за різних умов закріплення торцевих перерізів. На відміну від відомих екстремальних задач за відсутності обмежень на умови закріплення торцевих перерізів, що зводяться тільки до варіаційних задач на умовний екстремум для функціоналу енергії пружної деформації, в даному випадку граничні значення допустимих функцій, що варіюються, пов'язані між собою ще й умовами закріплення. Тому з необхідної умови екстремуму поряд з рівняннями Ейлера–Пуассона отримуємо додаткові екстремальні умови на граничні значення допустимих функцій (умови трансверсальності).

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_02.pdf

Розглянуто конкретні екстремальні температурні поля нагріву циліндричної оболонки скінченної довжини $2L$, радіуса R, товщини $2h$ на профілі екстремальних температурних полів нагріву, яка знаходиться під дією температурного поля, що відповідає випадку, коли умови локального нагріву включають лише обмеження на температурне поле у фіксованих перерізах оболонки. Зокрема, якщо температура T на кінцях зони нагріву дорівнює нулю, а в перерізі $x=0$ досягає найбільшого значення T_0, то відповідне екстремальне температурне поле є:

$$T = T_0\left[1-3\left(\frac{x}{x_1}\right)^2+2\frac{|x|^3}{x_1^3}\right] \quad \text{при } |x|\le x_1, \qquad T=0 \quad \text{при } |x|\ge x_1 \tag{1}$$

для вільної, жорстко защемленої та природно закріпленої оболонки. При нагріві таким температурним полем визначаючими є розтягувальні осьові напруження на зовнішній поверхні в перерізі з максимальною температурою. Тут $x = az/R$, $a^4 = 3(1-\nu^2)R^2/(4h^2)$, z – осьова координата, T_1 і T_2 – інтегральні характеристики температури T [1].

Числові дослідження температурних полів і відповідних напружень виконували для циліндричної оболонки при $\nu = 0{,}3$, $h/R = 1/40$, $L/R = 1$, при $z_1/R = 0{,}5$. На рис. 1 наведено графіки зміни, в осьовому напрямку температурного поля (1) і відповідних напружень для вільної оболонки. За наявних параметрів температурні напруження практично співпадають і відрізняються несуттєво в околі торцевих перерізів. Тут α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, E – модуль пружності.

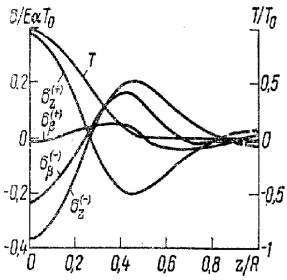


Рис. 1

Окремо розглянуто екстремальні температурні поля для конкретних умов локального нагріву довгої циліндричної оболонки, отримані в припущенні, що зміною температурного поля за товщиною можна знехтувати, тобто $T_2 \approx 0$ (градієнтність температурного поля можна не враховувати).

Досліджено вплив умов закріплення на рівні оптимальних температурних полів та відповідних напружень.

1. *Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Будз С.Ф.* Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок. – Львів: Ін–т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – 334 с.

MODELLING OF THE OPTIMAL THERMAL FIELDS OF RELEASE FOR A FINITE CYLINDRICAL SHELL UNDER DIFFERENT FIXATION OF THE END FACES

A mathematical model and an algorithm for constructing optimal temperature fields of local heating for a finite cylindrical shell under various kinds of fixation for the end faces are proposed.

УДК 539.3

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ніна Антоненко, Ірина Ткаченко

Національний університет «Запорізька політехніка»,
Запорізький національний університет

antonenkonina.ua@gmail.com, 2tig.phd81@gmail.com

Під багатошаровою основою будемо розуміти пакет пружних невагомих однорідних шарів, що лежить на півплощині. Шари характеризуються товщиною h_k та коефіцієнтом теплопровідності $k_{T,k}$. Між шарами є неідеальний тепловий контакт [1], на поверхні півпростору – нульова температура. Шари будемо нумерувати зверху вниз, починаючи з одиниці. У кожному шарі введемо локальну декартову систему координат $O_k x z_k$ з початком на верхній межі шару, осі $O_k z_k$ лежать на одній прямій та спрямовані вниз. Крайові умови задачі: $T_1(x,y,0) = f(x,y)$, $T_{n+1}(x,y,0) = 0$. Умови на стиках шарів:

$$k_{T,k}\frac{\partial T_k}{\partial z}(x,y,h_k) = \frac{1}{R_k}\left[T_{k+1}(x,y,0) - T_k(x,y,h_k)\right],$$

$$k_{T,k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x,y,0) = k_{T,k}\frac{\partial T_k}{\partial z}(x,y,h_k),$$

де R_k – коефіцієнт теплового опору, $k = \overline{1; n-1}$.

Для розв'язання задачі застосовано метод функцій податливості з використанням двомірного інтегрального перетворення Фур'є. Отримано аналітичний вираз для визначення температури в точках шарів багатошарової основи, який представлено у зручному для чисельної реалізації вигляді:

$$T_k(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-pz} + \tilde{r}_k(p)\,\mathrm{sh}pz\right)\eta_k(\xi,\zeta)e^{-i(\xi x+\zeta y)}\,d\xi d\zeta,\ p = \xi^2+\zeta^2,$$

де $S_k = \mathrm{sh}\,p_k$, $C_k = \mathrm{ch}\,p_k$, $p_k = ph_k$, $L_k = R_k k_{T,k}$, $\Delta_k = k_{T,k}/k_{T,k+1}$,

$\tilde{r}_n = -e^{-p_n}/S_n$, $\tilde{r}_k = \dfrac{\left[\Delta_k + (1-\tilde{r}_{k+1})(L_k p - 1)\right]e^{-p_k}}{\Delta_k C_k + (1-\tilde{r}_{k+1})(S_k + L_k p C_k)}$, $\eta_1 = \overline{T}_1(\xi,\zeta,0)$ –

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_04.pdf

трансформанта температури в точках верхньої межі основи, $\eta_{k+1} = ((1 - L_k p) e^{-p_k} + \tilde{r}_k (S_k + L_k p C_k)) \eta_k$.

Числові розрахунки виконано для тришарової основи, що складається з шарів однакової товщини. Граничні умови: $T_1(x, y, 0) = \begin{cases} T_0, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$ де $D = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$. На рис. 1 ($k_{T,1} = k_{T,2} = k_{T,3}$) та рис. 2 ($k_{T,1} = k_{T,3}$, $k_{T,2} = 10 k_{T,1}$) наведено розподіли температури у точках нижньої межі першого (криві 1) та другого шару (криві 2) у перерізі $x = 0$.

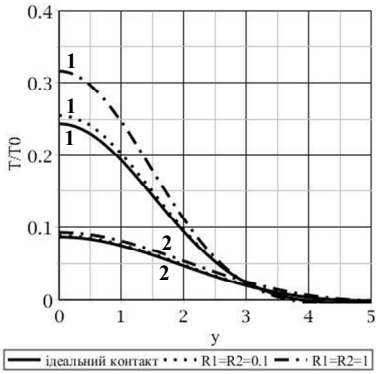


Рис. 1

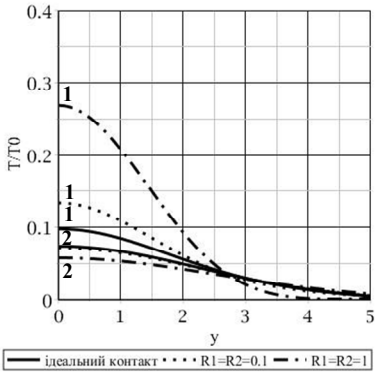


Рис. 2

Із аналізу графіків можна зробити висновки: збільшення коефіцієнтів теплового опору призводить до збільшення температури в точках меж, що розглядаються, окрім нижньої межі другого шару для основи з характеристиками $k_{T,1} = k_{T,3}$, $k_{T,2} = 10 k_{T,1}$; у точках нижньої межі першого шару вплив коефіцієнту теплового опору більш суттєвий у порівнянні з його впливом у точках нижньої межі другого шару.

1. *Немиш Б.Ю.* Трехмерные задачи термоупругости для неравномерно нагретых слоистых трансверсально-изотропных пластин // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 7. – С. 95–103.

ON A METHOD FOR SOLVING A SPATIAL HEAT-CONDUCTION PROBLEM FOR A MULTILAYER FOUNDATION WITH IMPERFECT THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS

Using the method of compliance functions, an analytical solution for a spatial stationary problem on determining temperature field in a multilayer foundation with imperfect thermal contact between its layers is obtained.

УДК 539.3

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Наталя Вайсфельд, Зінаїда Журавльова

Лондонський королівський коледж,
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова

natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk, z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглядається поропружний шар, всередині якого розташовано циліндричне включення ($0 < r < 1, 0 < z < h$, де h – відношення товщини шару b до радіусу циліндричного включення a). Між шаром та циліндричним включенням виконуються умови ідеального контакту та непроникності [1]

$$u\big|_{r=1} = 0, \tau_{rz}\big|_{r=1} = 0, \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=1} = 0 . \tag{1}$$

Тут і далі $u(r,z) = u_r(r,z)/a$, $w(r,z) = u_z(r,z)/a$ – безрозмірні переміщення твердого каркасу шару, $p(r,z)$ – безрозмірний тиск рідини у порах шару, $\tau_{rz}(r,z), \sigma_r(r,z), \sigma_z(r,z)$ – безрозмірні дотичне та нормальні напруження шару відповідно.

До верхньої грані шару прикладено навантаження, а нижня грань є в умовах зчеплення та проникності [2]

$$\sigma_z\big|_{z=0} = L(r), \tau_{rz}\big|_{z=0} = T(r), p\big|_{z=0} = P(r), r > 1 . \tag{2}$$

$$u\big|_{z=h} = 0, w\big|_{z=h} = 0, p\big|_{z=h} = 0 . \tag{3}$$

Потрібно знайти переміщення та напруження твердого каркасу та тиск рідини усередині шару, що задовільняють крайові умови (1) – (3) та рівняння вигляду [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{r^2}u\right] + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{2}{\kappa-1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} - \alpha\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{2}{\kappa+1}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) - \alpha\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial p}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \dfrac{\alpha}{K}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru) + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) - \dfrac{S_P}{K}p = 0, \end{cases} \tag{4}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_05.pdf

де $\kappa = 3 - 4\mu$ – стала Мусхелішвілі, μ – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт Біо, $S_P = S_p G$, $K = a^2 k / G$ – безрозмірні величини, G – модуль зсуву, S_p – запам'ятованість простору пор, k – коефіцієнт проникності.

Вихідну крайову задачу (1) – (4) зведено до одновимірної крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення типу Вебера [4] за змінною r

$$\begin{bmatrix} u_\beta(z) \\ w_\beta(z) \\ p_\beta(z) \end{bmatrix} = \int_1^\infty \begin{bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \\ p(r,z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(r,\beta) \\ X_0(r,\beta) \\ X_0(r,\beta) \end{bmatrix} r dr , \tag{5}$$

де $X_i(r,\beta) = J_i(\beta r) N_1(\beta) - N_i(\beta r) J_1(\beta)$, $J_i(r), N_i(r)$ – функції Бесселя першого та другого роду відповідно.

Крайова задача у просторі трансформант формулюється у векторному вигляді. Її аналітичний розв'язок побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення [5]. Застосування формули обернення інтегрального перетворення завершує побудову точного розв'язку вихідної задачі.

1. *Kubik J., Kachmaryk M., Chaplya E.* Methods for the Determination of the Characteristics of Porous Saturated Media // Materials Science. – 2001. – **37**. – P. 92–102.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical Modeling of the Coupled Processes in Nanoporous Bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – **12**(3). – P. 196-203.
3. *Cheng A.H.-D.* Poroelasticity // Theory and applications of transport in porous media (Springer). – 2016. – **27**.
4. *Youngdahl C.K., Sternberg E.* Three-Dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body // Trans. ASME Journ. of Applied Mech. – 1966. – **33**, № 4. – P. 855–865.
5. *Попов Г.Я.* Точні розв'язки деяких крайових задач механіки деформованого твердого тіла. – Одеса: Астропринт, 2013. – 424 с.

EXACT SOLUTION TO AN AXISYMMETRIC PROBLEM OF POROELASTICITY FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL INCLUSION

An exact solution to the axisymmetric problem for a poroelastic layer with cylindrical inclusion is constructed with the help of Weber-type integral transform and matrix differential calculation.

УДК 004.942+536.2+539.3

КОНСТРУКТИВНА ТЕРМОЧУТЛИВІСТЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН

Олександр Горечко, Надія Заводовська

Національний університет «Львівська політехніка»,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

oleksandr.m.horechko@lpnu.ua, nadiyahor@gmail.com

Прямокутні пластини є розповсюдженими елементами інженерних конструкцій в різних галузях машинобудування, будівництва та електроніки. З огляду на це проведено чимало досліджень їх термопружного стану для моделей, що враховують залежність теплових і механічних характеристик матеріалу від температури [1]. З класичних лінійних задач термопружності відомо, що зміна температурного режиму пластини, закріпленої в нерухомих опорах, призводить до натягу (стиску) пластин у їх площині, що має вплив на вібраційні характеристики поперечних коливань. У цій роботі досліджено такий вплив на значення власних частот та динамічної реакції попередньо нагрітих пластин. Аналіз проводився аналітичним і числовим методами для моделей тонких пластин і пружного тіла при різних варіантах кріплення пластини.

Найпростішими розглянутими задачами з використанням моделі тонких пластин були задачі аналізу власних частот поперечних коливань прямокутних пластин, закріплених в неподатливих опорах, при зміні їх температурного режиму. Для випадку шарнірного опирання двох протилежних країв пластини, рівномірно підігрітої (охолодженої) після закріплення, отримано аналітичний розв'язок. Показано значний вплив температурних напружень на власні частоти пластини.

Аналогічно розглядались задачі знаходження власних частот для системи прямокутних пластин з різних матеріалів, закріплених паралельно у пружній конструкції. Температура кожної з пластин при нагріванні окремих складових такої системи джерелами тепла знаходилась наближено методом теплового балансу. Власні частоти попередньо навантажених внаслідок нерівномірності нагріву пластин конструкції шукались в припущенні про постійність температурних зусиль вздовж будь-якої з осей координат в площині пластини. Досліджено вплив нагріву однієї з пластин в стаціонарному та нестаціонарному режимах на зміну власних частот пластин системи.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_06.pdf

Задачі визначення власних частот попередньо навантажених внаслідок нагріву пружних елементів конструкцій при їх моделюванні згідно з теорією термопружності для тривимірного пружного тіла розв'язувались числовими методами з використанням пакетів мультифізичного моделювання. Розглядались прямокутні панелі не тільки при довільному кріпленні країв, але й випадки їх кріплення системою симетрично розташованих в площині панелі отворів, при рівномірному полі температур та знайденому в припущенні лінійної задачі теплопровідності. Для часткових випадків задач, змодельованих раніше за теорією пластин та відомих з літератури прикладах початково ненапружених пластин і окремих прикладах напружених пластин, що мають точний розв'язок [2], проведена перевірка точності обчислення власних частот. Показана однакова залежність зміни основної частоти зі зміною температури для задачі нагріву панелі, защемленої по чотирьох отворах в кутах, та защемленої по усіх краях панелі.

Розглянута також задача знаходження динамічної реакції попередньо навантажених внаслідок нагріву прямокутних пластин на ударний імпульс. Побудовано аналітичний розв'язок динамічної задачі для нагрітих прямокутних пластин при опиранні по двох протилежних краях та довільних крайових умовах на решті країв. Моделювання динамічної поведінки пластини в тривимірній постановці проводились за допомогою числових методів. Проаналізовано вплив температури на динамічні характеристики пластин. Показано, що перегрів пластини суттєво впливає не тільки на значення власних частот, але й амплітуду згинних деформацій та напружень при ударних навантаженнях.

1. *Кушнір Р.М., Попович В.С., Процюк Б.В.* Про розвиток досліджень термомеханічної поведінки термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 7–27.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – 568 с.

CONSTRUCTIVE THERMAL SENSITIVITY OF RECTANGULAR PLATES

A problem on finding the eigenfrequencies and dynamic reaction to the shock pulse of rectangular plates preloaded due to heating is considered. The influence of temperature on the dynamic characteristics of the plates modeled according to the theory of plates and a three-dimensional elastic body was analyzed. In the case of the theory of plates, the solution to the dynamic problem is constructed for rectangular plates, supported on two opposite edges and with arbitrary boundary conditions on the remaining edges. The analysis was carried out using numerical methods when solving similar problems for three-dimensional elastic bodies and arbitrary fastening along the edges or holes.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ ВИПРОМІНЮВАННЯМ ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ ЗА ВРАХУВАННЯ СУХОГО ТЕРТЯ

Олександр Гачкевич, Ростислав Терлецький, Орест Гуменчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

dept13@iapmm.lviv.ua, or1961@ukr.net

Постійне підвищення рівня навантажувально-швидкісних режимів експлуатації техніки і необхідність збільшення її ресурсу вимагає покращення фізико-механічних, триботехнічних та інших властивостей матеріалів деталей машин. Оскільки зміцнення чи модифікація поверхневого шару дозволяє попередити зародження в них деформаційних дефектів і подальше руйнування (зношування), то формування на поверхні захисних покрить є перспективним шляхом для створення високоміцних і зносостійких елементів виробів, що мають покращені фізико-механічні властивості і стійкість до руйнування в процесі фрикційної взаємодії в складних експлуатаційних умовах.

Для створення таких елементів актуальними є теоретичні дослідження термомеханічної поведінки шаруватих елементів конструкцій (зокрема, з покриттями) при терті та інтенсивному тепловому навантаженні за дії електромагнітного випромінювання світлового діапазону (зокрема, теплового) під час технологічної термообробки. Ці дослідження вимагають розвитку модельних уявлень про процес деформування шаруватих тіл з врахуванням фізичних процесів тертя, поширення випромінювання і тепла, а також розробки відповідних моделей термомеханіки шаруватих тіл. У спрощених моделях фрикційної взаємодії [1], тіла, що контактують, як правило, вважають напівпросторами і у цьому випадку не враховують теплообмін із навколишнім середовищем, зокрема випромінюванням.

З використанням математичних моделей термомеханіки шаруватих пластин [2, 3] та одновимірної моделі суцільного фрикційного контакту [1] здійснено постановку задачі про дослідження теплового і напруженого станів тіл з покриттями при сухому терті. Отримано вихідні співвідношення для системи нескінченних плоскопаралельних шарів, яка складається з рухомого шару, до якого прикладено притискуюче розподілене навантаження, та контактуючого з ним шару (підложки), на який нанесено покриття. Система в цілому знаходиться в умовах конвективно-променевого теплообміну з зовнішнім середовищем. При дослідженні напруженого стану в розглядуваній три-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_07.pdf

шаровій системі для оцінювання впливу нагріву при терті і притискаючого зусилля компоненти тензора напружень у шарах подано у вигляді суми складників, зумовлених відповідно нагрівом та силовим навантаженням. Розроблено числову методику розв'язування сформульованих нелінійних контактно-крайових задач теплопровідності і досліджено температуру та напружений стан в системі залежно від притискального навантаження та швидкості руху при терті. Встановлено, що врахування теплообміну випромінюванням суттєве при оцінці теплового і напруженого станів, а нехтування його впливом приводить до завищення рівнів температур і теплових напружень. Зона стискальних напружень розташована в підложці і покритті, а розтягувальних – в рухомому шарі. На поверхнях контакту мають місце стрибки напружень. За розглянутих товщин шарів і умов їх закріплення, а також притискальних сил температура та напруження зростають зі збільшенням швидкості тертя. Визначальними при оцінці напруженого стану є теплові напруження.

Моделюючи покриття тонким проміжковим шаром (прошарком) дослідження теплової поведінки тришарової системи зведено до дослідження двошарової, а вплив покриття враховано узагальненими контактними умовами. При цьому напружений стан в приповерхневих областях шарів, спричинений нагріванням під час тертя, можна оцінити за отриманими наближеними співвідношеннями, які враховують приведені характеристики на згин і розтяг проміжкового шару (покриття). Також отримано вихідні співвідношення для визначення температури і напружень в двошаровій пластині (шар з покриттям) для задачі технологічної термообробки з допомогою теплового випромінювання. При цьому отримано узагальнені граничні умови (умови теплообміну через покриття) та наближені вирази для теплових напружень, що враховують приведені характеристики на згин і розтяг покриття.

1. *Амосов А.П.* Теплофизические модели трения инертных и взрывчатых материалов. – Москва: Машиностроение, 2011. – 363 с.
2. *Терлецький Р., Турій О.* Моделювання та дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 2. – С. 186–201. Те саме: *Terlets'kyi R., Turii O.* Modeling and investigation of heat transfer in plates with thin coatings with regard for the influence of radiation // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 6. – P. 703–722.
3. *Hachkevych O., Terlets'kyi R., Turii O.* The formulation and development of methods of solving thermomechanics problems for irradiated layered solids // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – **4**, No 1. – P. 21–36.

MODELLING OF RADIATIVE HEAT TRANSFER AND STRESSED STATE OF COATED SOLIDS TAKING INTO ACCOUNT DRY FRICTION

New mathematical models are proposed for the study of thermal and stress states of solids with coatings during dry friction. They use mathematical models of thermomechanics of irradiated layered plates developed by the authors and a one-dimensional model of continuous frictional contact. A numerical technique for solving the formulated nonlinear contact-boundary heat conduction problems was developed, and the temperature and stress state during dry friction, depending on the compressive load and friction speed, were investigated.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПИС СТРУКТУРНОГО І НАПРУЖЕНОГО ЗАЛИШКОВИХ СТАНІВ У СТАЛЕВИХ ТІЛАХ ЗА ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ

Томаш Волчаньскі, Олександр Гачкевич, Тереза Козакевич

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Політехніка Опольська, Освітньо-навчальне об'єднання в Глушині (Польща)

dept13@iapmm.lviv.ua

Поява залишкових напружень у сталевих тілах за високотемпературного нагріву – охолодження пов'язана, в основному, з пластичними деформаціями і деформаціями, які виникають внаслідок фазових змін. Вплив температурних і силових навантажень на залишкові напруження, які зумовлені пластичними деформаціями в літературі розглянуто досить широко. Проте залишковий напружений стан, викликаний змінами фазового складу в сталевих тілах за різних способів нагріву та наступного їх охолодження вивчений недостатньо. Тому актуальною є розробка методики визначення просторово неоднорідного фазового складу при охолодженні та, обумовлених ним, залишкових напружень у сталевих тілах, зокрема тонких низьколегованих маловуглецевих пластинах за технологічного нагріву, а також їх оптимізація з метою отримання певних механічних властивостей цих пластин.

На основі моделей, що ґрунтуються на статистичному підході до опису розпаду аустеніту, запропоновано методику параметричної оптимізації параметрів рухомого розподіленого джерела тепла відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу) при зменшенні рівня залишкових напружень.

Виявлені нові дані про залишкові напруження та фазові розподіли в тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластинах за наявності високотемпературного нагріву рухомим розподіленим джерелом тепла при врахуванні вихідного складу сталі та певних термічних і технологічних умов нагріву, зокрема: відсоткового вмісту конкретних легуючих хімічних елемен-тів; загального однорідного підігріву, який заданий значенням початкової постійної температури; локального супутнього підігріву, що окресленний локальним стаціонарним температурним полем; змінного параметра розсіювання в джерелі тепла, що характеризує розподіл енергії в цьому джерелі.

Задачі математичної фізики, що описують фазові зміни та відповідні їм залишкові напруження є суттєво нелінійними, загальні методи розв'язання

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_08.pdf

яких ще не розроблені [1]. Тому актуальним при розв'язанні цієї проблеми є використання експериментальних чи теоретично встановлених особливостей протікання наявних процесів і явищ та застосування числових і числово-аналітичних методів розв'язування сформульованих при цьому задач математичної фізики.

При побудові моделей опису і оптимізації фазового і зумовленого ним залишкового станів тіл, зокрема пластин, виступає проблема встановлення термочутливих характеристик матеріалу. Для певних матеріалів окремі з них є визначені експериментально. Але актуальним є встановлення приведених (сталих) характеристик, для яких можна отримати достатньо якісно і кількісно прийнятливі результати без додаткових істотних математичних складностей, які вносить врахування термочутливості.

У літературі опрацьовано окремі варіанти теорії фізичних механізмів перетворень у сталях, зокрема з використання регресивних моделей для опису фазового стану [1–2]. Однак необхідні подальші дослідження з побудови загальних моделей опису фазових змін і зумовленого ними залишкових напружень, в яких ефективно можуть бути використані сучасні підходи до побудови моделей механіки зв'язних полів різної фізичної природи. Зазначимо, що у більшості наявних підходів до опису залишкового напруженого стану сталевих тіл, вихідним є визначення відсоткового вмісту фазових складових при розпаді аустеніту за охолодження при змінах температури в інтервалі температур поліморфних перетворень. Тому необхідний розвиток як експериментальних, так і теоретичних підходів до точного встановлення цього відсоткового вмісту, а також опрацювання моделей опису розпаду аустеніту в сталевому тілі за конкретних умов охолодження, які в тій чи іншій мірі враховують фізичні процеси, що відбуваються при структурних змінах за технологічного нагріву.

1. *T. Wołczański, T. Kozakevych, O. Hachkevych*. Structural and residual stress state of steel plates subjected to the heating of moving heat sources. (ISSN 1429-6063, ISBN 978-83-66033-63-4). Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2019. – 290 c.
2. *А. Гачкевич, Т. Козакевич, Т. Волчаньски, В. Кукареко.* Избранные материаловедческо-математические аспекты при определении остаточных структурного и напряженного состояний стальных пластин при нагреве и охлаждении // Manufacturing processes. Actual Problems – 2021 Vol. 1: Basic science applications in manufacturing processes. SIM z. 493 (ISBN 978-83-66033-23-8, pod red. nauk.: O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wołczański). Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2021. Глава 6. – С. 97–122.

MATHEMATICAL MODELING AND DESCRIPTION OF STRUCTURAL RESIDUAL STRESS STATES IN STEEL BODIES UNDER TECHNOLOGICAL HEATING

Development of a technique for determining the spatially inhomogeneous phase composition during cooling, due to it, residual stresses in steel bodies during technological heating, as well as optimization to obtain certain mechanical properties in these plates.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У МЕТАЛІЗОВАНІЙ ФЕРИТОВІЙ ПЛАСТИНІ ЗА ДІЇ ОБ'ЄМНИХ МАГНІТОСТАТИЧНИХ ХВИЛЬ

Роман Івасько, Аніда Станік-Беслєр, Наталія Івасько

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Політехніка Опольська (Польща)

roman_ivasko@ukr.net, a.stanik-besler@po.edu.pl, natalya_ivasko@ukr.net

Мініатюризація електротехнічних пристроїв, які працюють у діапазоні надвисоких частот (НВЧ), неможлива без використання довгохвильових когерентних (з постійною різницею фаз) дипольних спінових хвиль (т.зв. магнітостатичних хвиль (МСХ)) у намагнічених феритових плівках за наявності постійного та гармонічного в часі магнітних полів. За континуального підходу їх розглядають як хвилі прецесії вектора спонтанної намагніченості. Ці хвилі генерують і вловлюють вузькими металевими провідниками (антенами), розташованими на поверхні відповідної плівки. Тип генерованої хвилі визначається напрямом постійного магнітного поля: у дотично намагнічених плівках поширюються поверхневі МСХ, а у нормально намагнічених – об'ємні [1].

У літературі досить ґрунтовно проаналізовано умови генерування та поширення МСХ у феритових елементах електротехнічних пристроїв, але практично не розглянуто теплові та механічні процеси, які при цьому відбуваються. У більшості з цих праць не досліджено умови часткового поглинання мікрохвильової енергії матеріалом, яке призводить до його нагрівання, а також виникнення механічних напружень, спричинених як нагріванням, так і силовими чинниками дії поля.

У роботі визначено та досліджено параметри фізико-механічних процесів, які відбуваються в металізованій намагніченій феритовій пластині за дії нормального постійного і дотичного гармонічного магнітних полів. Електромагнітне поле розглядаємо як зовнішню дію, яка проявляється в матеріальному середовищі через енергетичні (дисипація енергії або тепловиділення) та силові чинники (пондеромоторні сили і моменти сил). У такому наближенні визначення температурних полів і напружень у тілі зведено до послідовного розв'язання відповідної задачі електродинаміки (перший етап) та квазістатичної задачі термопружності (другий етап) за заданих початкових і крайових умов.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_09.pdf

В силу малої фазової швидкості МСХ описуються рівняннями магнітостатики та рівнянням руху (гіромагнітних коливань) вектора намагніченості (рівнянням Гільберта) за відповідних магнітостатичних крайових умов. Використовуючи при розв'язанні нелінійних рівнянь магнітостатики метод подання шуканих величин за малим параметром [2] (за обмеження двома членами розкладу), отримано вирази для напруженості, намагніченості та індукції магнітного поля. Визначено інтервал частот (т.зв. граничних частот пропускання (запирання)), за яких у пластині виникають і поширюються об'ємні МСХ. У межах смуги пропускання проаналізовано частотні залежності хвильових чисел, амплітуд гармонік намагніченості та індукції магнітного поля, температури, нормальних і дотичних напружень, а також розподіли температури та напружень за товщиною координатою.

Виявлено, що амплітуди намагніченості та індукції магнітного поля практично збігаються. Показано, що нормальними напруженнями σ_{zz} можна знехтувати порівняно з напруженнями σ_{xx}. Зазначено, що об'ємні МСХ призводять до появи компоненти π_{xy} антисиметричного тензора натягів Максвелла (значення якої нехтовно мале порівняно з напруженнями σ_{zz}).

Отримано, що амплітуди намагніченості та індукції магнітного поля, а також температура та механічні напруження досягають максимальних значень на першій частоті запирання (граничній частоті пропускання). Визначено критичне значення напруженості гармонічного магнітного поля, за якого температура досягає точки Кюрі (матеріал втрачає феромагнітні властивості), наслідком чого стає неможливість поширення об'ємних МСХ.

1. *Hachkevych O.R., Solodyak M.T., Terlets'kyi R.F. and Ivas'ko R.O.* Three-Dimensional Magnetostatic Waves Caused by Electromagnetic Fields in Metallized Ferrite Plates // Mat. Sci. – 2019. – Vol. 55, No. 3. – P. 327-336.
2. *Hachkevych O.R., Solodyak M.T., Terlets'kyi R.F. and Tarlakovskii D.V.* Electrodynamic Relations, Energy and Force Factors of the Actions of Electromagnetic Fields for Magnetic Media // Mat. Sci. – 2015. – Vol. 50, No. 4. – P. 545-554.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE PHYSICAL AND MECHANICAL PROCESSES IN A METALLIZED FERRITE PLATE SUBJECTED TO BULK MAGNETOSTATIC WAVES

Using a well-known technique for finding the characteristics of the magnetic field, based on the method of decomposing unknown quantities in a series into small parameters (chosen as the ratio of the amplitude of the tangential harmonic field to the amplitude of the normal constant field) and restricting ourselves to the first two terms of the decomposition, the conditions of excitation and the regularities of propagation of three-dimensional magnetostatic waves in a metallized normally magnetized ferrite plate, depending on the character of the external electromagnetic field and the electrophysical characteristics of the material, have been determined and studied.

УДК 534.1

МЕТОД СИМЕТРІЇ І АПРОКСИМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Кирило Трапезон, Олександр Трапезон

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

trapezon@ukr.net

Запропоновано нетрадиційні підходи до аналітичного розв'язання прикладних задач для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. В основу цих підходів покладено групові перетворення диференціальних рівнянь, в результаті чого стає можливою побудова симетрій цих рівнянь. Зокрема методом симетрій досліджено задачі про коливання пружних тіл різної геометрії або їх статичне деформування.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$(FW')' + k^2 FW = 0, \tag{1}$$

де $F(x)$ – задана функція (змінний коефіцієнт). Якщо $W(x)$, k – власна функція та власне число відповідно, то (1) безпосередньо буде рівнянням поздовжніх чи крутильних коливань стрижня змінного поперечного перерізу, рівнянням крутильних коливань диска змінної товщини. До рівняння у формі (1) шляхом належних підстановок та заміни змінних можна звести багато інших рівнянь другого порядку. Якщо ввести співвідношення

$$W_1 = FW', \quad F_1 = 1/F, \tag{2}$$

то (1) можна перетворити в аналогічне рівняння

$$(F_1 W_1')' + k^2 F_1 W_1 = 0. \tag{3}$$

Зрозуміло, що при застосуванні групи перетворень (2) забезпечується інваріантність рівнянь (1) та (3) і відповідно реалізуються їх симетрії через відповідну схему побудови розв'язків. В реальних ситуаціях диференціальні рівняння типу (1) зі зміними коефіцієнтами не піддаються точному розв'язку, через що досить часто використовуються наближені методи чи методи на основі рядів. Завдяки методу симетрій можна побудувати рівняння (1), яке має точний розв'язок при змінних коефіцієнтах функції F_i і їх число в загальному випадку є не обмеженим. Використовуючи цю властивість функцію F_i

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_11.pdf

можна використати в якості апроксимуючої функції для будь-яких реальних ситуацій, які моделюються рівнянням виду (1). Для розв'язання реальних задач функція F_i замінюється апроксимаційною функцією за рахунок відповідного вибору сталих коефіцієнтів в цій апроксимаційній функції, при яких рівняння типу (1) має точний розв'язок. В якості прикладу запропонованого підходу можна навести розв'язок рівняння типу (1), яке описує крутильні коливання диску змінної товщини закріпленого по внутрішньому краю та вільного по зовнішньому краю. Функція $F(x) = \exp(ax^2)$, де a – коефіцієнт. Так, в роботі [1] для пошуку розв'язку рівняння (1) використано підходи на основі методу рядів і при $a = -1$ отримано, що власне число на першій та другій формі коливань відповідно дорівнюють $k_1 = 1{,}896554$ і $k_2 = 4{,}849536$. Використовуючи принципи та підходи методу симетрій та виконавши відповідний підбір апроксимаційної функції виду $F_1 = 1/\cosh^2 mx$, де $m = 1{,}085$, знайдено, що власні числа на першій та другій формі коливань дорівнюють відповідно $k_1 = 1{,}90909$ і $k_2 = 4{,}835683$. Крім цього, на основі методу симетрій, отримано аналітичний розв'язок рівняння (1):

$$W = -B\left[\lambda \cosh mx \sin \lambda x + m \sinh mx \cos \lambda x\right], \tag{4}$$

де $\lambda = \sqrt{k^2 - m^2}$. Порівнюючи отримані результати розв'язку задачі на власні значення для рівняння типу (1), де визначена функція $F(x) = \exp(ax^2)$ з відповідними результатами на основі методу рядів, можна підкреслити несуттєву різницю – відповідно на 0,66% та 0,28%. Крім цього, варто відмітити, що отриманий розв'язок (4) є більш зручним для подальшого розрахунку напружень і побудови форм власних коливань, аніж співвідношення, яке отримано в [1] на основі рядів. Аналогічним чином можна отримати розв'язки задач теорії коливань чи статичного деформування пружних тіл (стрижнів, дисків, балок, пластинок), які моделюються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

1. *Collatz L.* Eigenwertaaufgaben mit technischen anwendungen. – Leipzig: Akademische verlagsgesell shaft, 1963. – 504 p.

METHOD OF SYMMETRY AND APPROXIMATION IN PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

A comparison of the results of solving the problem on the eigenvalues of the torsional vibrations of a disk of variable thickness, which were obtained on the basis of the method of series and group approaches, based on the concept of symmetry of differential equations, was carried out. It is shown that approaches based on the symmetry of equations with the introduction of an approximation function allow obtaining eigenvalues for the problem of oscillations of a disc of variable thickness in a more visual and convenient way.

УДК 539.3

РУЙНУВАННЯ ВИСОКОЕЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТРІЩИНИ. ПЛОСКА ЗАДАЧА

Михайло Довжик, Володимир Назаренко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

dovzhyk.m.v@ukr.net, nazvm1@gmail.com

Розглянуто плоску задачу руйнуванні півплощини $x_2 \geq -h$ за одновісного стиску вздовж приповерхневої тріщини. Плоска тріщина довжиною $2a$ в напрямку осі Ox_1 (напрямку стиску) та нескінченна в напрямку осі Ox_3 розташована в площині $x_2 = 0$. Стискаючі зусилля паралельні площині тріщини.

За використання критерію руйнування, зв'язаного з локальною втратою стійкості матеріалу в околі тріщини, в межах тривимірної лінеаризованої теорії пружності, задача зводиться до розв'язування системи інтегральних рівнянь [1]:

$$\begin{gathered}\int_0^1 f(\eta)\left|\frac{1-\xi^2}{\eta^2-\xi^2}\right| d\eta + \frac{1}{k}\int_0^1 M_1(\xi,\eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{k}\int_0^1 N_1(\xi,\eta) g(\eta) d\eta = 0;\\ \int_0^1 g(\eta)\left|\frac{1}{\eta^2-\xi^2}\right| d\eta + \frac{1}{k}\int_0^1 M_2(\xi,\eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{k}\int_0^1 N_2(\xi,\eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 = 0; \qquad (1)\\ \int_0^1 g(\eta) d\eta = 0.\end{gathered}$$

При розв'язуванні системи використано чисельно-аналітичну методу, побудовану на методі Бубнова-Гальоркіна, запропоновану в [2]. За координатні функції вибрано степеневі функції $f(x) = \sum_{i=0}^{N} F_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{N} G_i x^i$. В такому випадку значення інтегралів $\int_0^1 \xi^j \int_0^1 \eta^i \ln\left|\eta^2 - \xi^2\right| d\eta d\xi$ та $\int_0^1 \xi^i \ln\left|1 - \xi^2\right| d\xi$ можна знайти аналітично. З використанням рекурентних співвідношень з [2] інтеграли від ядер M_1, M_2, N_1, N_2 також обчислюються аналітично. В результаті система інтегральних рівнянь (1) зводиться до системи лінійних рівнянь

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_12.pdf

$$\sum_{i=0}^{N} F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^{N} G_i G_{1ji} = 0;\ \sum_{i=0}^{N} F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^{N} G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 = 0;$$
$$\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} G_i = 0,\ 0 \le j \le N, \qquad (2)$$

коефіцієнти якої залежать від сталих матеріалу та безрозмірної відстані $\beta = h / a$.

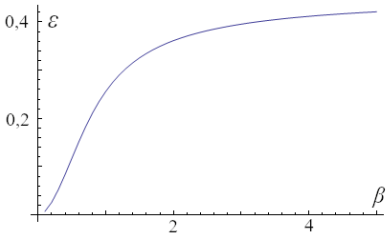


Рис. 1

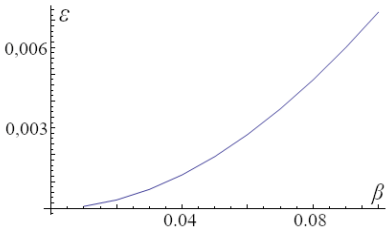


Рис. 2

Як приклад, розглянуто матеріал, для якого відомий потенціал Трелоара. При цьому отримано залежності критичних укорочень від безрозмірної відстані між тріщиною та вільною поверхнею. На рис. 1 приведено залежності для великих відстаней, що збігаються з отриманими раніше в [1]. Це підтверджує факт, що чисельно-аналітична метода, запропонована в [2], може бути застосована для розв’язання таких задач.

На рис. 2 показано залежності критичних укорочень для малих відстаней. Ці нові результати неможливо було отримати за допомогою методів, запропонованих в [1].

1. *Назаренко В.М.* К теории разрушения материалов при сжатии вдоль приповерхностных трещин в условиях плоской деформации // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 12. – С. 96–104.
2. *Гузь А.Н., Довжик М.В., Назаренко В.М.* Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной // Прикл. механика. – 2011. – **47**, № 6. – С. 28–37.

DESTRUCTION OF HIGHLY ELASTIC MATERIALS IN COMPRESSION ALONG A NEARSURFACE CRACK A PLANE PROBLEM

In this paper, the nonclassical problem of fracture mechanics for a near-surface crack in the case of plane problem was investigated. To solve this problem the numerical analytical procedure was proposed. As an example, the numerical research for highly elastic material with Treloar potential was conducted. The critical shortening in case of small values of distances between a free surface and crack corresponding to the beginning of the destruction process was defined.

УДК 620.17

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ДЕФОРМУВАННІ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Борис Карпінос

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

karpinos@ipp.kiev.ua

Наведено критерії подібності термодинамічних станів матеріалів, а також критерії гомохроності, зносостійкості (втрати маси), фізико-хімічних перетворень, які використовуються при аналізі результатів експериментальних досліджень механічних властивостей матеріалів. Розробка критеріїв базувалася на засадах теорій подібності і аналізу розмірності.

Зворотний процес пружного деформування характеризується одним переважаючим механізмом. Перехід матеріалу з одного стану в інший відбувається одним шляхом. Це дозволяє інваріанти механічного стану $\mathbf{Me}_\sigma$, $\mathbf{Me}_\tau$

$$\mathbf{Me}_\sigma = \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E}, \quad \mathbf{Me}_\tau = \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{E},$$

вважати необхідними, а інваріанти теплового стану $\mathbf{Tt}$ та гомохронності $\mathbf{Ht}$:

$$\mathbf{Tt} = \alpha T, \quad \mathbf{Ht} = t\omega_{\text{зв}} = t^3\sqrt{2\alpha E / k}\sqrt{E/\rho}$$

– достатніми критеріями подібності, де σ_{ij}, τ_{ij}, ε_{ij}, γ_{ij} – відповідно компоненти нормальних та дотичних напружень та деформацій, E, G – модулі пружності та зсуву, T – абсолютна температура, t – час, α – коефіцієнт лінійного розширення, ρ – густина, $\omega_{\text{зв}}$ – частота звукових коливань, k – стала Больцмана. Подібність станів матеріалу в дослідах досягається за умов $\{\mathbf{Me}_\sigma, \mathbf{Me}_\tau, \mathbf{Tt}, \mathbf{Ht}\} = \text{idem}$. Для подібності термопружних станів додатковою умовою є $\mathbf{Td} = c_p\rho/(E\alpha) = \text{idem}$, де c_p – теплоємність.

При пластичному деформуванні спостерігається декілька механізмів. Перехід матеріалу з одного в інший стан може відбуватися різними шляхами, які характеризують особливості незворотності процесу деформування. Для їх враховування запропоновано інваріанти поточної $\mathbf{Me}_\xi$ та загальної $\mathbf{Me}_\varsigma$ пошкоджуваності

$$\mathbf{Me}_\xi = 1 - \mathbf{Me}_i = 1 - \frac{\sigma_{p(i)}}{\varepsilon_{p(i)}E}, \quad \mathbf{Me}_\zeta = \frac{W_{p(i)}}{W_{\text{пр}}} = \frac{2\int_0^\varepsilon \sigma_{(i)}d\varepsilon_{(i)}}{E\varepsilon_{p(i)}^2} - \left(\frac{\sigma_{\text{пр}}}{E\varepsilon_{p(i)}}\right)^2,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_15.pdf

де $\sigma_{p(i)}$, $\varepsilon_{p(i)}$ – відповідно поточні значення пластичних напружень і деформацій, $W_{p(i)} = \int_0^{p(i)} \sigma_{(i)} d\varepsilon_{(i)}$ – робота пластичного деформування до деформації $\varepsilon_{p(i)}$, $W_{\text{пр}} = E\varepsilon_{p(i)}^2 / 2$ – робота пружного деформування до деформації $\varepsilon_{p(i)}$. Інваріанти $\mathbf{Me}_\xi$, $\mathbf{Me}_\varsigma$ успішно використовуються при аналізі одноразового та багаторазового циклічного навантажень.

Для аналізу процесів тертя та зносу залучено такі інваріанти

$$\mathbf{M_{fr}}1 = \Delta m N_A / A, \quad \mathbf{M_{fr}}2 = 2\Delta m E\alpha / \rho k = \Delta V / V_0,$$

$$\mathbf{M_{fr}}3 = \Delta m E / (\rho^2 a^3)\sqrt{E/\rho} = \Delta m c_p^3 \rho E / \lambda^3 \sqrt{E/\rho} = \Delta m / (\rho \tilde{l}_f^3) = \Delta V / \tilde{V}',$$

де Δm, ΔV – маса та об'єм зносу, N_A – число Авогадра, A – атомна маса елементу, λ – теплопровідність, a – температуропровідність матеріалу, $\tilde{l}_f$ – довжина вільного пробігу фонона.

При опису структурних перетворень, процесів дифузії, хімічних реакцій використано два інваріанти. Перший, що враховує енергетичні витрати

$$\mathbf{M_{st}}1 = \Delta Q / (T_\text{st} C_p),$$

де ΔQ, T_st – відповідно енергія та температура перетворення або хімічної реакції. Другий, що враховує зміну об'ємів продуктів при фізичних перетвореннях та хімічних реакціях:

$$\mathbf{M_{st}}2 = \rho_\text{st} / \rho_0 = V_0 / V_\text{st} \approx (\alpha E)_0 / (\alpha E)_\text{st},$$

де ρ_0, ρ_st, V_0, V_st, $(\alpha E)_0$, $(\alpha E)_\text{st}$ – відповідно густина, питомий об'єм та характеристики основного матеріалу і продуктів хімічних реакцій та фізичних перетворень. При $\mathbf{M_{st}}2 < 1$ механічні характеристики продуктів перетворень кращі за такі основного матеріалу, при $\mathbf{M_{st}}2 > 1$ – навпаки, гірші.

При дослідженні процесу поширення тріщин в матеріалі запропоновано інваріанти

$$\mathbf{L}_1 = \sigma / a\sqrt{F/(E\rho)} = \sigma c_p / a\sqrt{F/(E\rho)}, \quad \mathbf{L}_2 = \sigma / D_d \sqrt{F/(E\rho)},$$

де F – поверхня тріщини, D_d – коефіцієнт дифузії.

Наведені інваріанти засвідчують зв'язок між різними механічними та фізичними характеристиками матеріалів і окреслюють шляхи досягнення умов подібності станів.

FEATURES OF MODELING PHYSICAL AND MECHANICAL PROCESSES OF DEFORMATION OF STRUCTURAL MATERIALS

The invariants of material states and criteria for similarity of physical and mechanical processes of deformation of structural materials are presented. The relationship between different mechanical and physical characteristics of materials is shown when the conditions of similarity of states are met.

УДК 539.3

МАТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ПРО УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ КВАЗІКРИСТАЛІВ

Роман Кушнір, Ярослав Пастернак, Георгій Сулим

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Волинський національний університет імені Лесі Українки

dyrector@iapmm.lviv.ua, iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua, gtsulym@gmail.com

Елементи конструкцій сучасного машино- та аерокосмічного будування все частіше виготовляють із не так давно відкритих матеріалів, що мають порівняно із традиційними (скажімо, металами, пластмасами тощо) низку нових унікальних властивостей. Зокрема, на даний час значний інтерес науковців зосереджений на дослідному вивченні та математичному моделюванні поведінки квазікристалічних тіл, що, з одного боку, вже мають дуже цікаві застосування і коло яких швидко зростає, а з іншого – їхню реакцію на суто механічні впливи слід описувати новими і відмінними від співвідношень теорії пружності анізотропних тіл залежностями [1].

Зокрема, конститутивні співвідношення лінійної теорії пружності для квазікристалічних матеріалів мають такий вигляд [1]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km} + R_{ijkm}w_{k,m}, \quad H_{ij} = R_{kmij}\varepsilon_{km} + K_{ijkm}w_{k,m}, \tag{1}$$

де σ_{ij} – фононні напруження; $\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\big/2$ – компоненти фононного тензора деформацій; H_{ij} – фазонні напруження; $w_{i,j}$ – фазонні деформації; C_{ijkm} – компоненти фононного тензора пружних сталих; K_{ijkm} – відповідні для фазонних пружних сталих; R_{ijkm} – сталі фононно-фазонної взаємодії.

У даній роботі з огляду на те, що згадані вище 4-валентні тензори з компонентами R_{ijkm}, C_{ijkm}, K_{ijkm} мають властивості симетрії $R_{ijkm} = R_{jikm}$, $C_{ijkm} = C_{jikm}$, $K_{ijkm} = K_{kmij}$ [1], конститутивні співвідношення (1) записано у такому компактному вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,m}, \tag{2}$$

де

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_16.pdf

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij},\ \tilde{\sigma}_{(i+3)j} = H_{ij},\ \tilde{u}_i = u_i,\ \tilde{u}_{i+3} = w_i;\ \tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm},$$
$$\tilde{C}_{ij(k+3)m} = R_{ijkm},\ \tilde{C}_{(i+3)jkm} = R_{kmij},\ \tilde{C}_{(i+3)j(k+3)m} = K_{ijkm}, \qquad (3)$$

а запропонований розширений тензор $\tilde{C}_{IjKm}$ фононно-фазонних сталих є симетричним: $\tilde{C}_{IjKm} = \tilde{C}_{KmIj}$. Тут записані великими літерами індекси змінюються від 1 до 6, а малими – від 1 до 3.

З урахуванням (3) та рівнянь динаміки квазікристалів [1] у зображеннях Фур’є, диференціальне рівняння для отримання фундаментального розв’язку трансформанти усталеного руху квазікристалу $\tilde{U}_{KQ}$ матиме вигляд

$$\tilde{C}_{IjKm}\tilde{U}_{KQ,jm} + \omega^2 M_{IK}\tilde{U}_{KQ} = -\delta_{IQ}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \qquad (4)$$

Тут ω – кругова частота; M_{IK} – компоненти матриці інертності.

Застосування до (4) перетворення Радона [2] з параметрами p, $\boldsymbol{\xi}$ дає

$$\Gamma_{IK}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{U}_{KQ} + \omega^2 M_{IK}\breve{U}_{KQ} = -\delta_{IQ}\delta(p - \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}_0),\ \ \Gamma_{IK} = \tilde{C}_{IjKm}\xi_j\xi_m. \qquad (5)$$

Його розв’язок знайдено у такому матричному вигляді:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{\mathbf{U}} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\sqrt{\mathbf{M}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}\exp\left(\mathrm{i}\omega\sqrt{\mathbf{M}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}\,|p|\right) - \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\delta(p). \qquad (6)$$

Співвідношення (6) дає можливість знайти обернене перетворення Радона та записати фундаментальний розв’язок у вигляді інтеграла по поверхні одиничної сфери. На відміну від координатних [1], застосований підхід не накладає обмежень на особливості матеріальної симетрії квазікристалів і дозволяє отримати розв’язок для найзагальнішого випадку. Крім того, подання (6) дає змогу явно розділити динамічну (регулярну) та статичну (сингулярну) складові фундаментального розв’язку. Він є основою побудови інтегральних рівнянь, за допомогою яких можна розв’язувати конкретні задачі.

1. *Fan T.Y., Yang W., Cheng H., Sun X.H.* Generalized Dynamics of Soft-Matter Quasicrystals: Mathematical Models, Solutions and Applications. Second Edition. Singapore: Springer, 2022.
2. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on Green’s functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelectroelasticity // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2016. – **64**. – P. 222–229.

MATRIX APPROACH FOR DERIVATION OF FUNDAMENTL SOLUTIONS OF TIME-HARMONIC ELASTICITY PROBLEMS FOR QUASICRYSTALS

In this study the constitutive and motion equations for quasicrystal solids are rewritten in a compact form, which is scalable and allows further matrix manipulations. In particular, the general fundamental solution in the frequency domain is obtained.

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНОЇ КОНСОЛЬНОЇ ТОНКОЇ ЗАМКНУТОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ОСНОВІ КЛАСИЧНОЇ ТА ДЕЯКИХ УТОЧНЕНИХ ТЕОРІЙ

Роман Тучапський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

roman.tuch@gmail.com

У цій роботі побудовано алгоритми чисельно-аналітичного розв'язування задач про напружено-деформований стан локально навантажених тонких ортотропних усічених замкнутих конічних оболонок на основі теорій методу {m, n}-апроксимації, Кірхгофа – Лява та типу Тимошенка.

З вихідних систем рівнянь цих теорій отримано еквівалентні їм системи рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних від узагальнених переміщень і деяких узагальнених напружень відносно координати по меридіану [6].

Ці системи рівнянь записано в спеціальній формі і, подібно до того, як це було зроблено в роботах [2, 4, 5, 7–10], за допомогою розвинень у тригонометричні ряди Фур'є по кільцевій координаті всіх величин, що характеризують напружено-деформований стан оболонки, і всіх величин, що характеризують зовнішнє навантаження, зведено до послідовностей незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

На основі методу ортогональної прогонки С.К. Годунова [3] побудовано алгоритм послідовностей розв'язувань крайових задач для цих нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

Як приклад використання цього алгоритму, розглянуто задачі про напружено-деформований стан локально навантаженої консольної тонкої ізотропної усіченої замкнутої конічної оболонки. При цьому для моделювання локальних навантажень було використано дельтоподібні функції і їх тригонометричні розвинення [1] по кільцевій координаті.

Проведено порівняння результатів, отриманих з використанням теорій Кірхгофа–Лява, типу Тимошенка й теорій методу {m, n}-апроксимації.

1. *Буряк Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: "Інтелект-Захід", 2007. – 240 с.

2. *Василенко А.Т., Григоренко Я.М., Судавцова Г.К.* Решение задач о напряженном состоянии тонких оболочек вращения при локальных нагрузках // Прикладная механика. – 2000. – **36**, № 4. – С. 106–113.
те саме: *Vasilenko A.T., Grigorenko Y.M., Sudavtsova G.K.* Solving problems on the stress state of thin shells of revolution under local loads // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**. – P. 518–525.
3. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. XVI, вып. 3 (99). – С. 171–174.
4. *Григоренко Я.М.* Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикладная механика. – 1996. – **32**, № 6. – С. 3–39.
те саме: *Grigorenko Y.M.* Approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problems in shell theory in classical and refined formulations // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**. – P. 409–442.
5. *Мяченков В.И., Григорьев И.В.* Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с.
6. *Тучапський Р.І.* Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу {m, n}-апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 3. – С. 43–56.
те саме: *Tuchapskyy R.I.* Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the {m, n}-approximation method // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – **226**, No. 1. – P. 52–68.
7. *Emelyanov I.G., Kuznetsov A.V.* The Stressed State of Shell Structures under Local Loads // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2014. – **43**, No. 1. – P. 42–47.
8. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G.* Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory: general theory and applications of classical theory – Volume 1. – Singapore: Springer Singapore, 2016. – 116 p.
9. *Grigorenko Ya.M., Bespalova E.I., Urusova G.P.* Solving stationary problems of shell theory with allowance for transverse reduction. In: Pietraszkiewicz W., Kreja I. (Eds.). Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 2: Proceedings of the 9th SSTA Conference, Gdańsk – Jurata, Poland, 14–16 October 2009 (1st ed.). – CRC Press, 2009. – P. 245–248.
10. *Grigorenko Y.M., Bespalova E.I., Urusova G.P.* Stationary deformation of compound shell structures under arbitrary loadings. In: Pietraszkiewicz W., Górski J. (Eds.). Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 3: Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdańsk, Poland, 16–18 October 2013. – Taylor & Francis Group, London, 2014. – P. 93–96.

CALCULATION OF A LOCALLY LOADED CANTILEVER THIN CLOSED CONICAL SHELL BASED ON CLASSICAL AND SOME REFINED THEORIES

The problems of calculating the stress-strain state of locally loaded thin orthotropic truncated closed conical shells based on the Kirchhoff–Love theory and some refined theories are considered.

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД УЗГОДЖЕНИХ СІЧЕНЬ ДЛЯ ПЛАСТИН МІНДЛІНА З ВИРІЗАМИ

Ігор Ориняк, Кирило Даниленко

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com; k.a.danylenko@gmail.com

На сьогоднішній день найбільш розповсюдженим методом розрахунку пластин є чисельний метод скінчених елементів (МСЕ). Запропонований в цій роботі метод узгоджених січень (МУС) є можливою альтернативою. Відмінності полягають в наступному:
– МУС базується на сильній постановці (strong formulation) задачі (тобто розглядаються всі диференційні рівняння, що покладені в основу моделі пластини), на відміну від слабкої (weak), де розглядається варіаційна енергетична постановка;
– в якості основних в МУС розглядаються в кожному поперечному січенні кожного елемента 6 фізичних і геометричних параметрів: переміщення, два кути нахилу, два момента та поперечна сила (рис. 1), що дозволяє легко задовольнити довільні граничні умови, тоді, як в МСЕ використовуються лише переміщення та два кути;
– узгодження між сусідніми елементами в МУС відбувається по центру січення і забезпечує неперервність всіх 6 параметрів задачі, а в МСЕ ужгодження відбувається лише в сусідніх вершинах елементів по кінематичних параметрах (переміщеннях і кутах);
– в МУС основні параметри та формули подаються у вигляді розв'язків задач про згин та кручення прямої балки, тому сусідство пластини з балкою органічно враховується і не вимагає розробки спеціальних процедур, як в МСЕ.

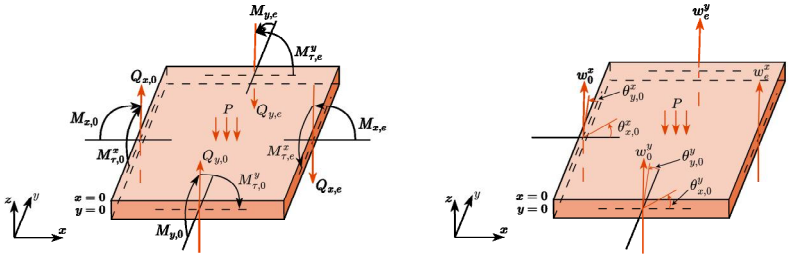


Рис. 1

Основу розв'язування МУС складають рівняння зв'язку, що дають наближений (сильний) розв'язок всіх диференційних рівнянь для всіх точок еле-

мента залежно від початкових (індекс «0»), якими є 6 параметрів на лівому краї, і наступні 6 – на правому. Вони записуються в наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \\ \dots \\ Z_6(x) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{1,1}(x);a_{1,2}(x);\dots a_{1,11}(x);a_{1,12}(x) \\ a_{2,1}(x);a_{2,2}(x);\dots a_{1,11}(x);a_{2,12}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{6,1}(x);a_{6,2}(x);\dots a_{6,12}(x);a_{6,12}(x) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,0} \\ Z_{2,0} \\ \dots \\ Z_{12,0} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_6(x) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Це при русі зліва направо, де $Z_m(x)$ – 6 функцій-параметрів, що характеризують стан в кожному січенні $x = \text{const}$ і є фактично, тими ж самими параметрами, що $Z_{m,0}$, але уже, як функції від x, P – відоме навантаження на елемент. Очевидно, що рівняння (1) такі, що при $x = 0$ функції $a_{m,m}(0) = 1$, а всі інші $a_{m,k}(0) = 0$ та всі $b_m(0) = 0$.

Аналогічно отримуємо для інших 6 функцій-параметрів, що характеризують стан в $y = \text{const}$. Тут $c_{m,m+6}(0) = 1$, а інші $c_{m,k}(0) = 0$ та $d_m(0) = 0$.

$$\begin{pmatrix} Z_7(y) \\ Z_8(y) \\ \dots \\ Z_{12}(y) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{1,1}(y);c_{1,2}(y);\dots c_{1,11}(y);c_{1,12}(y) \\ c_{2,1}(y);c_{2,2}(y);\dots c_{1,11}(y);c_{2,12}(y) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{6,1}(y);c_{6,2}(y);\dots c_{6,12}(y);c_{6,12}(y) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,0} \\ Z_{2,0} \\ \dots \\ Z_{12,0} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} d_1(y) \\ d_2(y) \\ \dots \\ d_6(y) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Рівняння звязку доповнюються рівняннями спряження (на границях між елементами) та граничними умовами. Подання у вигляді (1) та (2) дають змогу застосовувати метод початкових параметрів для організації обчислень, що значно зменшує кількість невідомих, як в методі граничних елементів.

Тестові обчислення показали надзвичайну стійкість методу: а) за довільних співвідношеннях між довжинами сторін елементів; б) за довільних співвідношень жорсткості різних елементів; в) за різного відношення довжини і товщини пластини. Метод уже при використанні 1 елементу демонструє задовільну точність, яка для балкових елементів є абсолютною.

NUMERICAL METHOD OF MATCHED SECTIONS IN APPLICATION TO MINDLIN PLATES WITH CUTOUTS

MMS is based on beam-like presentation of approximate plate solution based on strong formulation. The resulting formulas for each rectangular element are presented in transfer matrix method form, where the output parameters (6 parameters in $x = \text{const}$ *sections as well as 6 in* $y = \text{const}$*) are related with 12 initial parameters – 6 at the left edge* $x = 0$ *and 6 at the lower edge* $y = 0$ *. Numerical examples show the perfecr stability of method for various ratio between physical and geometrical parameters. The fair accuracy is attained even for mesh consisting from only 1 element, and tend to very good for small number of elements. Other advantage of MMS element is that it naturally conjugate with beam element.*

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ШОРСТКОСТІ У ТЕРМОМЕХАНІЦІ ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

University of Zielona Góra (Poland),
Ivan Franko National University of L'viv (Ukraine)

t.nahirny@iim.uz.zgora.pl, kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua

Однією з важливих характеристик деталей машин й елементів конструкцій є шорсткість поверхні тіла. Для її опису використовують низку числових характеристик, що стосуються поверхні (опис 3D) та її профілю (опис 2D). Серед параметрів, які широко використовують при описі 2D є R_a – середнє арифметичне відхилення профілю, R_z – сума середніх абсолютних значень висот п'яти найбільших виступів і глибин п'яти найбільших впадин профілю в межах базової довжини, R_{max} або R_t – найбільша висота профілю. Разом із цим жоден із висотних, крокових та висотно-крокових параметрів не характеризує уповні вплив шорсткості на експлуатаційні властивості деталей: поверхні з однаковим значенням R_z і R_t можуть мати дуже різні трибологічні властивості (рис. 1).

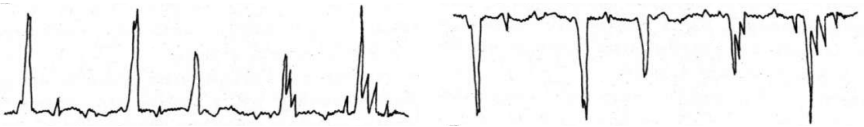


Рис. 1

Важливою характеристикою профілю поверхні є крива Аббота-Файрстоуна, крива опорної поверхні (Abbott–Firestone curve, material ratio), яку використовують у трибології. Вона визначає у відсотках частину простору, зайняту матеріалом, на біжучій висоті профілю реальної поверхні (рис. 2). Ця крива та її параметри описані у стандартах ISO 13565-2 та ASME B46.1.

В області опорної кривої поверхні (рис. 2) розрізняють: область піків профілю (R_{pk} – середня висота піків над опорною областю), опорну область профілю (R_k – висота опорної області), область западин профілю (R_{vk} – середня глибина западин під опорною областю). Для більшості практичних застосувань шорстких поверхонь бажаними є мінімальні значення параметра R_{pk} (оскільки піки зминаються або зношуються в початковий період роботи), а

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_19.pdf

також більші значення параметра R_{vk}.

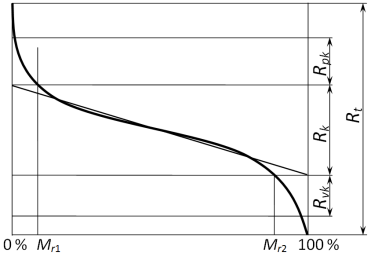


Рис. 2

Криву опорної поверхні можна подати у вигляді розподілу густини матеріалу у приповерхневій області тіла, якщо прийняти, що найвища точка профілю відповідає густині $\rho = 0$, а найнижча – густині матеріалу у відліковому стані $\rho = \rho_*$.

В рамках термомеханіки локально неоднорідного твердого тіла побудовано низку математичних моделей, у яких густину матеріалу ρ розглядають як базовий параметр стану, для якого справджується рівняння [1]

$$\nabla^2\rho - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m}, \tag{1}$$

де ξ – параметр, що характеризує структуру матеріалу тіла, $d_{\sigma m}$ – функція, що враховує спосіб формування поверхні.

З метою наближення розподілу густини матерілу до кривої опорної поверхні вважаємо, що на поверхні півпростору (область $x \ge 0$) значення густини матеріалу дорівнює нулю, а для функції $d_{\sigma m}$ приймаємо подання

$$d_{\sigma m} = -\rho_* \exp(-(\zeta x)^k), \tag{2}$$

у якому ζ, k – сталі. Дана формула є узагальненням подання, яке зазвичай використовують для функції $d_{\sigma m}$ при моделюванні зв’язаних полів.

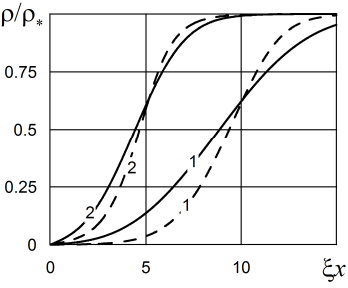


Рис. 3

Розподіл густини ρ/ρ_* у глибину півпростору представлено на рис. 3 для $\zeta/\xi = 0.1;\ 0.2$ (криві 1, 2), $k = 3, 6$ (суцільна та штрихова лінії). Бачимо, що вибором параметрів ζ/ξ можна наблизити розподіл густини матеріалу у приповерхневій області тіла до кривої опорної поверхні і таким чином врахувати у рамках моделей термомеханіки локально неоднорідного твердого тіла шорсткість реальної поверхні тіла та спосіб її обробки.

1. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.

MODELING OF ROUGHNESS IN LOCALLY INHOMOGENEOUS THERMOMECHANICS

It is shown that by choosing mass sources in models of thermomechanics of local non-homogeneous solids, the distribution of density of mass in the near-surface area can be fit to the Abbott–Firestone curve, which is widely used in engineering to describe roughness.

УДК 519.6

СУЧАСНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Олександр Хіміч

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

khimich505@gmail.com

Високопродуктивні обчислення і суперкомп'ютерні технології на основі паралельних обчислень на даний час є одним із основних інструментів (а інколи – єдиним) математичного моделювання в наукових і інженерних дослідженнях.

Разом зі зростанням можливостей паралельних комп'ютерів зростають і проблеми їх створення та експлуатації. Збільшення кількості процесорів у паралельних комп'ютерах, створення нових гібридних гетерогенних архітектур означає суттєве збільшення комунікаційних втрат та зниження їх ефективності. Вже зараз є суттєві відмінності за рахунок комунікаційних втрат між максимальною та експлуатаційною продуктивностями [1]. Основні проривні досягнення в цих напрямках: нові моделі обчислень, що враховують багаторівневий паралелізм (розподілені, паралельні, гібридні обчислення), шарово-циклічні методи розподілу та обробки інформації на розподілених обчислювальних системах, які дозволили позбутися обмеження на ефективність внаслідок ефекту Гайдна та забезпечила створення збалансованих паралельних обчислювальних алгоритмів; методи структурної регуляризації для ущільнення великих розріджених даних, кеш-когерентні методи обробки даних (кешизація обчислень), динамічна адаптивна реконфігурація архітектури в процесі обчислень [3].

Проблеми достовірності комп'ютерних розв'язків зі зростанням об'ємів задач також посилюються. Відомо, що у ряді випадків при вирішенні наукових та інженерних завдань на комп'ютерах користувачі отримують машинні результати, що не містять фізичного сенсу. Це відбувається з багатьох причин, але насамперед через похибку у вихідних даних, відмінності властивостей математичних та машинних моделей задач, відмінності арифметики та машинної арифметики тощо. Практично всі інженерні та наукові задачі мають наближені вихідні дані. Характерною особливістю математичних моделей з наближеними вихідними даними є те, що їх математичні властивості апріорі невідомі і в рамках похибок вихідних даних можуть змінюватись. Більше того, у фіксованому комп'ютерному середовищі неможливо розрізнити вироджену матрицю від погано обумовленої, патологічно близькі власні значення від кратних і т.д. Проблема достовірності комп'ютерних рішень залишається й надалі однією з практично важливих. Істотна роль покладається на

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_21.pdf

математичні методи оцінювання спадкової, обчислювальної та повної похибок комп'ютерних результатів, програмний та технічний інструментарій багаторозрядної та змішаної арифметики [3–6].

Іншою, не менш важливою проблемою практичної реалізації високопродуктивних обчислень є створення програмного забезпечення рівня кінцевого користувача – інтелектуальних програмних засобів, що забезпечують спілкування з комп'ютером мовою предметної області та автоматичну адаптацію методу, комп'ютерного алгоритму, програми та топології комп'ютера до властивостей комп'ютерної моделі задачі у процесі отримання рішення. Програмний інструментарій для цього – знання-орієнтовані технології, що базуються на формальних методах та нейромережних елементах штучного інтелекту [2, 5].

Вирішення перерахованих проблем для основних класів задач обчислювальної та прикладної математики (систем лінійних рівнянь алгебри, алгебраїчної проблеми власних рішень, систем звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних рівнянь) розглядається в рамках розробки засадничих принципів математичного моделювання, в основі яких лежить тріада: комп'ютерна математика, високопродуктивні обчислення, інтелектуальне програмне забезпечення [2, 3, 5, 6].

Реалізація такого підходу дозволяє істотно перерозподілити роботи з постановки і розв'язування задач між користувачем і комп'ютером порівняно з традиційними технологіями, автоматизувати процес дослідження та розв'язання задач, забезпечити достовірність комп'ютерних розв'язків та істотно скоротити час математичного моделювання.

1. www.top500.org
2. *Химич А.Н., Молчанов И.Н., Мова В.И. и др.* Численное программное обеспечение MIMD-компьютера Инпарком. – Киев: Наук. думка, 2007. – 221 с.
3. *Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф.* Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – Киев: Наук. думка, 2008. – 248 с.
4. *Nikolaevskaya E., Khimich A., Chistyakova T.* Programming with multiple precision. Studies in computational intelligence. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. – 234 p.
5. *Khimich O.M., Chistyakova T.V, Sidoruk V.A., Ershov P.S.* Adaptive computer technologies for solving problems of computational and applied mathematics // Cybernetics and Systems Analysis. – 2021. – **57**, No. 6. – P. 990–997.
6. *Хіміч О.М., Попов О.В., Чистяков В.А., Коханівський В.О.* Розв'язування задач на власні значення у змінному комп'ютерному середовищі суперкомп'ютерів // Кібернетика і системний аналіз. – 2023. – **59**, № 3. – С. 141–156.

MODERN PRINCIPLES OF MATHEMATICAL MODELING

Solving the problems for the main classes of computational and applied-mathematics problems (systems of linear algebraic equations, algebraic problems of eigensolutions, systems of ordinary differential equations, nonlinear equations) is considered within the framework of the development of basic principles of the mathematical modeling, which is based on the triad: computer mathematics, high-performance computing, intelligent software security.

УДК 539.3:620.17

ОЦІНЮВАННЯ СХИЛЬНОСТІ ТРУБНИХ СТАЛЕЙ ДО КРИХКОГО РУЙНУВАННЯ НА СТАДІЇ РОСТУ ТРІЩИНИ

Олег Венгринюк, Ольга Звірко, Себастьян Ліпец, Ігор Дзьоба

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
Технологічний університет в Кельцах (Польща)

olehvenhryniuk@gmail.com, olha.zvirko@gmail.com, slipiec@tu.kielce.pl, pkmid@tu.kielce.pl

Обсадні труби експлуатуються за складних умов поєднання механічних навантажень та корозивно-наводнювальних середовищ [1], а їх руйнування спричиняє значні негативні наслідки. За таких умов експлуатації важливим є оцінювання роботоздатності трубних сталей, особливо їх опору крихкому руйнуванню [2]. У роботі оцінили схильність двох сталей обсадних труб з різною мікроструктурою до крихкого руйнування на стадії росту тріщини на основі аналізу напружено-деформованого стану у вершині тріщини та числових розрахунків.

Дослідили сталь 32Г2 з мікроструктурою дрібнозернистого сорбітоподібного перліту та сталь 50Г з грубозернистою феритно-перлітною мікроструктурою. Базові механічні властивості сталі 32Г2: границя міцності σ_{UTS} = = 884,6 МПа, границя плинності σ_{YS} = 683,8 МПа, відносне видовження δ = = 25,3%, відносне звуження ψ = 72,9%; сталі 50Г: σ_{UTS} = 795,8 МПа, σ_{YS} = = 395,6 МПа, δ = 19,0%, ψ = 42,6%. Ударна в'язкість сталі 32Г2 KCV = = 16,2 Дж/см^2, сталі 50Г KCV = 2,2 Дж/см^2. Сталь 50Г нижчої міцності та пластичності порівняно зі сталлю 32Г2 характеризувалася також дуже низьким опором крихкому руйнуванню.

Для аналізу напружено-деформованого стану у вершині тріщини використали раніше розроблений метод [3]. Моделювали механічну поведінку матеріалу у вершині тріщини плоского зразка з однією боковою тріщиною, навантаженого згином, за допомогою методу скінченних елементів у програмі ABAQUS. Чисельний підхід грунтується на використанні даних, отриманих з істинних діаграм розтягу. В результаті моделювання було отримано розподіли напруження та деформацій у вершинах трішин обох сталей (рис. 1). Вищі значення номінальних напружень σ_{22} властиві сталі 32Г2 з вищою міцністю. Нормовані щодо границі плинності значення напружень σ_{22}/σ_{YS} вищі для сталі 50Г з нижчою міцністю, а їх максимум є ближчим до вершини тріщини, що вказує на більшу прогнозну схильність цієї сталі до крихкого руйнування на

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_22.pdf

стадії росту тріщини порівняно зі сталлю 32Г2. Подібні тенденції отримали також у розподілах коефіцієнта триосності напружень попереду вершини тріщини та ефективної пластичної деформації, що вказують на вищу схильність до крихкого руйнування сталі 50Г з грубозернистою феритно-перлітною мікроструктурою та нижчою міцністю.

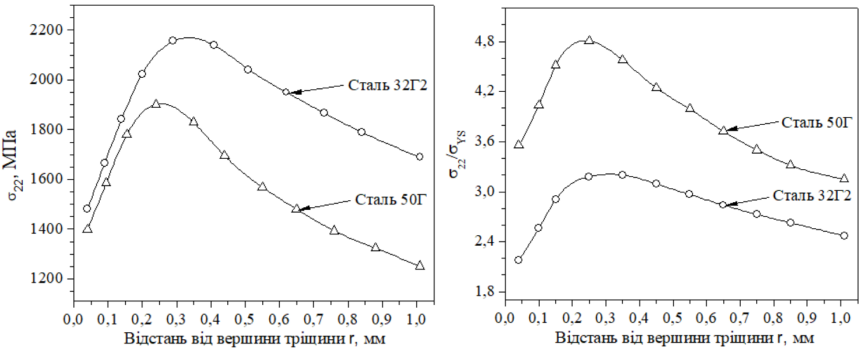


Рис. 1 Розподіл номінальних σ_{22} та нормованих σ_{22}/σ_{YS} напружень перед вершиною тріщини у сталях 32Г2 та 50Г

Отже, моделюванням підтверджено крихкіший механізм руйнування на стадії росту тріщини для грубозернистої сталі 50Г проти дрібнозернистої 32Г2, що узгоджується з експериментальними оцінками механічних властивостей, які пов'язані з різним опором крихкому руйнуванню досліджених сталей.

1. *Mohammed A.I., Oyeneyin B., Atchison B., Njuguna J.* Casing structural integrity and failure modes in a range of well types: a review // J. Nat. Gas Sci. Eng. – 2019. – **68**, article ID 102898. – P. 1–25.
2. *Звірко О.І., Ліпець С., Венгринюк О.І., Дзіоба І.* Оцінка напружено-деформованого стану у вершині тріщини у трубних сталях обсадних труб на основі числового моделювання // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2022. – **58**, № 4. – С. 32–36.
3. *Zvirko O., Tsyrulnyk O., Lipiec S., Dzioba I.* Evaluation of corrosion, mechanical properties and hydrogen embrittlement of casing pipe steels with different microstructure // Materials. – 2021. – **14**, № 24. – 7860. – P. 1–17.

ASSESSMENT OF SUSCEPTIBILITY OF PIPE STEELS TO BRITTLE FRACTURE AT THE STAGE OF CRACK GROWTH

The stress-strain state at the crack tip for specimens made of pipe steels with different microstructure was analysed. The finite element method was used for the simulation of the specimen with crack, and the true stress-strain curves of the steels were used for calculations. A higher susceptibility to crack growth by the brittle mechanism was confirmed by the simulations for the coarse-grained steel with lower strength compared with the other one.

УДК 539.3

ЗМІШАНА СХЕМА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ОБЛАДНАННЯ АЕС

Сергій Кобельський

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

harry-ksv@ukr.net

Забезпечення умов безпечної експлуатації атомних енергетичних установок, зокрема, корпусів реакторів (КР), як найбільш важливих їх елементів – одне з важливих науково-практичних завдань. Одним із перспективних шляхів вирішення цього завдання є математичне моделювання кінетики термомеханічного стану КР, що потребує розв'язання нестаціонарних нелінійних крайових задач механіки непружного деформування. Розрахункове обгрунтування міцності КР проводиться на основі аналізу визначальних величин параметрів механіки руйнування – коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

В Інституті проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України запропоновано та теоретично обґрунтовано змішану проекційно-сіткову схему методу скінченних елементів (ЗМСЕ) підвищеної точності [1]. Схема реалізована у розрахунковому коді **SPACE-RELAX**, який за розпорядженням НАЕК «Енергоатом» № 124-р від 12.02.2010 включений до переліку розрахункових кодів, дозволених до використання для обгрунтування безпеки ядерних енергетичних установок.

Визначення локальних параметрів механіки пружно-пластичного руйнування грунтується на використанні концепцій J– і G–інтегралів.

Для розв'язання крайових задач в тривимірній постановці у рамках ЗМСЕ розроблені нові просторові змішані скінченні елементи на основі шестигранної 8-вузлової призми та тетраедру, з апроксимацією переміщень за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин елементів, а напружень і деформацій – за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин, центрів та додаткових внутрішніх точок елементів [2, 3]. Запропоновані елементи тестувались на задачах, які мають теоретичні або відомі чисельні розв'язки.

Розроблено тривимірні моделі фрагментів об'єктів з вбудованими тріщинами, які дозволили будувати сітки скінченних елементів в околі тріщини

з кроком порядку 10 мкм і менше.

Теоретичні положення та створене на їх основі програмне забезпечення використано для моделювання кінетики напружено-деформованого стану та проведено розрахунки опору руйнуванню КР ВВЕР-1000 за режимів термошоку для зон зварювальних з'єднань та зони вхідних патрубків, а також вузла з'єднання колектора з патрубком корпусу парогенератора ПГВ-1000М з урахуванням комбінованого дефекту у вигляді напівеліптичної тріщини в поєднанні з протяжною канавкою корозійного походження, під час проведення робіт з обґрунтування подовження строків служби енергоблоків АЕС України.

1. *Чирков А.Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – К.: Изд-во Ин-та пробл. прочности, 2003. – 250 с.
2. *Кобельський С.В.* Чисельний аналіз просторових задач теорії тріщин на основі змішаної схеми метода скінченних елементів. – Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 88. – К.: КНУБА, 2011. – С. 147–156.
3. *Kobelsky S.V.* Numerical Calculations of Stress-Intensity Factors for a WWER-1000 Reactor Pressure Vessel under a Pressurized Thermal Shock // Materials and Technology. – 2013. – № 6. – P. 825–830.

MIXED SCHEME OF FINITE ELEMENTS IN THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS ELEMENTS OF NPP EQUIPMENT

Based on the mixed projection-mesh scheme of finite element method, the new three-dimensional finite elements are proposed, which allowed to use the scheme to solve three-dimensional problems of incremental plasticity.

Two methods of determination of stress intensity factors based on calculations of J– and G–integrals are analyzed for the simulated emergency cooling regime of WWER-1000 reactor pressure vessel. The finite element analysis of the convergence of results for determining the stress intensity factors using different approaches and different finite element meshes is done.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

Леонід Хорошун, Олена Шикула, Наталія Жукова

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

ensh@ukr.net, zhukova_n@ukr.net

При досить високих навантаженнях багато композитних матеріалів мають нелінійний характер залежностей між макронапруженнями та макродеформаціями внаслідок наявного деформування компонентів. Такий вид нелінійності притаманний композитам, отриманим на основі пластичної металевої матриці, а також на основі полімерів при підвищених температурах. Експериментальні дослідження показують [1], що при досить високих температурах нелінійно деформуються також високомодульні матеріали типу скловолокон. Тому актуальним є дослідження деформування композитних матеріалів при нелінійному деформуванні як матриці, так і волокон.

Розглянемо односпрямований волокнистий композитний матеріал з нелінійними ізотропними компонентами, який знаходиться в умовах однорідних макродеформацій. Тоді залежності між напруженнями σ_{ij} та деформаціями ε_{ij} можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (\lambda = K - 2\mu/3; \quad i,\ j,\ p = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

де модулі об'ємного стиску K і зсуву μ – випадкові функції координат, які приймають значення відповідно K_1, μ_1 і K_2, μ_2 для волокон і матриці. При цьому об'ємні деформації компонентів є лінійними, тобто модулі об'ємного стиску K_1, K_2 не залежить від деформацій, а зсувні деформації описуються нелінійними діаграмами.

На основі рівнянь рівноваги, співвідношень Коші та залежностей (1) приходимо до фізично та статистично нелінійних рівнянь рівноваги відносно переміщень u_i:

$$\lambda(u^0_{r,r})_{,k} + [\mu(u^0_{k,r} + u^0_{r,k})]_{,r} = -(\lambda < \varepsilon_{pp} > \delta_{kl} + 2\mu < \varepsilon_{kl} >)_{,l},$$

$$(\mu(u^0_{3,r})_{,r} = -(2\mu < \varepsilon_{k3} >)_{,k} \qquad (k,\ l,\ r = 1,\ 2,\ \ p = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Усереднюючи співвідношення (1), отримуємо вирази для середніх напружень у вигляді

$$< \sigma_{ij} >= c_1\lambda_1 < \varepsilon^1_{pp} > \delta_{ij} + c_2\lambda_2 < \varepsilon^2_{pp} > \delta_{ij} + 2c_1\mu_1 < \varepsilon^1_{ij} > +2c_2\mu_2 < \varepsilon^2_{ij} > . \tag{3}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_26.pdf

Скориставшись функцією Гріна, рівняння (2) можна привести до інтегральної форми. За допомогою методу умовних моментів Л.П. Хорошуна [2], усереднюючі ці рівняння за умовною щільністю (густиною), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно середніх деформацій компонентів. Визначивши їх з цієї системи і підставивши в співвідношення (3), отримаємо залежності між макронапруженнями $<\sigma_{pq}>$ і макродеформаціями $<\varepsilon_{pq}>$. При цьому ефективні деформативні характеристики композиту будуть функціями макродеформацій $<\varepsilon_{pq}>$.

Розв’язок наявної системи нелінійних рівнянь будуємо ітераційним методом. При цьому припускаємо, що нелінійні діаграми деформування волокон та матриці при малих деформаціях мають лінійні ділянки, яким відповідають модулі зсуву відповідно $\mu_1(0)$ і $\mu_2(0)$.

На основі отриманих залежностей було досліджено ефективні діаграми нелінійного деформування волокнистого композиту при різних об’ємних концентраціях компонентів та вивчено вплив нелінійності на деформування композиту. Встановлено, що фізична нелінійність компонентів матеріалу істотно впливає на характер діаграм деформування для всіх значень об’ємного вмісту волокон.

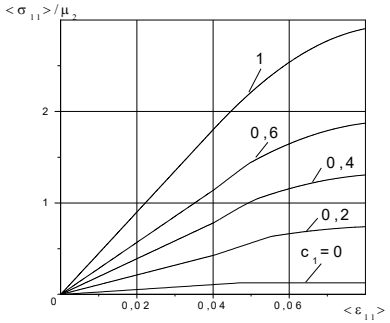


Рис. 1

1. *Вулф Б.К., Ромадин К.П.* Авиационное материаловедение. – М.: Машиностроение, 1967. – 422 с.
2. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of physically nonlinear stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2016. – **44**. No. 12. – P. 1325–1351.

THE MODEL OF NONLINEAR DEFORMATION OF FIBER COMPOSITES

A deformation model for fibrous composite materials with nonlinear components is proposed, algorithm for determining the effective deformation properties and the stress-strain state is constructed, and the influence of nonlinearity on the deformation of the composite is investigated.

УДК 539.3

ПРО ОДНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Юрій Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

gluchov.uriy@gmail.com

Метою роботи є постановка і розв'язок динамічних задач для різних моделей попередньо напруженої шаруватої основи, розробка методів, побудова алгоритмів та створення програмного забезпечення для розв'язання задач даного класу.

В даній роботі розглядається попередньо напружений півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару під довільним кутом α протягом великого проміжка часу. Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1.

Дослідження були проведені у рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1]. Розв'язок задачі отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Розв'язок в просторі зображень Фур'є представлений в загальному вигляді для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних матеріалів елементів багатошарового середовища, умов їх сполучення і для довільної швидкості руху поверхневого навантаження.

Аналітичні результати свідчать, що напружено-деформований стан попередньо напруженого нестисливого півпростіру з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару залежить від механічних параметрів поверхневого шару і півпростору, способу їх сполучення, швидкості руху навантаження, початкових напружень і координат точки, що розглядаються.

Чисельні дослідження проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій для матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича [1]. При розрахунках вважаємо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє.

Як приклад на рис. 1 і 2 показаний розподіл узагальненого напруження $\tilde{Q}_{22}$ в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $\mathrm{v}^2 = 0{,}1c_0^2$. Тут c_0 – швидкість поперечних хвиль у півпросторі без початкових напружень. Криві 1,.2, 3, 4 і 5 на рис. 1 і 2 відповідають значенням $\lambda_1 = 0{,}8$, $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1{,}1$ і $\lambda_1 = 1{,}2$. Рис. 1 стосується жорсткого контакту між поверхневим шаром і пів-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_27.pdf

простором, а рис. 2 − нежорсткого контакту. Решта основних параметрів мають значення: $\rho/\rho_1 = 0,25$; $\alpha = \pi/2$, де ρ − густина матеріалу півпростору.

Досліджувались також швидкості навантаження в діапазонах $v < c_1$ і $v > c_1$. Тут c_1 – швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі Oy_1 в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями. У випадку, коли $v < c_1$, досліджено тільки докритичні швидкості навантаження [2].

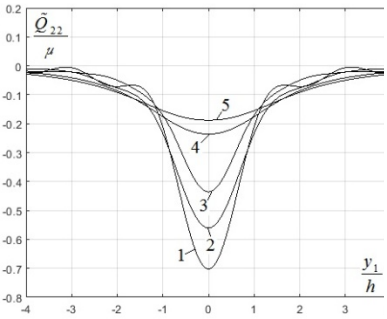


Рис. 1

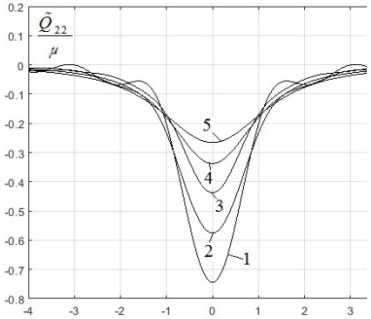


Рис. 2

Аналіз отриманих числових результатів для докритичних швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки. При заданих початкових напруженнях темп росту значень величин, що досліджується, при стискуванні більший, ніж при розтягуванні. Загасання на відстані від точки прикладання навантаження відбувається повільніше при стискуванні, ніж при розтягуванні. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки. Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій. Зі збільшенням швидкості руху навантаження вплив початкових напружень значно посилюється. Особливо це має місце для матеріалу, що попередньо стиснений.

3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К», 2004. – 672 с.
4. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.

ABOUT ONE DYNAMIC PROBLEM FOR AN INCOMPRESSIBLE HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES

A planar problem about the influence of a moving load on an incompressible half-space with inhomogeneity in the form of a thin surface layer is considered. The stress-strain state of the base for the cases of unequal and equal roots of the characteristic equations, for different materials of the surface layer and half-space, the conditions of their connection, and for any speed of the surface load movement was studied.

УДК 531.36, 531.38

МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАННЯ ПРУЖНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Юрій Кононов

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Розглянута задача про моделювання обертання вільного пружного твердого тіла у вигляді системи двох і трьох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа у середовищі з опором. Динамічно симетричні тверді тіла S_i і S_{i+1} пов'язані в точці O_i пружним відновлювальним шарніром Гука. Тверде тіло S_i $(i=\overline{1,3})$ знаходиться під дією дисипативного моменту $\boldsymbol{M}_i = D_i\boldsymbol{\omega}$ ($D_i = \operatorname{diag}\left(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3}\right)$, $D_{ij} > 0$, що моделює середовище з опором, і дією постійного моменту $\boldsymbol{M}_{iq} = Q_i \boldsymbol{e}_3^i$, який спрямований вздовж осі симетрії тіл S_i і підтримує їх рівномірне обертання. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердих тіл S_i; $s_i = O_iO_{i+1}$; m_i, $c_i = O_iC_i^*$ і C_i^* – маса і центр мас тіла S_i $(i=\overline{1,3})$.

На основі роботи [1] характеристичне рівняння збуреного руху трьох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа має вигляд:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1\lambda^2 - k_1 & \mu_2\lambda^2 \\ \mu_1\lambda^2 - k_1 & F_2 & \mu_3\lambda^2 - k_2 \\ \mu_2\lambda^2 & \mu_3\lambda^2 - k_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\left[a_5\lambda^5 + \left(a_4 + ib_4\right)\lambda^4 + \ldots + \left(a_1 + ib_1\right)\lambda + a_0 + ib_0\right]\lambda = 0\,. \qquad (1)$$

Тут $F_i = A_i'\lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i)\lambda + k_{i-1} + k_i$ ($k_0 = k_3 = 0$), $\tilde{C}_i = C_i\omega_0$, $A_1' = A_1 + m_1m_{23}c_1^2/m$, $A_2' = A_2 + (m_2m_{31}c_2^2 - 2m_2m_3c_2s_2 + m_3m_{12}s_2^2)/m$, $A_3' = A_3 + m_3m_{12}c_3^2/m$, $\mu_1 = m_1c_1(m_2c_2 + m_3s_2)/m$, $\mu_2 = m_1m_3c_1c_3/m$, $\mu_3 = m_3c_3[m_1s_2 + m_2(s_2 - c_2)]/m$, $m = m_1 + m_2 + m_3$, $m_{ij} = m_i + m_j$, $\omega_0 = \left(Q_1 + Q_2 + Q_3\right)/\left(D_{13} + D_{23} + D_{33}\right)$. Наявність нульового кореня в рівнянні (1) відповідає обертанню системи трьох твердих тіл як єдиного цілого твердого тіла.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_28.pdf

На підставі критерію Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді, умови асимптотичної стійкості рівняння п'ятого ступеня (1) відносно квадрата кутової швидкості $x=\omega_0^2$ мають вигляд:

$$I_{32}x+I_{30}>0,\ I_{53}x^3+I_{52}x^2+.I_{51}x+I_{50}>0,$$
$$I_{75}x^5+I_{74}x^4+...+I_{71}x+I_{70}>0,\ I_{96}x^6+I_{95}x^5+...+I_{91}x+I_{90}>0, \quad (2)$$

а умови асимптотичної стійкості відносно коефіцієнта пружності шарніра k_i запишуться так:

$$I_{31}k_i+I_{30}>0,\ I_{53}k_i^3+I_{52}k_i^2+...+I_{51}k_i+I_{50}>0,$$
$$I_{75}k_i^5+I_{74}k_i^4+...+I_{71}k_i+I_{70}>0,\ I_{97}k_i^7+I_{96}k_i^6+...+I_{91}k_i+I_{90}>0 \quad (i=1,2). \quad (3)$$

Характеристичне рівняння збуреного руху двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа має вигляд

$$\left[a_3\lambda^3+\left(a_2+ib_2\right)\lambda^2+\left(a_1+ib_1\right)\lambda+a_0+ib_0\right]\lambda=0, \quad (4)$$

де $A_1'=A_1+\nu c_1^2,\ A_2'=A_2+\nu c_2^2,\ \mu=\nu c_1c_2,\ \nu=m_1m_2/\left(m_1+m_2\right),\quad k=k_1,$ $\mu=\mu_1$, а умови асимптотичної стійкості відносно квадрата кутової швидкості $x=\omega_0^2$ і коефіцієнта пружності шарніру k запишуться:

$$I_{32}x+I_{30}>0,\ I_{52}x^2+.I_{51}x+I_{50}>0,$$
$$I_{31}k_i+I_{30}>0,\ I_{52}k_i^2+I_{51}k_i+I_{50}>0 \quad (i=1,2). \quad (5)$$

Знайдені умови при яких старші коефіцієнти нерівностей (2)–(3) та (5) додатні, розглянуто випадки малих і великих коефіцієнтів пружності шарнірів та випадок однакових твердих тіл. Проведено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості при відсутності дисипації.

Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479).

1. *Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I.* Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, № 5. – P. 605–612.

SIMULATION OF ROTATION IN AN ENVIRONMENT WITH RESISTANCE OF AN ELASTIC RIGID BODY AS A SYSTEM OF ELASTICLY CONNECTED RIGID BODIES

The problem of modeling rotation in a medium with resistance of a free elastic solid body in the form of a system of three and two elastically coupled Lagrangian gyroscopes is considered. Gyroscopes are connected by elastic Hook hinges and are under the influence of dissipative moments and a constant moment, which ensures their uniform rotation. The conditions of asymptotic stability of the uniform rotation of the system of three and two solid bodies have been obtained. Analytical studies of stability conditions based on mass, inertial and elastic parameters of the mechanical system have been carried out. The case of no dissipation is considered.

УДК 531.36, 531.38

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА НА ПІДВІСІ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ

Юрій Кононов, Ярослав Святенко

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, filioeee@gmail.com

Розглянута задача про стійкість рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі у середовищі з опором. Динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром. Тіло S_1 (підвіс) має нерухому точку O_1. Тверди тіла S_i $(i=1,2)$ знаходиться під дією сил тяжіння, а тіло S_2 – під дією дисипативного моменту $\mathbf{M}=D\boldsymbol{\omega}$ $D=\operatorname{diag}(D_1,D_1,D_3)$, $D_j>0$ ($j=1,3$), що моделює середовище з опором, і дією постійного моменту у інерціальній системі відліку $\mathbf{M}_p=P\mathbf{g}$, який підтримує рівномірне обертання тіла S_1. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердих тіл S_1 і S_2, $\mathbf{g}$ – прискорення вільного падіння.

В даній роботі узагальнюються результати [1] на випадок урахування масових та інерційних характеристик підвісу, а також пружності сферичного шарніру. На підставі робіт [2, 3] характеристичне рівняння збуреного руху механічної системи, що розглядається, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} F_1 & k-\mu\lambda^2 \\ k-\mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix}=0,$$

або

$$a_4\lambda^4+(a_3+ib_3)\lambda^3+(\tilde{a}_2+ib_2)\lambda^2+(\tilde{a}_1+ib_1)\lambda+a_0+ib_0=0, \qquad (1)$$

де $F_1=A_1'\lambda^2+(i\tilde{C}_1+D_1)\lambda+a_1g+k$, $F_2=A_2\lambda^2+i\tilde{C}_2\lambda+a_2g+k$, $\tilde{C}_i=C_i\omega_0$, $A_1'=A_1+s_1^2m_2$, $a_1=m_1c_1+m_2s_1$, $a_2=m_2c_2$, $\mu=s_1a_2$, $\omega_0=P/D_3$, $s_1=O_1O_2$, m_i, $c_i=O_iC_i^*$ і C_i^* – маса і центр мас тіла S_i $(i=1,2)$.

На підставі критерію Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді, отримані наступні умови асимптотичної стійкості відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_29.pdf

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0\,, \tag{2}$$

$$I_{56}\tilde{C}_2^6 + I_{55}\tilde{C}_2^5 + \ldots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0\,, \tag{3}$$

$$I_{78}\tilde{C}_2^8 + I_{77}\tilde{C}_2^7 + \ldots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} > 0\,. \tag{4}$$

Проведені аналітичні дослідження отриманих умов стійкості (2)–(4) від основних механічних параметрів системи. Так, у разі виродження підвісу в безмасову і безінерційну струну ($A_1 = C_1 = 0$, $m_1 = 0$) умови стійкості (2)–(4) у безрозмірних змінних статті [3] мають вигляд:

$$k(a+b)^2 > I\xi - ma(a+b)\,, \tag{5}$$

$$I\xi^2 - \left[I + ma(a+b) + \tilde{I}k\right] + mab + (a+b)k/g > 0\,, \tag{6}$$

де $\tilde{I} = \left(I + ma(a+b)^2\right)\Big/ mbg$. За відсутності пружності сферичного шарніра ($k = 0$) характеристичне рівняння (1) збігається з рівнянням роботи [3]. Умова стійкості (6) теж збігається з аналогічною умовою цієї статті, але у роботі [3] відсутня умова (5), яка при $k = 0$ має вигляд $I\xi < ma(a+b)$.

Дослідження частково підтримані грантом EFDS-FL2-08 Європейської федерації академій наук і гуманітарних наук (ALLEA).

1. *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом дисипативного и постоянного моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 53–57.
2. *Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I.* Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, № 5. – P. 605–612.
3. *Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I.* On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of lagrange // Праці ІПММ НАН України. – 2020. – **34**. – С. 50–61.

ON THE STABILITY OF ROTATION IN AN ENVIRONMENT WITH RESISTANCE OF A SUSPENDED LAGRANGE GYROSCOPE UNDER THE ACTION OF A CONSTANT MOMENT

The problem of stability of uniform rotations of a Lagrange gyroscope on a suspension is considered. The mass and inertial characteristics of the suspension and the elasticity of the spherical hinge are taken into account. The conditions for asymptotic stability are obtained in the form of a system of three inequalities, and their analytical studies are carried out depending on the parameters of the mechanical system. The case of degeneration of the suspension into a string is considered, and the obtained stability conditions are compared with the known ones.

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ТРЬОХ ВАРІАНТІВ ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Ігор Ориняк, Гліб Юдін

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com, glibyudin@gmail.com

Найпоширенішим методом розв'язування задач про деформування циліндричних замкнутих оболонок є розклад невідомих в ряд Фур'є по коловій координаті, що зводить задачу до диференційного рівняння 8-го степеня, яке містить ненульові коефіцієнти при парних степенях. Його власні функції можуть бути представлені так [1]:

$$F_{1,2,3,4}(x) = e^{\mp a_n x}\begin{cases}\cos b_n x\\ \sin b_n x\end{cases},\quad \Phi_{1,2,3,4}(x) = e^{\mp c_n x}\begin{cases}\cos d_n x\\ \sin d_n x\end{cases}. \qquad (1)$$

Тобто вони характеризуються набором із чотирьох констант, значення яких в літературі представлені лише для спеціальних формулювань теорії оболонок.

Нами запропонований загальний підхід, що зводить зв'язану задачу оболонок до двох окремих відносно простих біквадратних задач – теорії пластин і теорії плоского тіла. Коли розглядається одна з них, то вважається, що власні числа визначаються лише нею (її біквадратним рівнянням), а друга задача використовується, щоб знайти лише її частковий розв'язок за відомого розв'язку першої задачі (права частина). Цей частковий розв'язок подається у вигляді лінійних комбінацій параметрів першої задачі, підставляється в першу задачу, де уточнюються коефіцієнти диференційного рівняння. Це приводить до ітераційного уточнення 4 власних функції $F_i(x)$ першої задачі. Аналогічно ітераційно отримуються власні функції $\Phi_i(x)$, коли, як основна, розглядається друга задача.

Розглядаються відмінності деяких популярних теорій, де в якості кривизн беруться вирази, наведені в Таблиці 1. Використовується: w, v та u – радіальне, колове та поздовжнє переміщення, R – радіус оболонки.

Таблиця 1 Три популярні варіанти запису кривизн в теорії оболонок

кривини	Теорія 1	Теорія 2	Теорія 3
χ_x	$-\partial^2 w/\partial x^2$	$-\partial^2 w/\partial x^2$	$-\partial^2 w/\partial x^2$
χ_ϕ	$-\partial^2 w/(R^2\partial\phi^2)+\partial v/(R^2\partial\phi)$	$-\partial^2 w/(R^2\partial\phi^2)-w/R^2$	$-\partial^2 w/(R^2\partial\phi^2)-w/R^2$
$\chi_{x\phi}$	$-2\partial^2 w/(R\partial\phi\partial x)+R^{-1}\partial v/\partial x$	$-2\partial^2 w/R\partial\phi\partial x-R^{-2}\partial u/\partial\phi+R^{-1}\partial v/\partial x$	$-2\partial^2 w/(R\partial\phi\partial x)$

Метод зручний тим, що не лише дає всі 8 власних функцій для різних варіантів теорії оболонок, але і дозволяє легко в процесі розв'язування визначати співвідношення між різними параметрами. Тобто, результатом є не лише власні функції, а і власні форми для всіх переміщень, кутів, сил і моментів.

Для демонстрації ефективності методу розглядається фундаментальна проблема дії зосередженої радіальної сили. Відомо, що така сила може бути розкладена в ряд Фур'є по коловій координаті, що зводить задачу до розгляду навантажень виду:

$$P_n(x,\varphi) = 2\delta(x)\cos(n\varphi) \tag{2}$$

Тут $\delta(x)$ є функція Дірака, а число n є круговою модою. Проведений розрахунок при різних n та відношеннях R/h, де h – товщина оболонки, показав, що найбільші відмінності спостерігаються при зменшенні відношення R/h. Тому нижче наведені результати тільки при $R/h = 20$. Результати порівнювалися між собою (для різних теорій) і результатами, отриманими нами раніше [2] при застосуванні різних методів аналітико-чисельного розв'язування диференційного рівняння 8-го степеня. Отримано, що подеколи (при великих значеннях n) значні відмінності між коефіцієнтами в рівнянні (1) [2] незначно проявляються в графіках розподілу радіальних переміщень та згинального моменту. Тому, звичайно, доцільніше порівнювати максимальні значення фізичних параметрів. Такі нормалізовані [2] значення в точці прикладення сили наведені в Таблиці 2 при $R/h = 20$.

Таблиця 2 Значення переміщень $w(0)$ та осьових моментів $M_x(0)$

n	$w(0)$			$M_x(0)$		
	Теор 1	Теор 2	Теор 3	Теор 1	Теор 2	Теор 3
2	1,864436	1,868084	1,857412	1,47831	1,47797	1,47496
5	0,194064	0,194338	0,193662	1,32397	1,32483	1,32187
10	0,026325	0,026338	0,026308	0,74276	0,7430	0,74241
20	0,003286	0,003286	0,003285	0,37378	0,37384	0,37375

Очевидно, що для практики вказані теорії є майже однаковими.

1. *Holand I.* Design of Circular Cylindrical Shells. Oslo University Press, Oslo, 1957.
2. *Orynyak I., Bai Y.* Coupled approximate long and short solutions versus exact Navier and Galerkin ones for cylindrical shell under radial load // Thin-Walled Structures. – 2022. – **170**. – 108536.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THREE VARIANTS OF THIN CYLINDRICAL SHELLS

We propose the decoupling iterative procedure for coupled problems on example of cylindrical shell, which is composed from plane task of elasticity and plate problem. The goal is to derive the eigenfunctions for different variants of shell problem. The comparison of fundamental solutions for radial point force reveals the very small difference between them, both for displacements and bending moments.

УДК 539.3

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРА В ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ

Наталя Вайсфельд, Юрій Процеров, Андрій Толкачов

Лондонський королівський коледж,
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова

natalya.vaysfeld@kcl.uc.ua, protserov@onu.edu.ua, andr.tolkach@gmail.com

В циліндричній системі координат розглядається пружний півнескінченний циліндр $0 \le r \le a, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z < \infty$, який розташовано у пружному півпросторі $0 \le r \le \infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z < \infty$. Модуль зсуву та швидкість поперечних хвиль у пружному півпросторі ($i = 0$) та пружному циліндрі ($i = 1$) дорівнюватиме G_i, $c_i, i = 0,1$ відповідно. Між циліндром та півпростором наявні умови ідеального механічного контакту. Вважається, що до основи циліндра $z = 0$ прикладено осесиметричне дотичне навантаження кручення, яке гармонічно змінюється за часом. Потрібно визначити хвильові поля циліндра та півпростору, які описано диференціальними рівняннями кручення

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}u_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial\zeta^2} = -\chi_i{}^2 u_i, \\ &i = 1 : 0 \le \rho < 1, 0 < \zeta < \infty, \\ &i = 0 : 1 < \rho < \infty, 0 < \zeta < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

де $u_j = u_j(\rho,\zeta), j = 0,1$, $\chi_i^2 = a^2\omega^2 c_i^{-2}$, $j = 0,1$, $\rho = ra^{-1}, \zeta = za^{-1}$ – переміщення точок півпростора та циліндра відповідно у безрозмірних координатах, ω – частота коливань (множник $e^{i\omega t}$ тут і далі опущено). Крайові умови на основах півпростору та циліндру подано співвідношеннями:

$$\tau^1_{\zeta\varphi}\Big|_{\zeta=0} = \frac{G}{a}\frac{\partial u_i}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = g(\rho), \tau^0_{\zeta\varphi}\Big|_{\zeta=0} = \frac{G_0}{a}\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = 0 \tag{2}$$

де $g(\rho)$ – задане навантаження. Умови спряження на поверхні контакту мають вигляд

$$u_1\big|_{\rho=1} = u_0\big|_{\rho=1}, \tau_{\rho\varphi}\big|_{\rho=1} = \tau^0_{\rho\varphi}\big|_{\rho=1} = f(\zeta), \tag{3}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_31.pdf

де $f(\zeta)$ – невідома функція.

За допомогою півнескінченного cos– перетворення Фур'є

$$\langle u_{i\alpha}(\rho), f_\alpha \rangle = \int_0^\infty \langle u_i(\rho,\zeta), f(\zeta) \rangle \cos\alpha\zeta d\zeta$$

поставлена задача (1)-(3) зводиться до одновимірних крайових задач, розв'язок яких має вигляд

$$u_{1\alpha}(\rho) = \frac{aI_1(q_1\rho)}{G_1 q_1 I_2(q)} f_\alpha + \frac{a}{G_1}\int_0^1 \left[\Phi_\alpha(\rho,\eta) - \frac{K_2(q)}{I_2(q)} I_1(q_1\rho) I_1(q_1\eta) \right] g(\eta)\eta d\eta,$$

$$u_{0\alpha}(\rho) = -\frac{aK_1(q_0\rho)}{G_0 q_0 K_2(q_0)} f_\alpha, \text{ де } \Phi_\alpha(\rho,\eta) = -\begin{cases} I_1(q_1\eta)K_1(q_1\rho), 0 \le \eta < \rho \le 1 \\ I_1(q_1\rho)K_1(q_1\eta), 0 \le \rho < \eta \le 1 \end{cases}$$

$q_1 = \sqrt{\alpha^2 - \chi_1^2}, q_0 = \sqrt{\alpha^2 - \chi_0^2}$, $I_n(x), K_n(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

З умови спряження знайдемо трансформанту шуканої фінкції $f(\zeta)$:

$$f_\alpha = \frac{q_0 K_2(q_0)}{q_0 I_1(q_1) K_2(q_0) + G^* q_1 I_2(q_1) K_1(q_0)} M(q_1), M(q_1) = \int_0^1 g(\eta) I_1(q_1\eta)\eta d\eta,$$

$G^* = G_1 G_0^{-1}$. Підстановка трансорманти f_α у вирази для переміщень та застосування подальшого оберненого перетвореняя Фур'є завершує побудову формул переміщень. Точні розв'язки містять інтеграли від багатозначних функцій. Для їх обчислення пропонується схема контурного інтегрування [1].

Аналогічні подання отримано для переміщень $u_j(\rho,\zeta), j = 0,1$.

1. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 281 с.

EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM ON TORSIONAL OSCILLATIONS OF A CYLINDER IN AN ELASTIC HALF-SPACE

An elastic semi-infinite cylinder is located in an elastic half-space with another shear module and speed of transverse waves. Ideal mechanical contact conditions are executed a long the cylindrical surface. It is assumed that an axisymmetric tangenti al torsional load is applied to the base of the cylinder and varied harmonically with time. It is necessary to determine the wave field of the cylinder and half-space. The method of Fourier's transforms is applied to the boundary valued problem. The solution is constructed in obvious form. It allows to investigate the stress field of cylinder and external matrix on a load's frequency, type of load and ratio of wave's speeds.

УДК 539.3

АНАЛІЗ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ 3D БАЛОК МЕТОДОМ БАЗОВИХ ХЕЛІКСНИХ ДІЛЯНОК

Ігор Ориняк, Костянтин Кулик, Роман Мазурик

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com, kostya.kulik@gmail.com, r.mazuryk.ua@gmail.com

Дана робота є продовженням досліджень авторів по геометрично нелінійному (ГН) аналізу балок [1], де запропоновано метод розривних базових і згладжувальних поправочних рішень. Базовим рішенням в роботі [1] для плоских тіл є елемент кругової дуги певних змінених довжини і кривизни, в яку «вмонтовані» відповідні значення згинального моменту та осьової сили. Базове рішення є основою методу, адже в основному враховує ГН та створює систему координат і векторів, відповідно до яких розраховується поправочний (малий геометрично лінійний) розв'язок.

Мета даної роботи – створення подібної загальної методології розв'язування ГН задач для 3D балок, основною складовою якої є базовий розв'язок у вигляді елемента хелікса (гвинтової лінії). Ця робота стосується спрощеного розв'язування задач, де, власне, можна застосувати лише базовий розв'язок. Вважається, що кожна елементарна ділянка розбиття балки (елемент) може бути представлена як хелікс, що характеризується: а) набором початкових (в першій точці елемента) природних (як геометричної лінії) векторів $\vec{t}_{0,i}$, $\vec{n}_{0,i}$, $\vec{\beta}_{0,i}$, а також матеріальних векторів (прив'язаних до характерного січення балки) $\vec{t}_{0,i}$, $\vec{\xi}_{0,i}$, $\vec{\eta}_{0,i}$; б) заданими геометричними характеристиками хелікса – його кривизною K та скрутом T, які обчислюються через відомі зовнішні моменти, приведені до напрямків матеріальних векторів:

$$\vec{\beta}K = -\frac{M_\eta}{EI_\eta}\vec{\eta} + K_0\vec{\eta} - \frac{M_\xi}{EI_\xi},\ K^2 = \left(K_0 - \frac{M_\eta}{EI_\eta}\right)^2 + \left(\frac{M_\xi}{EI_\xi}\right)^2,\ T = T_0 - \frac{M_t}{GJ}. \quad (1)$$

Умовою спряження двох елементів є рівність матеріальних векторів. Що стосується положення відносно першої точки A кожної точки B елемента, включно з останньою точкою, то воно знаходиться з формули [2]:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{K^2\sin\phi}{H^3} + \frac{T^2\phi}{H^3}\right)\vec{t}_{0,i} + \frac{K}{H^2}(1-\cos\phi)\vec{n}_{0,i} + \left(\frac{-KT\sin\phi}{H^3} + \frac{KT\phi}{H^3}\right)\vec{\beta}_{0,i}. \quad (2)$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_32.pdf

А направлюючі природні (аналогічно матеріальні) вектори – за формулою [3]:

$$\begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{\beta}(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{H^2} \begin{pmatrix} K^2\cos\phi + T^2 & HK\sin\phi & -KT\cos\phi + KT \\ -HK\sin\phi & H^2\cos\phi & TH\sin\phi \\ -KT\cos\phi + KT & -TH\sin\phi & K^2 + T^2\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}_{0,i} \\ \vec{n}_{0,i} \\ \vec{\beta}_{0,i} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Розглядалися наступні приклади застосування методу:

1) формування ідеального хелікса з початково прямого стержня при спеціально підібраних граничних умовах і системі зовнішніх сил (момент і сила), що прикладені в заданому напрямку. Результати досить швидко сходяться до правильного розв’язку за довільної кількості елементів. Навіть одного елемента достатньо, щоб за 10-15 ітерацій отримати ідеальний хелікс.

2) відома задача Бате, де защемлена зліва балка, що являє собою чверть кола, навантажується перпендикулярною до площини силою. Результати подані на рис. 1 і в Таблицях 1-2. Ці результати ідеально збігаються з відомими з літератури, а зміна кількості ділянок розбиття з 10 до 100 уже не впливає на точність.

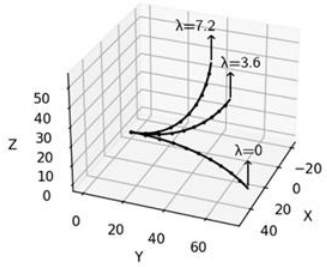


Рис. 1 Деформація балки силою

Таблиця 1 Координати кінця (Бате)

$\boldsymbol{\lambda}$	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
0	29.3	70.7	0.0
3.6	22.2	58.8	40.2
7.2	15.6	47.1	53.6

Таблиця 2 Координати кінця (наближення 10 елементами)

$\boldsymbol{\lambda}$	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
0	29.289	70.711	0.0
3.6	22.214	58.829	40.062
7.2	15.636	47.237	53.295

1. *Orynyak I., Mazuryk R., Orynyak A.* Basic (discontinuous) and smoothing up (conjugated) solutions in transfer matrix method for static geometrically nonlinear beam and cable in plane // Journal of Engineering Mechanics. – 2020. – **46**, No. 5.
2. *Ориняк І.В.* Розрахунки складних систем методом початкових параметрів [Електр. ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика» / Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 252 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48744

ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR DEFORMATION OF 3D BEAMS BY THE METHOD OF BASIC HELICAL ELEMENTS

This work lays the foundation for an efficient method of 3D GN calculation with application of basic helical elements. It is characterized by the “built-in” values of forces and moments which produce the ideal helix. The notions of natural as well as the material basic vectors are introduced, and expressions for the basic vectors and point position change within each helical element are given. The well-known 3D Bathe test and Kirchgoff test of creation of ideal helix from the initial straight rod shows the high efficiency of the method.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ЇХ МАГНІТОІМПУЛЬСНІЙ ОБРОБЦІ

Роман Мусій, Наталія Мельник, Стефан Моринь, Адріан Торський

Національний університет «Львівська політехніка»,
Політехніка Опольська,
Комплекс загальноосвітніх шкіл № 1 у Сендзєйовіцах (Польща),
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

roman.s.musii@lpnu.ua, nataliia.b.melnyk@lpnu.ua,
s.moryn@po.edu.pl, adrian.r.torskyi@lpnu.ua

Електропровідні трубчасті елементи мають широке застосування у енергетичному та атомному машинобудуванні, в авіаційній та космічній техніці, суднобудуванні. Ці елементи в процесі їх експлуатації перебувають в складних умовах динамічного навантаження під дією екстремальних температур, високих тисків, сильних електромагнітних полів (ЕМП) та радіації. Для їх попередньої технологічної обробки з метою покращення функціональних параметрів часто використовують магнітоімпульсну обробку (дією електромагнітних імпульсів) [1, 2]. У літературі [3, 4] відомі дослідження термонапруженого стану трубчастих елементів за нестаціонарних силових і теплових дій. Термопружний стан електропровідних тіл при індукційному нагріві усталеними і квазіусталеними електромагнітними полями розглянуто у монографіях [5, 6]. Дослідженню термомеханічної поведінки електропровідної пластини за дії електромагнітних імпульсів різної тривалості присвячена праця [7]. Однак закономірності термомеханічної поведінки трубчастих елементів за дії імпульсних ЕМП вивчені недостатньо. Тому для оптимізації режимів магнітоімпульсної обробки (МІО) [8] електропровідних трубчастих елементів має важливе значення прогнозування їх термомеханічної поведінки за дії імпульсних ЕМП з метою покращення технологічних параметрів.

У даній роботі запропонована фізико-математична модель для дослідження термомеханічного поведінки та працездатності електропровідних трубчастих виробів, як конструктивних елементів, при їх технологічній обробці за допомогою електромагнітних імпульсів. Сформульована початково-крайова задача термомеханики для довгого порожнистого електропровідного циліндра, як базового модельного елемента. За ключові функції вибрані осе-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_33.pdf

симетрична компонента вектора напруженості магнітного поля, температура і радіальна компонента вектора переміщення. Для визначення цих функцій записані системи вихідних рівнянь і співвідношень. Для побудови розв'язків сформульованих початково-крайових задач для визначення параметрів електромагнітного поля, температури і напружень використано кубічну апроксимацію розподілів за радіальною змінною всіх ключових функцій: осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури та радіальної компоненти вектора переміщень.

У результаті вихідні початково-крайові задачі на ключові функції зведено до задач Коші на інтегральні за радіальною змінною характеристики цих функцій. З використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і заданих початкових умов записано вирази всіх ключових функцій за однорідної нестаціонарної електромагнітної дії. Чисельно проаналізовано термомеханічну поведінку розглядуваного трубчастого елемента при його обробці електромагнітними імпульсами мікро- та мілісекундної тривалості. Встановлено граничні значення параметрів електромагнітних мпульсів, за яких трубчастий елемент зберігає працездатність як конструктивний елемент.

1. *Herlah F.* Pulsed Magnets // Rep. Prog. Phys. – **62(6)**. – 1989. – P. 859–920.
2. *Shneerson G.A., Dolotenko M.I., Kryvosheev S.I.* Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Fields Generation. – De Jruyter, 2010.
3. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of elasticity. – Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1970. – 567 p.
4. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. - Киев: Наук. думка, 1976. – 311 с.
5. *Подстригач Я.С., Буряк Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.* Термоупругость электропроводных тел. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.
6. *Гачкевич А.Р.* Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
7. *Hachkevych O.R., Musii R.S., Melnyk N.B., Dmytruk V.A.* Dynamic thermoelastic processes in a conductive plate under the action of electromagnetic pulses of microsecond and nanosecond durations // Journal of Thermal Stresses. – 2019. – Vol. 42, iss. 9. – P. 1110–1122.
8. *Asai S.* Electromagnetic Processing of Materials. – Springer, Netherlands, 2012.

MATHEMATICAL MODELING OF THE THERMAL STRESS STATE OF ELECTROCONDUCTIVE TUBULAR ELEMENTS DURING THEIR MAGNETO-IMPULSE PROCESSING

A physical and mathematical model is proposed to study the thermomechanical behavior and performance of electrically conductive tubular products as structural elements during their technological processing using electromagnetic impulses. The thermomechanical behavior of the tubular element under consideration is numerically analyzed during its processing by electromagnetic impulses of micro- and millisecond duration. The limit values of the parameters of electromagnetic impulses, at which the tubular element retains its efficiency as a structural element, are established.

УДК 539.3

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ТЕРМО-ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ МАТЕРІАЛУ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ

Павло Стеблянко, Олександр Петров, Юрій Черняков

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

caf-vmi@ukr.net

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестаціонарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженнями і деформаціями. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформування. У загальному випадку значення деформацій є функціями процесу зміни напружень і температури, які визначаються характеристиками всього попереднього процесу зміни фізичних факторів, а не тільки поточними значеннями. Докладні відомості з цього питання можна знайти в роботі [1].

Тензор повної деформації будемо представляти як суму пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичної деформації і деформації, яка викликана температурними змінами. Пружні деформації визначаються за допомогою закона Гука. Деформації викликані температурними змінами задовольняють закону лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході будемо визначати за допомогою функції $f_\gamma(\sigma_{ij}) = 0$, яка дає межі поверхні в просторі напружень. При переході через границю цієї поверхні стрибком зростає деформація, обумовлена фазовими переходами. Конкретний вид цієї поверхні наведено в роботах [2, 3]. Пластичні деформації мають задовольняти співвідношення теорії пластичності, яка застосовується. Проведено узагальнення відомих фізичних співвідношень на випадок термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Це теорія течії, теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни та інші. Наведено конкретні приклади запису таких співвідношень.

Як встановлено в експериментальних дослідженнях, поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. У запропонованому дослідженні сформульована нелінійна феноменологічна модель для опису властивостей матеріалу саме в точці. Деформація в

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_34.pdf

точці представляється у вигляді суми пружної складової; стрибка деформації при фазовому переході; пластичної деформації, яка підпорядковується теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням; деформації, викликаної температурними змінами. При цьому передбачалося, що властивості матеріалу залежать від температури. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася діаграма пружного матеріалу, що складається з трьох нелінійних ділянок.

Таке трактування теорії призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і для опису термомеханічної поведінки зразків різної форми вимагає розв'язання граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації перетворення. При цьому необхідно врахувати не тільки температуру навколишнього середовища, але і тепло, яке виділяється в зразку при фазовому переході. Запропонований підхід дозволив описати ряд експериментальних даних при різних формах зразків і умовах навантаження, включаючи циклічне температурне і силовий вплив. Отримано конкретні залежності для механічних параметрів. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

1. *Steblyanko P., Shevchenko Yu.* Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems // Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal-Plasticity. – Problems, ETS-Encyclopedia of Thermal Stresses, Shpringer Verlag, No. 7, 2014. – P. 630–636.
2. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Evolution of phase transitions. – Cambridge University Press, 2006. – 258 p.
3. *Steblyanko P., Chernyakov Yu., Petrov A., Loboda V.* Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading / Structural Integrity, Volume 8. Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019. – P. 205–208.

NONLINEAR MODEL OF THERMOPLASTIC BEHAVIOR OF SHAPE MEMORY ALLOYS

In this report, a nonlinear model is formulated to describe the shape memory properties of a material at a certain point. The deformation at a point is represented as the sum of the elastic component; deformation jump during the phase transition; plastic deformation that obeys the theory of flow with kinematic and translational hardening and deformation caused by temperature changes. It is assumed that the properties of the material depend on the temperature. This interpretation of the theory leads to an unstable stress-strain diagram; Thus, to describe the thermomechanical behavior of samples of different shapes, it is necessary to solve the boundary value problem taking into account the development of the transformation deformation front. In these problems, not only the ambient temperature is taken into account, but also the heat released in the sample during the phase transition.

УДК 539.3

МЕТОД БАЗОВИХ (РОЗРИВНИХ) ТА ПОПРАВОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО АНАЛІЗУ БАЛОК ТА КАНАТІВ

Ігор Ориняк, Роман Мазурик

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com; r.mazuryk.ua@gmail.com

Врахування геометричної нелінійності (ГН) (великих переміщень при малих деформаціях) для аналізу деформування довгих балкових елементів є доцільнішим, ніж зазвичай вважається. Проведення таких обчислень вимагає розробки специфічних методів. По-перше, треба модифікувати розв'язання для розрахункового елементу балки, яке має враховувати: а) зміну його довжини при згині (пов'язану зі зміною кривизни); б) вплив поздовжньої сили на його гнучкість. По-друге, необхідно організувати ітераційний процес уточнення геометрії. Існуючі методи в основному базуються на елементі, що створений відповідно до методології МСЕ, і є розв'язанням варіаційної проблеми в слабкому формулюванні. Що стосується алгоритмів уточнень, то зазвичай беруть правильну початкову геометрію, наприклад, пряму лінію, і дуже повільно змінюють її, тобто довжину та кут між прямими елементами.

В роботах [1, 2] нами запропоновано принципово новий метод розрахунку ГН балково-канатних систем. Ідея методу полягає в наступному. Балка (канат) розбивається на базові елементи, кожен з яких представляється у вигляді ділянки кола, ці елементи не обов'язково неперервно межують один з одним. Кривизна і довжина елемента однозначно пов'язана з уже «вбитими в розв'язок» базовим моментом та осьовою силою – для балкового елементу, відповідно; і з поперечним навантаженням і осьовою силою – для канату. Основне призначення базового елементу – це врахування ГН та переважної частини навантаження і створення криволінійної системи координат для представлення поправочного розв'язку. Повний розв'язок $\vec{U}$ шукається, як сума базового $\vec{B}$ (наближеного, розривного) і поправочного $\vec{C}$ розв'язків:

$$\vec{U} = \vec{B} + \vec{C}\,. \tag{1}$$

Поправочний розв'язок формулюється і розв'язується, як лінійний, що забезпечує неперервність силових (рівняння рівноваги) і деформаційних па-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_35.pdf

раметрів, як всередині елемента, так і на межі між елементами. Отримано ряд таких точних (на відміну від МСЕ) розв'язків, що враховують дію поздовжньої сили (як стискуючої, так і розтягуючої), для диференційних рівнянь 6-го степеня (для балки) та 4-го степеня (для канату). Загалом вони представляються у вигляді, зручному для застосування методу початкових параметрів:

$$\begin{pmatrix} N(s) \\ Q(s) \\ M(s) \\ \theta(s) \\ u(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11},\beta_{12},\beta_{13},\beta_{14},\beta_{15},\beta_{16} \\ \beta_{21},\beta_{22},\beta_{23},\beta_{24},\beta_{25},\beta_{26} \\ \beta_{31},\beta_{32},\beta_{33},\beta_{34},\beta_{25},\beta_{26} \\ \beta_{41},\beta_{42},\beta_{43},\beta_{44},\beta_{45},\beta_{46} \\ \beta_{51},\beta_{52},\beta_{53},\beta_{54},\beta_{55},\beta_{56} \\ \beta_{61},\beta_{62},\beta_{63},\beta_{64},\beta_{65},\beta_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ \theta_0 \\ u_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \hat{P}_n \begin{pmatrix} \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{2n} \\ \varepsilon_{3n} \\ \varepsilon_{4n} \\ \varepsilon_{5n} \\ \varepsilon_{6n} \end{pmatrix} + P_t \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \\ \varepsilon_{5t} \\ \varepsilon_{6t} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де параметрами залачі є осьова та поперечна сили, згинальний момент, кут повороту, поздовжнє та нормальне переміщення; $\hat{P}_n$ є узагальнене (з урахуванням базової сили) поперечне, а P_t – поздовжнє навантаження.

Друга відмінність методу полягає в процедурі уточнення. На наступній ітерації уточнюються положення початків, кривизни і довжини базових елементів з урахуванням поправочних розв'язків. При цьому, використання розривних геометрій і коефіцієнтів прискорення чи сповільнення уточнення базових розв'язків за ознаками того, чи збігається розв'язок (всі параметри змінюються в одному напрямку), чи розбігається (деякі параметри поправочного розв'язку змінюють знак), значно прискорює збіжність методу.

Розглянуто ряд відомих в літературі задач про ГН деформування. Розглядається провис довгого морського райзера, розташованого між пунктом збору нафти і надводною платформою. Показані відмінності і схожості при застосуванні методів теорії балок з використанням різних запропонованих розв'язань і теорії канатів при розгляді різних гнучкостей (на згин) і жорсткості (на розтяг) січення райзера. Відмічається недоліки існуючих тестів в літературі, пропонується ряд задач, що показуть переваги нашого методу.

1. *Orynyak I., Mazuryk R., Orynyak A.* Basic (discontinuous) and smoothing up (conjugated) solutions in transfer matrix method for static geometrically nonlinear beam and cable in plane // Journal of Engineering Mechanics. – 2020. – **46**, No. 5.
2. *Orynyak I., Mazuryk R.* Application of method of discontinuous basic and enhanced smoothing solutions for 3D multibranched cable // Engng Struct. – 2022 – **251,** 113582.

BASIC DISCONTINUOUS AND SMOOTHING SOLUTION FOR GEOMETRICAL NONLINEAR TREATMENT OF BEAM AND CABLE

The ultimate solution is considered as a sum of Basic Solution (BS), and Smoothing one (SS). BS is discontinuous one and contains the basic geometry of element (length and curvature), where basic moment and force are imbedded in. SS is linearized one, which provide continuity and equilibrium. The iteration procedure is described. The examples of calculation which reveal the advantages of the method are shown in abundance.

УДК 539.3

ПОШИРЕННЯ АКУСТОЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЬ У СУЦІЛЬНОМУ НЕОДНОРІДНОМУ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОМУ ЦИЛІНДРІ

Олександр Григоренко, Ігор Лоза, Світлана Сперкач, Анна Безугла

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Національний транспортний університет,
Технічний центр НАН України

ayagrigorenko1991@gmail.com, lozaigor1956@gmail.com,
svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

Кругові циліндричні п'єзокерамічні хвилеводи широко застосовуються в акустоелектроніці. Завдяки властивості п'єзокераміки перетворювати механічну енергію в електричну і навпаки, такі матеріали знаходять застосування в різноманітних областях науки та техніки: випромінювачі та антени в гідроакустиці; стабілізатори частоти в радіотехнічних засобах; електрофільтри та лінії затримки в радіо- і телефонному зв'язку; вимірювальні перетворювачі прискорень, мікродвигуни; для вимірювання рівнів вібрації та акустичної емісії в неруйнівній діагностиці; у якості п'єзотрансформаторів тощо.

Для збільшення довговічності хвилеводних характеристик у багатьох випадках вони мають неоднорідну структуру. Якщо на початку використовувались в основному шаруваті конструкції, то останнім часом в конструкції хвилеводів все частіше використовують функціонально градієнтні п'єзокерамічні матеріали. При цьому коєфіцієнти, які описують фізико-механічні характеристики таких матеріалів є змінними величинами. І механіко-математична модель, яка описує задачу про поширення електроакустичних хвиль в хвилеводі, буде системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінним коєфіцієнтами.

Розв'язок задачі про поширення акустоелектричних хвиль у суцільному циліндрі пов'язаний з необхідністю позбутися невизначеності у сингулярній точці $r = 0$. В науковій літературі представлено розв'язок даної задачі тільки для випадку осьової поляризації п'єзокераміки. Для отримання розв'язку використовується апарат спеціальних функцій. Та функція Бесселя, що містить особливість у вказаній точці $r = 0$, відкидається. Проте для випадку неоднорідного шаруватого циліндра використання даного підходу значно ускладню-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_36.pdf

ється, а для випадку градієнтно неоднорідного матеріалу є просто неможливим. Також, вочевидь, виникнуть значні проблеми, якщо розглядати циліндр з радіальною поляризацією п'єзокераміки. В даній роботі запропоновано підхід, в основі якого лежить розбиття всієї множини точок циліндра на дві підмножини: області $0 < r \le R$ та точки $r = 0$. Для першої області використовується стандартна система рівнянь, як і для порожнистого циліндра, а для того, щоб позбутися невизначеності у сингулярній точці, використовується правило Лопіталя–Бернуллі. В результаті застосування такого підходу ми отримуємо дві системи рівнянь: одну – для регулярних точок і другу – для сингулярної точки. Для однорідного матеріалу циліндра результати чисельного аналізу вказаної задачі повністю збігаються з результатами, отриманими на основі апарату спеціальних функцій. Проте на основі запропонованого підходу ми можемо отримати розв'язок задачі про поширення акустоелектричних хвиль у функціонально градієнтному п'єзокерамічному матеріалі, як для випадку осьової, так і для радіальної поляризації.

Представлено результати чисельного аналізу, як спектральних характеристик поширення вимушених осесиметричних електропружних хвиль, так і відповідних їм форм у суцільному п'єзокерамічному циліндрі з однорідного та неперевно неоднорідного матеріалу в випадку осьової та радіальної поляризації на основі запропонованого дискретноконтинуального чисельно-аналітичного підходу. Розглянуто також вплив електричних граничних умов на поверхні циліндра на вказані характеристики.

PROPAGATION OF AN ACOUSTOELECTRIC WAVES IN A SOLID PIEZOCERAMIC CYLINDER

The propagation of forced axisymmetric waves in a solid inhomogeneous piezoceramic cylinder with axial polarization based on the linear theory of elasticity and the linear electromechanical coupling is investigated. A mechanical load to the lateral surface of the cylinder is applied and it is free of the electrodes. The case of the continuously inhomogeneous piezoceramic cylinder material is considered. The boundary conditions at singular point of a solid piezoceramic cylinder are formulated. The discretely continual analytical numerically approach to solve of the problems of the forced wave propagation in the piezoceramic solid cylindrical bodies is proposed. The three-dimensional problem of the theory of electroelasticity in the partial derivatives (by presenting components of the elasticity tensor, component of displacement vectors, electrical induction and electrostatic potential by running waves in the axial direction) is reduced to the boundary value problems for the system of the ordinary differential equations. The one-dimensional problem is solved by a stable method of discrete orthogonalization. The kinematic analysis of the propagation of forced electroelastic waves in a solid piezoceramic homogeneous and inhomogeneous cylinder is carried out.

УДК 539.3

РІВНОВАЖНИЙ СТАН ДЕФОРМІВНОГО ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО НЕФЕРОМАГНІТНОГО ПІВПРОСТОРУ

Богдан Маркович, Юлія Сеник

Національний університет «Львівська політехніка»,
Національний лісотехнічний університет України

bohdan.m.markovych@lpnu.ua, yuliya.senik@gmail.com

Розглянемо електропровідний нефероманітний півпростір, пружні властивості матеріалу якого залежить від густини. Вважаємо, що півпростір вільний від зовнішнього силового навантаження, а на його поверхнях задано постійне значення густини ρ_a, що відрізняється від відлікового значення ρ_*, а також термодинамічний електричний потенціал φ_a. Розташуємо декартову систему координат $\{x, y, z\}$ таким чином, щоб півпростір займав область $x \ge 0$. За розглядуваної зовнішньої дії рівноважний стан півпростору залежить лише від координати x і описується такою ключовою системою рівнянь для визначення густини ρ, електричного потенціалу φ, компонент тензора напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ [1, 2]:

$$\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2(\rho_a - \rho_*)\exp(-\zeta x),$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0}\varphi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0}(\rho - \rho_*) = 0,$$

$$\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2} = 0,\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1-\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left[a_m(\rho - \rho_*) + a_0^{\omega}\varphi\right],\ \gamma = \{y, z\}. \quad (1)$$

При цьому врахуємо залежність пружних властивостей неоднорідного тіла від змінної густини його матеріалу, прийнявши співвідношення, характерні для пористих середовищ $E(x) = E_0(\rho/\rho_*)^{\beta_E}$, $\nu(x) = \nu_0(\rho/\rho_*)^{\beta_\nu}$. Тут a_m, a_0^{ω}, $a_{m\omega}$, $a_{\omega\omega}$, $\varepsilon_0, \xi, \zeta$, $E_0, \nu_0, \beta_E, \beta_\nu$ – сталі величини.

Систему рівнянь (1) доповнимо такими умовами на поверхні $x = 0$ півпростору

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \rho = \rho_a, \quad \varphi = \varphi_a, \quad (2)$$

умовами обмеженості розв'язку на безмежності

$$\lim_{x\to+\infty}\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \varphi, \rho - \rho_*\} = 0, \quad (3)$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_37.pdf

а також умовою електронейтральності тіла

$$\int_0^{\infty} \omega(x)dx = 0\,, \tag{4}$$

де $\omega(x) = [a_{m\omega}(\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega}\varphi]/\varepsilon_0$ – електричний заряд.

Аналіз розв'язку задачі (1)-(4) дозволяє стверджувати, що у області тіла існує ненульовий напружено-деформований стан, спричинений приповерхневим збуренням густини, що згідно з [1] обумовлене різними умовами взаємодії частинок на поверхні та у глибині тіла. Поверхневе значення термодинамічного електричного потенціалу та електричного заряду визначаємо з використанням умови (4). Аналіз розподілу заряду в рамках моделі підтвердив існування біля поверхні півпростору подвійного електричного шару, який є наслідком врахування сил кулонівської взаємодії, структурної неоднорідності матеріалу та шорсткості реальної поверхні півпростору.

Досліджено розподіл у півпросторі густини, термодинамічного електричного потенціалу, електричного заряду та напружень на основі системи рівнянь моделі у нелінійній постановці. Розподілу густини властива присутність двох, а розподілам потенціалу, заряду й напружень – трьох характерних розмірів $\xi^{-1}, \zeta^{-1}, \chi^{-1}$. Перший із цих розмірів пов'язано із структурною неоднорідністю матеріалу, другий – із геометричною неоднорідністю поверхні, а третій – із силами кулонівської взаємодії.

Вивчено вплив параметрів нелінійності на напружено-деформований стан та поверхневі напруження. Встановлено, що врахування зменшення модуля Юнга матеріалу із зменшенням його густини є наслідком зменшення поверхневих напружень. Подібний ефект спостерігаємо у меншій мірі і для коефіцієнта Пуассона. Поверхневі напруження у півпросторі суттєво залежать від відношення χ/ξ і значно менше від відношення ζ/ξ. Врахування нелінійності та структурної неоднорідності приводить до суттєвих кількісних змін значення полів, які є необхідними при розрахунку експлуатаційних характеристик конструкцій.

1. *Нагірний Т., Червінка К.* Основи механіки локально неоднорідних пружних тіл. Основи наномеханіки II. – Львів: Растр-7, 2014. – 168 с.
2. *Markovych B., Senyk Y., Nodzhak L.* Stress-deformed state and strength of a locally heterogeneous electrically conductive layer // Mathematical Modeling and Computing. – 2022. – Vol. 9, No. 3. – P. 750–756.

STUDY OF A DEFORMABLE ELECTRICALLY CONDUCTIVE NON-FERROMAGNETIC BODY THAT OCCUPIES A HALF-SPACE

The problem for the deformable electroconductive nonferromagnetic half-space is considered on the basis of the mathematical model of locally non-homogeneous solids. The study of density, thermodynamic electrical potential, charge and components of stress tensor in the half-space was performed. As a result of the research, a number of conclusions have done regarding the feasibility of taking into account the dependence of elasticity characteristics of the material on density.

УДК 531

НАПРУЖЕННЯ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ЗБЕРІГАННІ РДТП

Ігор Сенченков, Василь Чекурін, Ольга Червінко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

term@inmech.kiev.ua

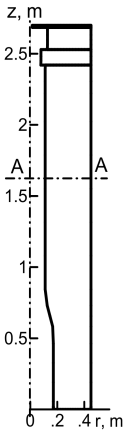


Рис. 1

Однією з основних проблем проектування ракет з РДТП є забезпечення міцності елементів ракети під час зберігання [1]. На рис. 1 показано меридіональний і на рис. 2 – поперечний переріз демонстраційного варіанту РДТП. На рис 2 показано границі шарів паливо-ізоляція, ізоляція-корпус, корпус-ізоляція.

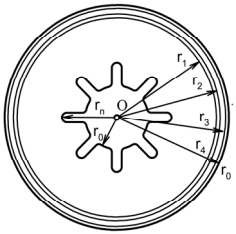


Рис. 2

$r_0 = 0,125\,м,$
$r_n = 0,2125\,м,$
$r_1 = 0,434\,м,$
$r_2 = 0,437\,м,$
$r_3 = 0,447\,м,$
$r_4 = 0,450\,м.$

Система рівнянь квазістатичної термомеханіки включає рівняння теплопровідності, рівняння рівноваги з врахуванням об'ємних сил, граничні умови на вільних зовнішній і внутрішній поверхнях, а також умови ідеального механічного контакту на поверхнях шарів.

Тверде паливо (ТП) вважається лінійно в'язкопружним ізотропним термореологічно простим матеріалом. Зв'язок девіаторних складових тензорів напружень і деформацій має вигляд [3]:

$$s_{ij}(x_i,t) = 2\int_{-\infty}^{t} G(\xi-\xi')(\partial e_{ij}(x_i,\tau)/\partial\tau d\tau\,,\ \ \langle\xi,\xi'\rangle = \int_{0}^{\langle t,\tau\rangle} \frac{d\eta}{a_T(T(x_i,\eta)} \qquad (1)$$

де ξ и ξ' – приведені часи, $\log a_T = -C_1(T-T_{ref})/[C_2+(T-T_{ref})]$, T_{ref} – відлікова температура, C_1, C_2 – матеріальні коефіцієнти.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_38.pdf

Слідуючи Shapery [3] і використовуючи апроксимацію Проні, маємо:

$$E(s)=s\overline{E}_{rel}(s)=E_\infty+\sum_{k=1}^{n}\frac{sA_k}{s+1/2a_T\tau_k},\ \nu(s)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{E(s)}{3K}\right],\ G(s)=\frac{3KE(s)}{9K-E(s)},\quad(2)$$

де E_∞ – рівноважний модуль, τ_k – часи релаксації, A_k – константи [2].

В цій доповіді наведено результати розрахунків НДС, зумовленого дією сил тяжіння, за горизонтального зберігання при $\theta=20°C$. На рис. 3 показано недеформовану та деформовану конфігурації для рівноважного стану ($t=2\cdot10^6 c$, $E=E_\infty=2\ МПа$). Переміщення збільшені у 15 разів.

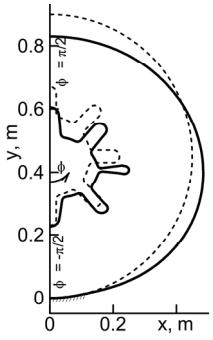


Рис. 3

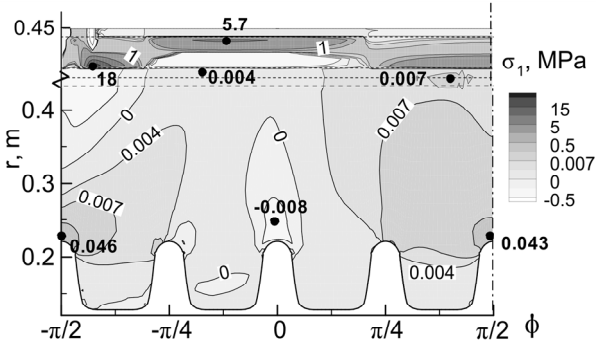


Рис. 4

Головні напруження σ_1 представлені на рис. 4 в полярних координатах на розгортці в осях Or і $O\varphi$. Максимальні значення досягаються поблизу ділянки обпирання і обумовлені особливістю напружень. У ділянці нижнього заглиблення $\varepsilon_{rr}\approx-1.7\%$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}\approx1.57\%$. Для середнього заглиблення $\varepsilon_{rr}\approx1.57\%$ і $\varepsilon_{\varphi\varphi}\approx-1.53\%$. Деформації $\varepsilon_{r\varphi}$ максимальні на середньому заглибленні. За критерієм руйнування максимальної нормальної деформації небезпечними є заокруглення верхнього та нижнього заглиблень.

1. *Синюков А.М., Волков П.И., Львов А.И., Мишкович А.М.* Баллистическая ракета на твердом топливе. – М.: Воениздат, 1972. – 512 с.
2. *Renganahan K., Nageswara Rao B., Jana M.K.* Slump Estimation of Cylindrical Segment Grains of a Typical Rocket Motor under Vertical Storage Conditions / Trends in Applied Sciences Research. – 2006. – **1(1)**. – P. 97–104.
3. *Shapery R.A.* Approximate mrthods of transform inversion of viscoelastic stress analysis / Proc. U.S. Nath. Congr. Appl. Mech. – 1962. – Vol. 2. – P. 1075–1085.

STRESSES DURING HORIZONTAL STORAGE OF SOLID FUEL JET ENGINE

The results of calculations of stress-strain state caused by gravity for Solid fuel jet engine during horizontal storage are presented.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТОВЩИН ТА МАТЕРІАЛІВ ШАРІВ МЕТАЛОКОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРІВ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ВНУТРІШНЬОМУ ВИБУХОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Володимир Ромащенко, Світлана Тарасовська

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

roma@ipp.kiev.ua, tsa@ipp.kiev.ua

В роботі проведено чисельне дослідження одновимірного динамічного напружено-деформованого стану і міцності намотувальних металокомпозитних циліндрів, визначення оптимальних товщини металевих шарів і фізико-механічних характеристик композитів, які забезпечують найбільшу несучу здатність циліндрів при внутрішньому вибуховому навантаженні в повітряному середовищі. Моделювання вибухового навантаження проводиться за методикою CONWEP [1, 2], оцінка міцності – за узагальненим критерієм міцності Мізеса.

Для отримання найбільш якісних і наочних результатів динамічна задача розглядається в 1D-постановці плоского деформованого стану на торцях циліндра. При цьому імпульс тиску відповідає вибуху сферичного заряду вибухової речовини певної маси M в повітряному середовищі на відстані, яка дорівнює внутрішньому радіусу циліндра. Внутрішній шар – ізотропна пружнопластична сталь, зовнішній – циліндрично транстропний пружний композит з коловим армуванням, контакт між шарами ідеальний. Задача вирішується чисельно методом скінченних різниць. Повна система диференційних рівнянь разом з початковими, граничними і контактними умовами наведена в [3]. Міцність двошарового циліндра оцінюється за узагальненим критерієм міцності Мізеса. Сформульована динамічна крайова 1D-задача розв'язується чисельно за допомогою модифікованого пакета прикладних програм, який розроблено раніше [4].

Для трьох видів металокомпозитних циліндрів (тонкий, середньої товщини та товстий) та чотирьох різних матеріалів композитних шарів було проведено систематичний чисельний аналіз з визначення оптимальної відносної товщини металу і оптимального за міцністю композитного матеріалу зовнішнього шару. Було проведено дослідження впливу пластичного деформування внутрішнього сталевого шару на міцність зовнішнього композитного.

Отримані нові чисельні результати про вплив на напружено-деформований стан і міцність загальної товщини оболонки, співвідношення товщин ме-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_39.pdf

талевого і композитного шарів. Показано, що пластичне деформування внутрішнього сталевого шару може суттєво покращувати міцність металокомпозитних циліндрів і що вона залежить в першу чергу від межі міцності композита на розтяг в радіальному (товщинному) напрямку. Доведено, що міцність металокомпозитних циліндрів, особливо товстостінних, дуже чутлива до хвильових ефектів. Мають місце випадки, коли за деякого співвідношення шарів β відносну масу заряду ξ (а отже і абсолютну масу заряду M) можна збільшити більше, ніж вдвічі, не порушуючи при цьому вимог міцності; в той же час при відхиленні β всього на 1,5% від розглянутого, за даної ξ, циліндр буде руйнуватись.

1. *Randers-Pehrson G., Bannister K.A.* Airblast Loading Model for Dyna-2D & Dyna-3D. – Army Research Laboratory, 1997. – 97 p.
2. *Hyde D.W.* User's guide for microcomputer program CONWEP, application of TM 5-855-1, «Fundamentals of protective design for conventional weapons». – U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, 1988. – 36 p.
3. *Лепіхін П.П., Ромащенко В.А., Бейнер О.С., Тарасовська С.О.* Вплив товщини металевого шару на напружено-деформований стан і міцність металокомпозитних циліндрів при внутрішньому вибуху // Проблеми міцності. – 2022. – № 3. – С. 18–32.
4. *Лепихин П.П., Ромащенко В.А., Бейнер О.С. и др.* Программа численного расчета динамического напряженно-деформированного состояния и прочности полых многослойных анизотропных цилиндров и сфер. Сообщ. 1. Описание программы // Проблемы прочности. – 2015. – № 2. – С. 38–47.

STUDY OF THE INFLUENCE OF THE THICKNESSES AND MATERIALS OF THE LAYERS ON THE STRENGTH OF METAL-COMPOSITE CYLINDERS UNDER AN INTERNAL EXPLOSIVE LOAD

The effect of the metallic layer thickness and materials of the layers on the stress-strain state and strength of metal-composite cylinders of total constant thickness under internal dynamic pressure produced by the explosion of a charge uniformly distributed along its axis in air at the constant total-to-running charge mass ratio ξ was numerically investigated. The strength of the cylinders was evaluated by the generalized Mises criterion. It is numerically and analytically proved that the strength of circularly reinforced cylinders from the composites of low tensile strength in the isotropy plane is primarily governed by the wave processes across the shell width and, as a consequence, by radial and axial tensile stresses, viz the larger they are, the lower the strength. Circumferential tensile stresses, on the contrary, improve the strength in most cases, i.e., only strengthen the structural element and increase the safety margin. It is shown that the plastic deformation of the inner steel layer can significantly improve the strength of the metal-composite cylinder and that it depends primarily on the limit of the tensile strength of the composite in the radial direction. The strength of metal-composite cylinders is proved to be very sensitive to the wave phenomena along the radial coordinate. Sometimes at a certain ratio of layers β (about 0.7), the charge mass ratio ξ (and hence the absolute charge mass M) can be increased more than twice without deterioration of the strength requirements, while the β deviation by only 1.5% from that at given ξ would lead to the cylinder fracture.

УДК 539.3

СУЧАСНІ ПІДХОДИ МЕХАНІКИ НЕПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВОГО ОБҐРУНТУВАННЯ МІЦНОСТІ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ РЕСУРСУ КРИТИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОБЛАДНАННЯ АЕС

Олександр Чирков, Валерій Харченко

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

chirkale82@gmail.com, ipp.kharchenko@gmail.com

В Інституті проблем міцності імені Г.С.Писаренка НАН України (ІПМіц НАН України) одержано теоретичні та прикладні результати щодо розвитку і застосування уточнених моделей і методів розв’язання актуальних задач механіки, пов’язаних з обґрунтуванням міцності та прогнозуванням ресурсу критичних елементів обладнання першого контуру реакторної установки з водо-водяним енергетичним реактором ВВЕР-1000 [1].

Науково-прикладні розробки ІПМіц НАН України враховують сучасні тенденції світової практики з розрахункового обґрунтування міцності елементів обладнання АЕС, а також містять нові концептуальні підходи до розв’язання нелінійних крайових задач механіки деформованих конструкцій.

Запропоновано та теоретично обґрунтовано уточнені математичні моделі, що дають змогу описувати неізотермічні процеси непружного деформування з урахуванням історії навантаження, радіаційних ефектів розпухання і повзучості опроміненого металу й накопичених пошкоджень в’язкого руйнування.

На основі розвинених енергетичних підходів, що ґрунтуються на загальних принципах нелінійної механіки суцільних середовищ та узагальнюють постулат Друкера для опроміненого пористого матеріалу, вперше встановлено умови коректності крайових задач радіаційної повзучості, в яких враховується зростання об’ємної концентрації мікропор в’язкого руйнування у металі за удосконаленими моделями Райса-Трейсі-Хуанга та за розв’язком Качанова для сферичної порожнини [2].

Розвинено загальну теорію змішаних проекційно-сіткових схем методу скінченних елементів підвищеної точності, доведено стійкість та збіжність змішаної апроксимації, обґрунтовано збіжність модифікованих ітераційних процесів пружних розв’язків і змінних параметрів пружності для розв’язання крайових задач термомеханіки, що описують кінетику зв’язаних процесів нелінійного деформування, радіаційного розпухання, радіаційного повзучості

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_40.pdf

та радіаційного пошкодження за моделями в'язкого руйнування.

На основі розроблених уточнених моделей і методів розрахунку одержано та проаналізовано результати моделювання кінетики напружено-деформованого стану корпусу ядерного реактора ВВЕР-1000 за режимів термошоку, вузла приварки колектора теплоносія до корпусу парогенератора ПГВ-1000М, вигородки та внутрішньокорпусної шахти реактора ВВЕР-1000 за експлуатаційних умов навантаження. Наведені результати демонструють можливості та переваги розроблених методів розрахунку для обґрунтування міцності та прогнозування залишкового ресурсу критичних елементів обладнання першого контуру реакторної установки АЕС з ВВЕР-1000.

Результати фундаментальних і прикладних досліджень ІПМіц НАН України покладено в основу методології уточненого розрахунку напружено-деформованого стану та опору руйнуванню елементів обладнання першого контуру реакторної установки ВВЕР-1000. Розроблені методи впроваджено у спеціалізований програмний комплекс, створений в ІПМіц НАН України та дозволений до застосування в атомній галузі України. Методичні рекомендації та методи розрахунку обладнання АЕС втілено в розроблений стандарт організації України – стандарт ІПМіц НАН України. Для оцінки міцності та ресурсу корпусів реакторів ВВЕР розроблено галузевий нормативний документ, використаний для обґрунтування подовження строків служби 7-ми енергоблоків АЕС України. Отримані результати сприяють вирішенню актуальних задач сучасної атомної енергетики щодо подовження строків безпечної експлуатації енергоблоків АЕС України.

1. *Харченко В.В., Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Кравченко В.И.* Методы расчетного анализа в задачах прочности элементов оборудования реакторных установок ВВЭР. – Киев: Ин-т проблем прочности имени Г.С. Писаренко НАН Украины, 2018. – 293 с.
2. *Чирков О.Ю.* Радіаційна повзучість у задачах механіки непружного деформування матеріалів та елементів конструкцій. – Київ: Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України, 2020. – 160 с.

STATE-OF-THE-ART APPROACHES OF INELASTIC DEFORMATION MECHANICS FOR COMPUTATIONAL STRENGTH SUBSTANTIATION AND SERVICE LIFE PREDICTION OF CRITICAL ELEMENTS OF NUCLEAR POWER PLANT EQUIPMENT

The paper presents the results on development and application of refined models and methods for solving topical problems of mechanics related to substantiation of strength and service life prediction of critical elements of WWER-1000 reactor equipment. The scientific and applied developments include new conceptual approaches to solving nonlinear boundary problems of mechanics of deformed structures, including refined models of radiation damage to metal and computational methods of analysis based on an enhanced-accuracy mixed scheme of the finite element method. The obtained results contribute to solving the problems of modern nuclear power engineering concerning the prolongation of safe operation of Ukrainian nuclear power plants.

УДК 539.3

ДЕФОРМУВАННЯ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ЗАХИЩЕНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИМ МАТЕРІАЛОМ, ЗА ТЕРМОСИЛОВОЇ ДІЇ

Володимир Трач, Андрій Подворний, Олександр Бондарський

Національний університет водного господарства та природокористування,
Луцький національний технічний університет

trach-vm@ukr.net, a.v.podvornyi@nuwm.edu.ua, bondarskij22@ukr.net

Нещодавно з'явився новий вид композитних матеріалів, відомий як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) [8, 9]. Відомо, що такий матеріал є неоднорідним композитом, виготовленим з різних фаз матеріальних складових. Одним з найсучасніших типів ФГМ є армуючий матеріал з вуглецевих нанотрубок [1]. Якщо ж в якості його матриці вибрати керамічну складову, то такий матеріал буде здатний протистояти високотемпературному впливу.

В цьому дослідженні представлено модифікацію функціоналу узагальненого варіаційного принципу Ху-Васідзу. Застосування такого підходу, на основі співвідношень лінійної теорії пружності анізотропного тіла, дозволило вивести тривимірну систему рівнянь. На цій основі запропоновано методику встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінної шаруватої анізотропної циліндричної оболонки, що виготовлена з волокнистого композиту та шарів з ФГМ (кераміка-вуглецеві нанотрубки). Головні напрямки пружності таких матеріалів можуть не збігатись з осями криволінійної системи координат конструкції. В такому випадку необхідно враховувати ефект конструктивної анізотропії, викликаний розбіжністю між напрямками армування та осями оболонки [2, 4, 6, 7], який призводить до виникнення матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Згідно з узагальненим законом Гука для нього деформації розтягу і зсуву, згину та кручення взаємопов'язані.

Для розв'язку отриманої системи рівнянь скористаємося процедурою методу Бубнова–Гальоркіна [4, 6]. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за твірною та коловою координатами циліндричної оболонки так, що б вони задовольняли крайові умови. Після деяких математичних перетворень отримаємо нескінченну систему диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші. Розв'язок одновимірної системи проведемо за використання чисельного методу дискретної ортогоналізації.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_41.pdf

Реалізація пропонованого підходу щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану представлена на прикладі товстостінної циліндричної оболонкової конструкції, виготовленої з композитного матеріалу (боропластику), захищеного з боку вищого температурного поля шаром ФГМ. Проаналізовано характер розподілу компонентів напружено-деформованого стану за товщиною оболонки залежно від такої комбінованої термосилової дії.

1. *Аврамов К.В., Чернобривко М.В., Успенський Б.В.* Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок // Космічна наука і технологія. – 2019. – **25**, № 2. – С. 23–37.
2. *Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
3. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
5. *Николишин М.М., Ростун М.Й.* Гранична рівновага виготовленої з функціонально-градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з внутрішньою тріщиною довільної конфігурації // Прикарпатський вісник НТШ. – 2012. – № 1. – С. 26–34.
6. *Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В.* Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки // Прикл. механіка. – 2023. – **59**, № 1. – С. 91–102.
7. *Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М.* Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела, 2019. – 273 с.
8. *Amada S., Munekata T., Nagase Y., Ichikawa Y., Kirigai A., Zhifei Y.* The Mechanical Structures of Bamboos in Viewpoint of Functionally Gradient and Composite Materials // Journal of Composite Materials. – 1996. – **30**, issue 7. – P. 800–819.
9. *Shen Hui-Shen* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. – CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2009. – 266 p.

DEFORMATION OF NON-THIN ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS PROTECTED BY A FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIAL UNDER THERMAL POWER LOAD

The paper presents an approach to obtaining a three-dimensional system of equations that describes the stress-strain state of anisotropic cylindrical thick-walled shells under thermal power load. To protect the fibrous composite material of the shells, a functionally graded material (FGM) is used, the components of which can be ceramics and unidirectional carbon nanotubes. The procedure of the Bubnov-Gal'orkin method is used to reduce the system of equations to a one-dimensional one. The resulting one-dimensional problem is solved in the normal direction to the middle surface, using the discrete orthogonalization method.

The stress-strain state of an anisotropic thick-walled cylindrical shell protected from the side of higher temperatures by a layer of FGM was studied from the combined power and temperature effects.

УДК 539.3

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ГОФРОВАНОЇ ЗАМКНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Олександр Григоренко, Максим Борисенко, Олена Бойчук, Наталія Борейко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Миколаївський національний аграрний університет

ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,
boychuklena27@gmail.com, nataliya.petrivna@ukr.net

Різноманітні оболонкові конструкції знаходять широке застосування в різних галузях промисловості. Особливе місце серед них належить циліндричним оболонкам, які мають високу міцність та стійкість при відносно невеликій масі. Підвищення характеристик на міцність при збереженні маси можна здійснювати внаслідок зміни геометричних параметрів таких, як товщина стінки оболонки або зміни форми поперечного перерізу, наприклад, за допомогою гофрування. Моделювання таких конструкцій пов'язане з рядом попередніх досліджень, одним з яких є дослідження динамічних характеристик при різних граничних умовах, конструктивних неоднорідностях та інших різних параметрах оболонки. Інформація про частоти і форми вільних коливань та їх залежності від різних параметрів дає можливість керувати спектром частот та виводити конструкцію з резонансних режимів, які можуть спричинити руйнування. У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні методи дослідження частот і форм вільних коливань гофрованих циліндричних оболонок.

Одним із методів розрахунку частот вільних коливань є метод скінченних елементів (МСЕ), який лежить в основі багатьох сучасних програмних комплексів інженерного проектування і аналізу, наприклад, програмного комплексу FEMAP. Запропонований комплекс використовується при дослідженнях, як кругових [4], так і некругових [2, 3] циліндричних оболонок. В роботах [1, 5, 6] проведені дослідження відкритих та замкнутих гофрованих циліндричних оболонок сталої товщини.

Метою даної роботи є визначення частот та форм вільних коливань консольної ізотропної тонкої замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки змінної товщини.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_42.pdf

Визначено МСЕ частоти і форми вільних коливань тонкої замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з кількістю гофр по контуру k=8 змінної вздовж контуру поперечного перерізу товщини з жорстко закріпленим торцем. Встановлено симетричні і антисиметричні форми коливань. Проведено порівняння частот гофрованої оболонки змінної товщини з частотами аналогічної гофрованої циліндричної оболонки сталої товщини еквівалентної маси [5].

Реалізовані у роботі підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики закритих та відкритих гофрованих циліндричних оболонок змінної товщини з різними граничними умовами та іншими різними параметрами, що є актуальною проблемою прикладної математики та механіки.

1. *Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P.* Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells. In: *Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V., Mikhasev G., Morozov N.* (eds). Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. – Cham: Springer. – 2021. – **151**. – P. 63–74.
2. *Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y.* Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: *Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W.* (eds). Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials. – Cham: Springer. – 2020. – **134**. – P. 141–154.
3. *Grigorenko A.Ya, Borisenko M.Yu., Boichuk E.V.* Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, No. 4. – P. 389–401.
4. *Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P.* Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, No. 1. – P. 75–84.
5. *Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V.* Free Vibrations of a Corrugated Closed Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, No. 1. – C. 43–52.
6. *Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Shums'ka A.A.* Numerical determination of natural frequencies and modes of closed corrugated cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, No. 5. – C. 520–532.

FREE VIBRATIONS OF A CORRUGATED CLOSED CYLINDRICAL SHELL OF VARIABLE THICKNESS

The frequencies and forms of free vibrations of a thin closed corrugated circular cylindrical shell with variable thickness along the contour of the cross section with one end fixed rigidly are determined by the finite element method. Symmetric and antisymmetric forms of vibrations are presented. The frequencies of a corrugated shell of variable thickness are compared with the frequencies of a similar corrugated cylindrical shell of a constant thickness of equivalent mass [4]. The approaches implemented in the work make it possible to study the dynamic characteristics of closed and open corrugated cylindrical shells with variable thickness, various boundary conditions and other various parameters.

УДК 539.3

ВИМУШЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ ТА ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ШАРУВАТОЇ КОНІЧНОЇ ПАНЕЛІ ІЗ В'ЯЗКОПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Володимир Козлов, Юрій Лелюх, Любов Зінчук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

thermo_imech@ukr.net, yult84@ukr.net, zinchuk_imech@ukr.net

Елементи конструкцій у вигляді шаруватих зрізаних конусів, порожнистих циліндрів, що містять в'язкопружні п'єзоелектричні включення, використовуються у різноманітних пристроях сучасної техніки. На роботоздатність таких елементів, які в процесі експлуатації можуть перебувати під дією інтенсивних гармонічних електромеханічних навантажень з частотами, близькими до резонансних, суттєво впливає зв'язаність термоелектромеханічних полів та рівень дисипативного розігріву, що і зумовлює практичний інтерес до вивчення динамічної поведінки вказаних елементів [1, 2].

У цій роботі з використанням чисельного підходу [3] у тривимірній постановці досліджено вимушені коливання і дисипативний розігрів тришарової в'язкопружної п'єзоелектричної конічної панелі у випадку, коли фізико-механічні властивості шарів панелі не залежать від температури. Зазначимо, що знаходження розв'язку таких задач зводиться до розв'язування послідовності лінійних задач електров'язкопружності з комплексними електромеханічними характеристиками і задач нестаціонарної теплопровідності з відомим джерелом тепла. Розроблена методика розв'язання зазначених лінійних задач електромеханіки і нестаціонарної теплопровідності ґрунтується на запропонованому авторами варіанті методу скінченних елементів у варіаційній постановці, де було використано ізопараметричні просторові двадцятичотирьохвузлові елементи з квадратичною апроксимацією компонент вектора переміщень, електричного потенціалу та температури в елементі по координатах r і z, а основною їх особливістю є апроксимація невідомих функцій в коловому напрямку тригонометричним поліномами.

Розглянуто тришарову конічну панель постійної товщини, яка складається із зовнішніх однакових п'єзоелектричних шарів з радіальною поляризацією, що розділені металевим прошарком. Зовнішні поверхні панелі покриті

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_43.pdf

нескінченно тонкими електродами. Використано паралельне електричне з'єднання, коли на зовнішні електроди подається заданий потенціал, що збуджує електромеханічні гармонічні коливання з круговою частотою, близькою до резонансної, а внутрішній металевий шар є заземленим.

Представлено результати чисельного моделювання термоелектромеханічної поведінки тришарової в'язкопружної п'єзоелектричної конічної панелі у випадку шарнірного закріплення її країв. Вважалось, що панель знаходиться в умовах конвективного теплообміну з навколишнім середовищем.

Розрахунки проведено для панелі, виготовленої з п'єзокерамічних шарів PZT (ЕС-65) [4] та шару алюмінію. Досліджено розподіл власних частот вказаної конічної панелі. Розраховано електромеханічні характеристики та визначено температуру дисипативного розігріву для різних геометричних параметрів конічної панелі. Досліджено вплив величини електричного навантаження на амплітудно-частотні та температурно-частотні характеристики в околі першого резонансу.

1. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
2. *Karnaukhov V.G., Kyrychok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, No 1. – P. 6–58.
3. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Завгородний А.В., Умрыхин И.Н.* Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев тел вращения из вязкоупругого пьезоэлектрического материала // Прикладная механика. – 2015. – **51**, № 6. – С. 12–22.
4. *Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G.* Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Phys. – 2007. – **101**. – P. 06411 – 1 – 7.

FORCED RESONANCE VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF LAYERED CONICAL PANEL MADE OF VISCOELASTIC PIEZOELECTRIC MATERIALS

The results of numerical simulation of the thermoelectromechanical behavior of a three-layer viscoelastic piezoelectric conical panel in the case of hinged fastening of its edges are presented. The distribution of natural frequencies of the conical panel was studied. The electromechanical characteristics were calculated and the dissipative heating temperature was determined for various geometric parameters of the conical panel. The influence of the magnitude of the electric load on the amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics in the vicinity of the first resonance was studied.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ «ТРЕТЬОГО ТІЛА» В ЗАДАЧАХ ТРИБОЛОГІЇ

Володимир Онишкевич, Галина Барабаш

Національний лісотехнічний університет України,
Львівський національний університет імені Івана Франка

onyshkevych@nltu.edu.ua, galynabarabash71@gmail.com

Розмаїття чинників впливу на тепловий режим трибологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такої практичної науково-технічної задачі. Серед факторів впливу є, як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення взаємодіючих тіл та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Найбільш загальні теплофізичні граничні умови з урахуванням тертя та тепловиділення були запропоновані в [3], а математичне моделювання контактної термопружності за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей було проведене в [4].

Запропоновано математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду т.зв. умовного «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні [2]. При цьому для дослідження контактної термопружності з урахуванням тертя і тепловиділення за вихідні умови використано узагальнені умови теплового контакту, які враховують коефіцієнт термопроникливості контакту h [3].

Проведений числовий аналіз показав, що суттєвий вплив на результати має термопроникливість контакту h, тому для практичних розрахунків можна рекомендувати для використання спрощені теплофізичні умови на ділянці контакту [1]:

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}-\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}=\frac{c}{2}\left(\dot{t}^{(1)}+\dot{t}^{(2)}\right)-Q,$$

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}+\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}-2h\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)=\frac{c}{6}\left(\dot{t}^{(1)}-\dot{t}^{(2)}\right).$$

Середня температура в області контакту тіл мало відрізняється від температури $t^{(1)}=t^{(2)}$ при ідеальному тепловому контакті тіл, тому розв'язок за-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_44.pdf

дачі зі запропонованими в [1] спрощеними граничними умовами при $h \to \infty$ можна розглядати як перший етап для знаходження h.

Фактори, від яких залежить h, як і весь процес теплоутворення, є численними та складними, однак числовий аналіз дозволив встановити суттєвий вплив на зміну термопроникливості контакту одних вхідних параметрів і несуттєвість впливу інших. Для визначення впливу вказаних параметрів на різницю температур і теплових потоків розглянуто нестаціонарну контактну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності.

Припускаємо, що два пружних півпростори з нульовою температурою спочатку є нерухомими, а в момент часу $\tau = 0$ зближуються і з тертям починають переміщуватися з відносною сталою швидкістю. Процес тертя на межі контакту супроводжується теплоутворенням, теплові граничні умови враховують коефіцієнт теплопроникливості контакту h. Розв'язок задачі отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа.

За різних законів задання на безмежності напружень $\sigma|_{\infty}$ отримано аналітичні вирази для розподілу температури та теплових потоків у взаємодіючих тілах за глибиною. За отриманими числовими результатами зроблено висновки про суттєвий вплив або відсутність впливу конкретних теплофізичних та механічних параметрів трибологічної пари на різницю температур та зміну теплових потоків у парі тертя.

1. *Левицький В.П., Онишкевич В.М.* Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 1. – С. 82–86.
2. *Онишкевич В.* Урахування впливу термічної провідності контакту в осесиметричних задачах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – **65**. – С. 208–215.
3. *Подстригач Я.С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя // Инж. физ. журн. – 1963. – **6**, № 10. – С. 129–136.
4. *Швец Р.Н., Мартыняк Р.М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – **27**. – С. 23–28.

THE "THIRD BODY" MODEL IN PROBLEMS OF TRIBOLOGY

The method of determination of thermal contact conductance in mathematical modelling of contact interaction with considering friction and hear generation by "third body" is proposed. The dependence of influence of some physical and mechanical parameters on the temperature and heat fluxes in the contact bodies is investigated.

УДК 539.3

ЗНАХОДЖЕННЯ ФІЗИЧНО ОБҐРУНТОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Віктор Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

victorrev@ukr.net

Розглянуто систему рівнянь Нав'є тривимірної статичної теорії термопружності в декартовій системі координат: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{1}$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $e = \operatorname{div} u_j$. Вважатимемо, що в тілі задане стаціонарне температурне поле $\nabla^2 T = 0$ [1].

Проаналізовано відомі часткові розв'язки системи рівнянь (1), при побудові яких не використовується термопружний потенціал переміщень [1]. Із цих розв'язків і фізичних міркувань випливають такі закономірності розподілу температурних переміщень: вони накопичуються по інтегральному закону; якщо температура є лінійною функцією, то вони повині збігатися з відомими переміщеннями; якщо температуру спрямувати до нуля, то вони повинні збігатися до нуля. На основі цих тверджень знайдено новий частковий розв'язок системи рівнянь (1), який явно визначається температурою

$$u_j^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \beta_1 \Omega_j, \quad j = \overline{1,3}, \tag{2}$$

де $\vartheta(x,y,z) = \beta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + z\Omega_3)$ – бігармонічна функція, $\beta = -\alpha/6$, $\beta_1 = 4\alpha/3$, $\Omega_j = \int T dx_j$, T – тривимірні гармонічні функції. Інтеграли Ω_j означені так, що вони є гармонічними функціями, які дорівнюють нулю, коли температура рівна нулю.

На основі переміщень (2) визначено температурні напруження

$$\sigma_j^t = 2G\{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3}\alpha T\}, \ \tau_{jm}^t = 2G\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_m} + \beta_1 G[\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} + \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}]. \tag{3}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_45.pdf

Знайдено формули, які визначають в простому вигляді об'ємне розширення і суму нормальних напружень (3) часткового температурного розв'язку рівнянь Нав'є (1)

$$e^t = \mathrm{div}\,\mathrm{u}^t_j = 3\alpha T\ ,\ \Theta^t = \sigma^t_1 + \sigma^t_2 + \sigma^t_3 = 0\ . \tag{4}$$

Побудовані часткові розв'язки системи рівнянь (1), коли температура є парною або непарною двовимірною функцією.

Виражено загальний розв'язок системи рівнянь термопружності (1) через чотири гармонічні функції.

Розглянуто систему рівнянь Нав'є (1) у випадку осесиметричної температури. Знайдено її частковий розв'язок

$$u^t_r = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + 2\beta_1\Omega_r\ ,\ u^t_z = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \beta_1\Omega_z\ ,\ u^t_\phi = 0\ , \tag{5}$$

де $\Omega_r = \frac{1}{r}\int rTdr$, $\Omega_z = \int \mathrm{T}dz$ – двовимірні гармонічні осесиметричні функції, $\vartheta(r,z) = \beta(2r\Omega_r + z\Omega_z)$. На основі співвідношень (5) побудовані напруження.

Встановлено, що: в осесиметричному випадку також будуть справедливі співвідношення (4); при використанні термопружного потенціалу переміщень потрібно враховувати, що він містить в собі пружні переміщення.

Розроблено аналітично-числову методику розв'язання крайових задач термопружності за дії температурних навантажень.

1. *Revenko V.* Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory // Scientific Journal of TNTU. – 2022. – **108,** № 4. – P. 64–73.

FINDING OF PHYSICALLY REASONABLE SOLUTIONS OF EQUATIONS OF THE THERMOELASTICITY THEORY

The report found new solutions to the static theory of thermoelasticity in the Cartesian coordinate system. New explicit partial solutions of thermoelasticity equations, when the temperature field is defined by 3D or 2D harmonic functions, are constructed. Displacements, deformations, and stresses determined by these partial solutions have been called temperature functions. A simple formula for the thermal volume deformation is obtained and it is shown that the sum of normal stresses is equal to zero. Separate cases when the temperature depends on the product of harmonic functions of two variables on the degree of coordinate z are also considered. Partial and general solutions are derived for them. General solutions of thermoelasticity equations (Navier's equations) through four harmonic functions, when the temperature field is given three-dimensional or two-dimensional harmonic functions, are constructed. The solution of the system of Navier equations for axisymmetric temperature distribution is constructed.

УДК 539.3

ОБЧИСЛЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

**Ярослав Пастернак, Тетяна Третяк,
Юрій Михалюк, Світлана Патлашинська**

*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцький національний технічний університет*

iaroslav.m.pasternak@gmail.com

Швидке та високоточне обчислення фундаментального розв'язку задач про усталені коливання анізотропного середовища [1] та його першої і другої похідних за просторовими координатами є ключовим для побудови числових схем розв'язування інтегральних рівнянь відповідних задач на основі методу граничних елементів. Незважаючи на те, що цей фундаментальний розв'язок може бути записаний у вигляді інтеграла по поверхні одиничної сфери [1], його числове визначення істотно ускладнюється тим, що підінтегральний вираз є сильно осцилюючою функцією. Для подібних інтегралів розроблено низку числових методів їхнього обчислення, проте вони не виявилися добре придатними до визначення окресленого фундаментального розв'язку.

У цьому дослідженні для вирішення сформульованої задачі запропоновано тригонометричну квадратуру інтерполяційного типу

$$\int_0^1 f(b)\exp(\mathrm{i}Kb)\,db \approx -\mathrm{i}\sum_{j=-N}^{N}\hat{f}_j(j\pi+K)^{-1}\left[\exp(\mathrm{i}(j\pi+K))-1\right], \quad (1)$$

де величини $\hat{f}_j$ обчислюються за вузловими значеннями функції $f(b)$. Запропонована квадратурна формула виявила свою високу точність за невеликої кількості вузлів, що сприяло створенню швидкої схеми методу граничних елементів.

1. *Wang C.Y., Achenbach J.D.* Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids // Proc R Soc Lond. – 1995. A – **449**. – P. 441–458.

EVALUATION OF TIME-HARMONIC FUNDAMENTAL SOLUTION FOR AN ANISOTROPIC ELASTIC MEDIUM

This study presents a precise numerical approach for evaluation of time-harmonic Green's function for an infinite anisotropic space, which accounts for high oscillatory behavior of the integrand.

УДК 539.3

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУЙНІВНИХ ВИПРОБУВАНЬ СКЛАДНИХ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНОЇ ТЕХНІКИ

Богдан Дробенко, Михайло Марчук, Микола Хом'як, Володимир Сіренко, Дмитро Клименко, Володимир Харченко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

Програми дослідження механічної поведінки складних ракетних конструкцій до недавнього часу формувались переважно на основі результатів реальних натурних повномасштабних експериментів, руйнівних випробувань і тестів та відповідного адаптування числових результатів, отриманих у рамках спрощених математичних моделей. Однак, можливості дослідження поведінки конструкцій при таких випробуваннях є доволі обмеженими і надзвичайно затратними, а використання спрощених математичних моделей для дослідження міцності реальних конструкцій складної форми часто приводить не лише до кількісно, але й якісно неправильних результатів. З огляду на це, дослідження механічної поведінки складних структурно-неоднорідних конструкцій все частіше виконують на основі уточнених, просторово тривимірних математичних моделей.

Крім геометричного аспекту, який передбачає виконання обчислень для тіл реальної просторової форми, уточнення методик дослідження має ще й фізичний аспект, пов'язаний з використанням розширених моделей опису механічної поведінки матеріалів, які враховують можливості геометрично й фізично нелінійного деформування, що особливо важливо при моделюванні руйнівних випробувань ракетної техніки і визначенні руйнівних навантажень.

У даній роботі розглянуто методику розрахункового моделювання руйнівних випробувань конструкцій ракет і ракет-носіїв в рамках загальної моделі геометрично нелінійного пружно-пластичного тіла. На цій основі створено скінченно-елементне програмне забезпечення, з використанням якого досліджено механічну поведінку бака паливного відсіку ракети за умов руйнівного випробування, визначено руйнівне навантаження і місце ймовірного руйнування бака. Виконано порівняння результатів комп'ютерного моделювання з результатами натурного руйнівного випробування.

COMPUTER SIMULATION OF COMPLEX ROCKET STRUCTURES FAILURE TESTS

The method of computer simulation of rocketry failure tests is considered within the model of a geometrically and physically non-linear three-dimensional solid. The mechanical behavior of the rocket's fuel compartment tank under failure test conditions was simulated.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_13.pdf

УДК 539.3: 536.21

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗВАРНОГО З'ЄДНАННЯ ШТУЦЕРА І КОЛЕКТОРА

Богдан Дробенко, Тетяна Бардин

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

Точність оцінки експлуатаційного ресурсу чи запасу міцності конструкцій, які, як правило, є структурно неоднорідними тілами складної форми, істотно залежить від точності й достовірності даних про експлуатаційні напруження й деформації в них. З огляду на зазначене, надзвичайно актуальним є якнайточніше визначення цих напружень і деформацій. Використання спрощених математичних моделей (стрижнів, балок, пластин, оболонок) для дослідження міцності реальних конструкцій складної форми і структури часто приводить до істотно неправильних результатів. Це спричиняє потребу дослідження механічної поведінки складних конструкцій на основі тривимірних математичних моделей, які дають можливість природно врахувати реальну геометричну форму конструкції та структуру матеріалів. Розроблене на основі таких математичних моделей і відповідних методів програмне забезпечення дає можливість у стислі терміни проаналізувати механічну поведінку тієї чи іншої конструкції за умов експлуатації та оптимізувати її форму і структуру з позиції міцності.

Розглянуто результати експертного аналізу міцності вузла зварного з'єднання штуцера і колектора зі сталі 12Х1МФ засобами комп'ютерного моделювання в рамках загальної моделі термочутливого пружного тіла з використанням методу скінченних елементів. Виявлено зони локалізації максимальних експлуатаційних напружень у з'єднаннях за різних типів зварювання. Запропоновано конструкційні технологічні розв'язання, спрямовані на істотне пониження рівня максимальних експлуатаційних напружень. Отриманий оптимальний проект зварного з'єднання використаний на Бурштинській ТЕС при розробці технології ремонтних робіт енергетичного обладнання.

OPTIMIZATION OF THE WELDED JOINT OF THE SLEEVE AND THE COLLECTOR

The strength of the welded joint of the sleeve and the collector made of 12X1MF steel was explored within the framework of the elasticity model, taking into account their real geometry and the dependence of the material characteristics on temperature. Zones of maximum operating stresses in the connection for different types of welding have been identified. Design and technological solutions aimed at significantly reducing the concentration of stresses and the level of maximum operational stresses are proposed. The obtained optimal project of the welded joint was used at the Burshtyn power plant.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_14.pdf

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕТОНКИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, БЛИЗЬКИХ ДО КРУГОВИХ, ПРИ ДІЇ ЛОКАЛЬНОГО ПОЗДОВЖНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Лілія Рожок

Національний транспортний університет

r.l.s@ua.fm

Функціонально-градієнтні [1] та неперервно-неоднорідні матеріали знаходять широке застосування при виготовленні елементів конструкцій та деталей машин і агрегатів у вигляді циліндричних оболонок різної товщини та форми поперечного перерізу. Використання матеріалів, що мають неперервно змінні в певному напрямку параметри, дозволяє забезпечити виконання відповідних критеріїв міцності конструкцій подібного класу, збільшуючи їх довговічність та надійність. В даній роботі на основі методики, що базується на застосуванні методів відокремлення змінних в двох координатних напрямках з використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є і стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації [2], розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок, близьких до кругових, які виготовлені з неперервно-неоднорідного матеріалу, що знаходяться під дією поздовжнього локального навантаження. Результати отримано у вигляді графіків розподілу полів нормальних переміщень та напружень.

1. *Kushnir R.M., Zhydyk U.V., Flyachok V.M.* Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells // J. Math. Sci. – 2021. – **254** – P. 46–58.
2. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko O.Ya., Rozhok L.S.* Stress State of Non-Thin Nearly Circular Cylindrical Shells Made of Continuously Inhomogeneous Materials // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, № 4 – P. 381–388.

SIMULATION OF THE STRESS STATE OF NON-THIN NON-HOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS WITH A DENT UNDER LONGITUDINAL LOCAL LOADING

On the basis of the method of approximation of functions by discrete Fourier series, the stress state of non-thin cylindrical shells close to circular ones made of continuous-inhomogeneous materials under the action of longitudinal local load was investigated.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_20.pdf

УДК 539.3

ПРУЖНА РІВНОВАГА АНІЗОТРОПНОГО БІМАТЕРІАЛЬНОГО ПІВПРОСТОРУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Кирил Васільєв, Георгій Сулим

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

kirill.all@gmail.com, gtsulym@gmail.com

З використанням методу функцій стрибків, методу інтегральних перетворень Фур'є та методу спряження континуумів різної вимірності побудовано розв'язок базової задачі поздовжнього зсуву анізотропного кусково-однорідного півпростору S_k ($k=1,2$) з навантаженими зусиллями $\tau_k^{j\pm}$ анізотропними внутрішніми і міжфазними тріщинами $L_{j,k}$ ($j=1,...N_k$, $k=1,2,3$). Задача зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано з використанням методу колокацій.

Побудований розв'язок застосовано до поширення розробленого раніше підходу – методу прямого вирізування [1, 2] – на випадок дослідження поздовжнього зсуву кусково-однорідних анізотропних (ортотропних) тіл з прямолінійною межею поділу за наявності внутрішніх і міжфазних тріщин. Достовірність та ефективність цього підходу апробована на прикладі дослідження поздовжнього зсуву біматеріального ортотропного півпростору зі симетрично навантаженою міжфазною тріщиною. Отримані результати обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень у граничних випадках ізотропного матеріалу збіглися з відомими з літератури.

1. *Васільєв К.В., Сулим Г.Т.* Метод прямого вирізування у моделюванні ортотропних тіл з тонкими пружними включеннями за поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 55–68.
2. *Vasil'ev K.V., Sulym H.T.* Method of direct cutting-out in the problems of piecewise homogeneous bodies with interface cracks under longitudinal shear // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, No. 1. – P. 46–62. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04217-w

ELASTIC EQUILIBRIUM OF AN ANISOTROPIC BIMATERIAL HALFSPACE WITH INTERFACIAL CRACK AT LONGITUDINAL SHEAR

The previously developed direct cutting-out method is extended to the case of longitudinal shear of piecewise homogeneous anisotropic bodies with interfacial cracks. The reliability and efficiency of the proposed method has been analyzed on the problem of elastic equilibrium of anisotropic bimaterial halfspace with loaded interfacial crack.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_24.pdf

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФЕКТІВ ТОЧКОВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ ПРИ ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАННЯХ ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ

Григорій Зражевський, Віра Зражевська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

greg.zrazhevsky@knu.ua, vera.zrazhevska@gmail.com

У роботі розглядаються гармонійні коливання лінійно пружного стрижня скінченної довжини, що включає дефекти малих розмірів. Дефекти, можуть мати різну природу і характеристики (пружні, в'язкопружні, пластичні, неоднорідні), що описуються лінійними рівняннями стану, та мають малі геометричні розміри. Будується модель, яка враховує такі дефекти шляхом розташування в центральній точці області дефекту точкової особливості нескінченного порядку. Таким чином, будується гранична задача для диференціального рівняння з гіперсингулярною правою частиною, розв'язок якої еквівалентний вихідній задачі. Вказано просту процедуру для побудови коефіцієнтів гіперсингулярного ряду з точковим носієм, що моделює дефект. Процедура базується на розкладах в нескінченні ряди по малому параметру з коефіцієнтами, що є гіперсингулярними узагальненими функціями. Запропонована техніка застосовується для розв'язання прямої задачі – визначення частот та форм власних коливань стрижня з заданими характеристиками дефектів та оберненої задачі – визначення інтегральних характеристик дефектності стрижня за відомих зсувів частот власних коливань. Запропонований підхід передбачає рекурентне розв'язання граничних задач, що дозволяє отримувати модель, яка описує дефектність з заданою точністю.

SIMULATION OF DEFECTS IN HARMONIC OSCILLATIONS OF THE ELASTIC ROD WITH POINT SINGULARITIES

The paper considers harmonic oscillations of a linearly elastic rod of finite length, which includes defects of small sizes. Defects can have different nature and characteristics (elastic, visco-elastic, plastic, heterogeneous), which are described by linear equations of state and have small geometric dimensions. A boundary value problem is constructed for a differential equation with a hypersingular right-hand side, the solution of which is equivalent to the original problem. A simple procedure for constructing the coefficients of a hypersingular series with a point carrier simulating a defect is indicated. The proposed makes it possible solve the direct problem – determination of the frequencies and forms of natural oscillations of a rod with given characteristics of defects as well as the inverse problem – determination of integral characteristics of the defect of a rod with known shifts in the frequencies of natural oscillations.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_25.pdf

МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТА НИЗЬКОВИМІРНИХ СТРУКТУР

УДК 539.3: 620.198

НАБЛИЖЕНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ТОНКИМИ БАГАТОШАРОВИМИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ ПОКРИТТЯМИ

Віктор Шевчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

shevchuk@iapmm.lviv.ua

У зв'язку з широким використанням на практиці елементів конструкцій з нанесеними захисними покриттями залишається актуальною розробка ефективних підходів до розрахунку напружено-деформованого стану таких систем. При цьому важливо враховувати реальні властивості матеріалу покриття, зокрема неоднорідність та анізотропію, які можуть бути наслідком специфічних особливостей технологічного процесу виготовлення або впливу температурних і фізичних полів.

Для тонких покрить ефективним є підхід, пов'язаний з моделюванням покрить тонкими оболонками з термомеханічними властивостями покриття. При такому підході вплив покрить на стан тіла описується відповідними узагальненими граничними умовами (УГУ), що дає змогу розв'язувати задачі термомеханіки тіл з тонкими покриттями [3].

Для трансверсально-ізотропних покрить при побудові таких УГУ механічного спряження необхідно враховувати й поперечні деформації. Для одношарового покриття такі УГУ побудовано в [4]. З іншого боку, у разі багатошарового ізотропного покриття отримано УГУ термомеханічного спряження тіла із середовищем у праці [2].

У цій роботі узагальнено підхід [2] до розв'язування задач теорії термопружності для тіл з тонкими багатошаровими покриттями для випадку трансверсально-ізотропних властивостей матеріалу покрить.

Виведення УГУ механічного спряження тіла зі середовищем проведено з використанням рівнянь теорії термопружності тонких оболонок. Сукупність рівнянь механічної рівноваги оболонки покриття, геометричних співвідношень між деформаціями і переміщеннями, конститутивних співвідношень, умов ідеального механічного контакту між тілом і покриттям, умови на межі покриття-середовище замінено УГУ механічного спряження при врахуванні

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_01.pdf

температурних деформацій у покритті, які пов'язують компоненти тензора напружень і компоненти вектора переміщень на поверхні поділу тіло-покриття із заданим поверхневим навантаженням на межі покриття-середовище.

Для анізотропних покрить через відмінність між модулями Юнґа трансверсально-ізотропного покриття береться до уваги поперечна деформація кожного шару оболонки як додатковий ступінь свободи [1]. Порівняно з випадком ізотропного покриття, додатково враховуються нормальне поперечне зусилля і моменти першого порядку напружень поперечного зсуву, що виникають у покритті.

Після визначення напружено-деформованого стану тіла на основі рівнянь тривимірної теорії термопружності з використанням УГУ можна знайти напружений стан у покритті за допомогою формул відновлення через граничні значення компонентів тензора напружень і вектора переміщень (у випадку відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло-покриття – тільки напружень).

Отже, визначення термонапруженого стану системи тіло-покриття відбувається у два етапи:

1) розв'язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням УГУ;

2) знаходження температурних напружень в покритті за формулами відновлення.

Ефективність запропонованого підходу ілюструється порівнянням результатів, отриманих за його допомогою, з точним розв'язком тестової задачі про термопружний стан суцільного циліндра з керамічним покриттям.

1. *Василенко А.Т.* Основные соотношения некоторых вариантов уточненных моделей оболочек // *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др.* Статика элементов конструкций. – Киев: «А.С.К», 1999. – 379 с. – Механика композитов: В 12 т / Под общ. ред. А.Н. Гузя. – Т. 8. – С. 78–91.
2. *Шевчук В.А.* Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – Т. 19, № 5. Вип. 15(1). – С. 129–139.
3. *Shevchuk V.A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // Ed. *R.B. Hetnarski*. Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht Heidelberg New York London: Springer, 2014. – **4**. – P. 1942–1953.
4. *Shevchuk V.A., Silberschmid V.V.* Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings // Int. J. Solids Struct. – 2005. – **42**, No. 16–17. – P. 4738–4757.

AN APPROXIMATE APPROACH TO SOLVING PROBLEMS OF THE THEORY OF THERMOELASTICITY FOR BODIES WITH THIN MULTILAYER TRANSVERSELY ISOTROPIC COATINGS

This paper proposes an effective approach to solving thermoelastic problems for bodies with thin multilayer transversely isotropic coatings, which is based on the modeling of such coatings with thin shells with appropriate geometrico-thermo-mechanical properties of a coating. In such an approach, the influence of thin coatings on the thermomechanical state of a body-coating system is described by special generalized boundary conditions.

УДК 539.3

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН БІМЕТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ НЕУСТАЛЕНИМ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПОЛЕМ

Карен Казарян, Роман Мусій, Наталія Мельник

Інститут механіки АН Вірменії,
Національний університет «Львівська політехніка»

ghkarren@gmail.com, roman.s.musii@lpnu.ua, nataliia.b.melnyk@lpnu.ua

Біметалеві пластини (БП) часто використовують як функціональні елементи конструкцій багатьох пристроїв. У процесі роботи цих пристроїв чи технологічної обробки БП, крім силових і теплових фізичних дій, вони зазнають також впливу зовнішніх електромагнітних полів (ЕМП).

Відомі окремі роботи про термообробку БП з допомогою індукційного нагріву усталеним ЕМП. Проте у сучасних технологічних процесах обробки БП, як елементів відповідних пристроїв, все частіше використовують індукційний нагрів неусталеним ЕМП (НЕМП). Дія НЕМП зумовлює виникнення у БП полів температури та напружень. За певних величин і градієнтів цих полів у БП виникають інтенсивності напружень, значення яких можуть досягати межі пружної деформації матеріалів складових шарів БП і, навіть, перевищувати її. Також значення інтенсивності напружень у складових шарах БП у площині їх контакту можуть перевищувати межу міцності з'єднання цих шарів. За таких умов БП втрачають працездатність як конструктивні елементи. Тому дослідження працездатності БП при індукційному нагріві НЕМП, зокрема, імпульсного характеру, є актуальною як науковою, так і інженерно-технічною, проблемою.

Розглядається БП, віднесена до декартової системи координат $OXYZ$. Координатна площина XOY збігається з площиною $z=0$ з'єднання складових шарів БП, яка обмежена основами $z=-h_1$ і $z=h_2$. Тут h_1, h_2 – товщини складових шарів БП, а їх матеріали однорідні, ізотропні і неферомагнітні. Фізико-механічні характеристики цих матеріалів вважаємо сталими і рівними їх середнім значенням в розглядуваному діапазоні зміни температури. На площині $z=0$ з'єднання складових шарів БП виконуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного контактів. Основи $z=-h_1$ і $z=h_2$ перебувають за умов конвективного теплообміну з довкіллям та вільні від поверхневого силового навантаження. За вказаних умов БП зазнає індукційного нагріву НЕМП, зокрема, з модуляцією амплітуди, яке визначається

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_03.pdf

значеннями дотичної до основ БП компоненти $H_y^{(n)}(z,t)$ вектора напруженості магнітного поля, що практично математично описується виразом у вигляді [1]:

$$H_y^{(1)}(-h_1,t) = H_y^{(2)}(h_2,t) = kH_0\left(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}\right)\cos\omega\,. \qquad (1)$$

Тут H_0 – амплітуда синусоїдальних несучих електромагнітних коливань частоти ω; k – нормувальний множник; β_1 і β_2 – параметри, що відповідають часам фронтів наростання і спадання НЕМП тривалості t_i.

Вираз НЕМП, окреслений формулою (1), дає змогу врахувати моменти включення і виключення НЕМП при індукційному нагріві. При моделюванні термонапруженого стану БП за дії НЕМП за частот ω з поза околу резонансних для таких полів [1, 2] термонапружений стан БП в основному визначається теплом Джоуля $Q^{(n)}$, яке зумовлює температурне поле $T^{(n)}$ і компоненти $\sigma_{jj}^{(n)}$ $(j = x, y, z)$ тензора напружень та відповідні їм інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в $n-$му $(n = 1,2)$ складовому шарі БП [2, 3].

Знайдено вирази $T^{(n)}$, $\sigma_{jj}^{(n)}$ та $\sigma_i^{(n)}$ за індукційного нагріву БП НЕМП, окресленого виразом (1). Чисельно проаналізовано ці величини залежно від амплітудно-частотних параметрів НЕМП і часу t_i тривалості індукційного нагріву БП. Встановлено граничні значення цих параметрів, за яких при розглядуваному індукційному нагріві за відомих значень допустимих напружень в шарах БП і такого значення для контактного з'єднання БП в цілому, як конструктивний елемент, втрачає працездатність.

1. *Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В.* Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів, СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
2. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.* Термоупругость электропроводных тел. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.
3. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.

THERMAL STRESS STATE OF BIMETALLIC PLATES UNDER INDUCTION HEATING BY AN UNSTEADY ELECTROMAGNETIC FIELD

A mathematical model for determining the thermal-stress state of a bimetallic plate during its induction heating by an unsteady electromagnetic field is proposed. A methodology for assessing the performance of such a plate depending on the amplitude-frequency parameters of the unsteady electromagnetic field and the time of induction heating of the bimetallic plate is proposed. The limit values of these parameters, at which the bimetallic plate loses its operability as a structural element, have been established.

УДК 539.315

ПРОЦЕСИ ФОРМУВАННЯ НАНОСТРУКТУР ZNO ТИПУ «ЯДРО-ОБОЛОНКА»: МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНОЇ ДИНАМІКИ

Степан Савка, Дмитро Попович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

savka.stepan.92@gmail.com, popovych@iapmm.lviv.ua

У цьому дослідженні ми проаналізували процеси адсорбції газу O на нанокластерах ZnO за допомогою методу молекулярної динаміки з подальшим утворенням наноструктур типу «ядро-оболонка». У ході нашого дослідження було встановлено, що структура, товщина оксидного шару та форма наночастинок залежать від початкових умов формування, зокрема, від початкової концентрації газу та температури системи [1, 2].

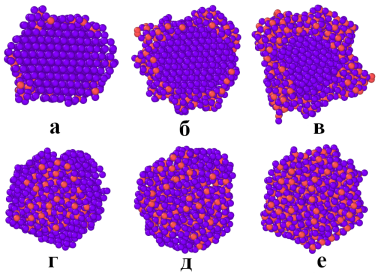


Рис. 1 Зображення зрізів наночастинок при різних концентраціях газу: a) $n = 2.6 \times 10^{19}$ атомів/см^3, $T = 300$ K; b) $n = 6 \times 10^{19}$ атомів/см^3, $T = 300$ K; c) $n = 1.18 \times 10^{20}$ атомів/см^3, $T = 300$ K; d) $n = 2.6 \times 10^{19}$ атомів/см^3, $T = 600$ K; e) $n = 6 \times 10^{19}$ атомів/см^3, $T = 600$K; f) $n = 1.18 \times 10^{20}$ атомів/см^3, $T = 600$K

З наведених на рис. 1 зображень видно, що при підвищенні температури не спостерігається чіткого розмежування між оксидною плівкою та ядром, що призводить до формування нанокластерів ZnO. Це пояснюється тим, що нанокластери з такими розмірами при температурі 600 K починають плавитися, їх структура стає аморфною, а атоми кисню значно легше проникають в глибину наночастинок. У додаток до вищезгаданого, на рис. 1 представлена динаміка зміни товщини оболонки кінцевих нанокластерів при зміні тиску газу. З наведених зображень можна зробити висновок, що із збільшенням початкового тиску газу збільшується товщина оксидної плівки, та структура плівки відрізняється від структури ядра.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_04.pdf

Також експерементально досліджено підвищення чутливості газового сенсора структури типу «ядро-оболонка». У таких гетеросистемах процеси хемосорбції газових компонент визначають висоту енергетичного бар'єру для носіїв заряду на гетерограниці нанокристалічної системи, що призводить до виникнення підвищеної (до одного порядку і більше) газової чутливості порівняно зі звичайним ZnO (рис. 2).

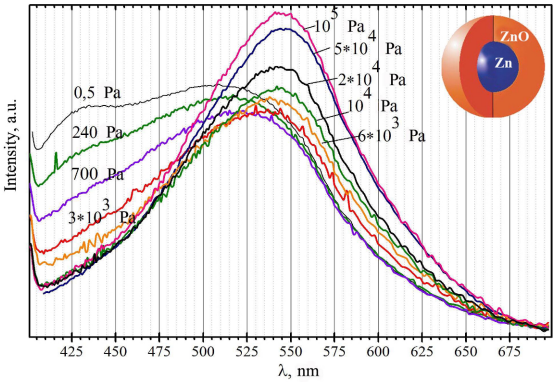


Рис. 2 Спектри фотолюмінесценції наноструктур типу «ядро-оболонка» при різних тисках повітря

1. *Savka S.S., Venhryn Yu.I., Serednytski A.S., Popovych D.I.* Molecular dynamics investigation of the formation processes of Zn-ZnO core-shell nanostructures // J. Phys. Stud. – 2019. – **23**, No. 2. – P. 2602–2607.
2. *Savka S., Venhryn Y., Serednytski A., Popovych D.* Molecular dynamics simulation of adsorption processes on the surface of ZnO nanoclusters // Appl Nanosci. – 2022. – **12**. – P. 673–678.

PROCESSES OF THE FORMATION OF CORE-SHELL ZNO NANOSTRUCTURES: THE MD STUDY

We conducted molecular dynamics (MD) simulations to investigate the process of oxidation of zinc nanoclusters and the subsequent formation of Zn–ZnO "core-shell" nanoclusters. The dependence of the structure, shape, and thickness of the oxide layer of the resultant nanoparticles on the initial oxygen density and temperature of the system was investigated. MD simulations were performed at three different initial temperatures, three different initial oxygen concentrations, and two initial sizes of Zn nanoclusters. The simulations revealed that variations in the initial conditions led to differences in the structure, thickness of the oxide layer, and shape of Zn–ZnO "core-shell" nanoparticles. With an increase in the initial oxygen density, the thickness of the oxide layer of the nanoparticles increased up to a certain limit. The results showed that at a temperature of 300 K, the nucleus structure of the nanoclusters was retained, but the shell structure was mostly amorphous. At 600 K, the structure of the clusters was mostly amorphous, and there was no separation between the core and the shell. The percentage of the amorphous structure increased with the gas concentration due to the growth of the oxide shell. Our results are consistent with both experimental observations and previous molecular dynamics simulations.

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Євгеній Ірза

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

evgen_irza@ukr.net

Запропоновано методику розрахунку термонапруженого стану структурно неоднорідних тіл при тепловому навантаженні, яка передбачає:

- математичну постановку задачі;
- розробку числового алгоритму пошуку розв'язку;
- програмну реалізацію числового алгоритму.

Пропонується класична постановка задач по розрахунку термонапруженого стану структурно неоднорідних тіл при тепловому навантаженні. Спочатку вибираються параметри стану. Для розглядуваних процесів термообробки типовими параметрами, які визначають термонапружений стан конструкції, є такі параметри: t – температура; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій; $\vec{u}$ – вектор переміщень; $\vec{p}$ – вектор-функція силового навантаження; $h(\tau)$ – функція теплового навантаження і т.п. Неоднорідна структура тіла відображається фізико-механічними характеристиками, які є залежними від просторової координати і температури.

Наступним етапом є запис системи рівнянь

$$L_i\left(\vec{r},\tau,t,\hat{\sigma},\hat{\varepsilon},\vec{p},\vec{u},h\right)=0\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{1}$$

які пов'язують ці параметри з фізичними і геометричними параметрами тіла, і зовнішніми діями. Тут $\vec{r}$ – незалежна змінна в області Ω, яку займає тіло; τ – час. Через L_i в (1) позначено диференціально-інтегральні оператори по просторових координатах і часу.

Систему рівнянь (1) у загальному випадку можна розглядати як систему нелінійних диференціально-інтегральних рівнянь. Припускається, що початкові й крайові умови враховано в системі (1).

Система рівнянь (1) при заданих теплових навантаженнях h, зовнішній силовій дії $\vec{p}$ і параметрах конструкції повинна бути замкненою і визначати параметри стану, які характеризують термонапружений стан тіла. Відшукан-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_05.pdf

ня параметрів стану при заданій функції $h(\tau)$, яка характеризує теплове навантаження, є метою даної роботи.

Оскільки вихідна система диференціально-інтегральних рівнянь є нелінійною і геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто є досить складною, виникає необхідність використання універсальних числових методів для розв'язування даного класу задач. Одним з таких методів є метод зважених залишків в поєднанні з скінченно-елементним підходом [1].

В розглядуваному підході алгоритм розв'язання даних задач методом зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів включає:

- дискретизацію області скінченними елементами;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання на цій основі системи алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах і алгоритм розв'язку цієї системи.

Застосування методу зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів до системи рівнянь (1) приводить до системи алгебраїчних рівнянь для невідомих $\{U\}$ значень функції у вузлах розбиття. Отриману систему можна записати як

$$[K]\{U\} = \{F\}. \qquad (2)$$

Тут: $[K]$– глобальна матриця жорсткості; $\{F\}$ – вектор навантаження, які мають конкретний вигляд в залежності від порядку диференціально-інтегрального оператора L (при цьому крайові умови враховані в отриманій системі). В загальному випадку система алгебраїчних рівнянь (2) є нелінійною і може бути розв'язана за допомогою відповідного ітераційного методу.

Програмна реалізація алгоритму розрахунку термонапруженого стану полягає у створенні програмної оболонки для персональних комп'ютерів на основі запропонованого числового алгоритму. Основними принципами програмної реалізації запропонованої розрахункової схеми є універсальність і простота в користуванні.

Як приклад, розв'язано задачу знаходження термонапруженого стану у пустотілому циліндрі, виготовленого з структурно неоднорідного матеріалу, який перебуває під дією теплового навантаження. Проведений числовий аналіз отриманих розв'язків.

1. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* Finite element method: Vol 1. The Basis. – London: "Butterwoth Heinemann", 2000. – 689 p.

CALCULATION OF THERMAL-STRESSED STATE OF STRUCTURALLY NONHOMOGENEOUS BODIES

A method of calculating the thermal stress state of structurally heterogeneous bodies under thermal load is proposed.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВОГО СТАНУ ДВОХ ІДЕАЛЬНО КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ШАРІВ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Оксана Вовк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

vovk0108@gmail.com

У роботі розв'язано нелінійну задачу теплопровідності для двох ідеально контактуючих термочутливих шарів за складного теплообміну з довкіллям. Для побудови розв'язку використано аналітично-числовий підхід, апробований раніше на аналогічних нестаціонарних задачах теплопровідності для безмежних та напівбезмежних термочутливих тіл [1, 2]. Особливість підходу полягає у використанні методів послідовних наближень, лінеаризувальних параметрів, інтегрального перетворення Лапласа та його обернення за адаптованою формулою Прудникова. Задача теплопровідності для шарів є ускладненою врахуванням ще однієї не лінійності, зумовленої додатковою межовою умовою. Таким чином, нелінійними у вихідній задачі є рівняння теплопровідності та дві умови конвективно-променевих теплообмінів з оточуючими середовищами через поверхні шарів. Перевірку достовірності отриманих результатів виконано в часткових випадках, коли на поверхнях шарів задано сталі температури.

Визначимо нестаціонарні температурні поля t_j двох ідеально контактуючих термочутливих плоско паралельних шарів, через поверхні яких відбувається променево-конвективний теплообмін з середовищами сталих температур t_{c_j}. Урахування таких умов приводить до розв'язування нелінійної задачі теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^j(t_j)\frac{\partial t_j}{\partial z}\right)=c_v^j(t_j)\frac{\partial t_j}{\partial \tau},\ j=\begin{cases}1, 0<z<z_1;\\ 2, -z_2<z<0;\end{cases} \tag{1}$$

за початкових

$$t_j\big|_{\tau=0}=t_p, \tag{2}$$

крайових

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_06.pdf

$$\left\{\lambda_t(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}+\alpha_1\left(t_1-t_{c1}\right)+\sigma\varepsilon_1(t_1^4-t_{c1}^4)\right\}\Big|_{z=z_1}=0\,, \tag{3}$$

$$\left\{\lambda_t(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z}+\alpha_2\left(t_2-t_c\right)+\sigma\varepsilon_2(t_2^4-t_{c2}^4)\right\}\Big|_{z=-z_2}=0 \tag{4}$$

та контактних умов

$$t_1\big|_{z=0}=t_2\big|_{z=0}\,,\quad \left[\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z}-\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right]_{z=0}=0\,, \tag{5}$$

де α_j – коефіцієнти теплообміну, а ε_j – ступені чорноти поверхонь шарів; $\lambda_t^{(j)}(t_j)$, $c_v^{(j)}(t_j)$ – коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності їх матеріалів відповідно ($j=1,2$); σ – стала Стефана–Больцмана.

Запропонований аналітично-числовий підхід передбачає зведення розв'язування вихідної нелінійної задачі (1)–(5) до певного ітераційного процесу, на кожному кроці якого розв'язуємо лінійну крайову задачу теплопровідності з уточненими на попередньому кроці величинами. За початкове наближення беремо розв'язок лінеаризованої задачі за умов конвективних теплообмінів з довкіллям на поверхнях шарів. Зауважимо, що застосування методу послідовних наближень дозволило не накладати обмежень на характер зміни теплових характеристик матеріалів шарів та мінімізувати кількість лінеаризувальних параметрів, а використання адаптованої формули Прудникова вирішило проблему знаходження оригіналу перетворення Лапласа, яка часто виникає в таких дослідженнях.

На основі отриманих розв'язків досліджено тепловий стан кусково-однорідної структури, яка складається з двох шарів, виготовлених з титанового сплаву та окису цирконію, за різних комбінацій межових умов. Оцінку точності наближеного розв'язку проведено в частковому випадку шляхом порівняння отриманого значення температури на поверхні із заданим за умовою.

1. *Вовк О.М.* Використання числового обернення перетворення Лапласа в задачах теплопровідності контактуючих термочутливих тіл // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Вип. 15. – С. 129–136.
2. *Вовк О.М., Соляр Т.Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару за складного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 3. – С. 113–122.

ANALYSIS OF THE THERMAL STATE OF TWO PERFECTLY CONTACTING THERMOSENSITIVE LAYERS UNDER THE COMPLEX HEAT EXCHANGE

A solution of nonlinear thermal conductivity problem for two perfectly contacting thermosensitive layers under radial-convective heat exchange with the environment using the analytical-numerical approach was constructed. The approach is based on the use of methods of successive approximations, linearizing parameters, Laplace integral transformation and its inversion according to Prudnikov's formula.

УДК 539.3

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФГМ НА ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ

Галина Гарматій, Богдан Калиняк, Мирослав Кутнів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

galynaharmatiy@gmail.com, b-kalynyak@litech.net, kutniv@yahoo.com

Розв'язано незв'язану квазістатичну задачу термопружності для порожнистої кулі з урахуванням залежності від температури і координати термомеханічних характеристик компонент функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ) і змінної в часі температури середовищ на поверхнях. Є чимала кількість моделей подання характеристик ФГМ через властивості їх складових. Тут розглянуто вплив температурної залежності характеристик складових матеріалу на розподіл температури і напружень у порожнистій кулі на основі моделей усереднення простої суміші [4] і модифікованої моделі простої суміші [3]. Для даних моделей гомогенізації властивостей вибраного двокомпонентного матеріалу досліджено вплив температурної залежності теплофізичних і механічних характеристик на термонапружений стан кулі.

Оскільки крайова задача теплопровідності для визначення розподілу температурного поля у порожнистій ФГМ кулі за умов конвективного теплообміну є нелінійною, то для її розв'язування використовувалися чисельні методи, а саме метод прямих. У цьому підході процес розв'язування складається з двох частин: просторової дискретизації та чисельного інтегрування по часу. В процесі просторової дискретизації диференціальне рівняння з частинними похідними та крайові умови за допомогою заміни диференціальних співвідношень по радіальній координаті їх різницевими аналогами перетворюється в систему звичайних диференціальних рівнянь по часовій змінній, яка залишається неперервною. Диференціальний оператор по просторовій змінній має дивергентний вигляд, тому для просторової різницевої апроксимації використано інтегро-інтерполяційний метод [1]. Для чисельного інтегрування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь застосовувалися формули диференціювання назад від першого до шостого порядків точності, які є $A(\alpha)$ –стійкими [2]. Напружений стан, викликаний температурним полем та силовими навантаженнями, визначено на основі зведення

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_08.pdf

задач пружності до інтегральних рівнянь методом безпосереднього інтегрування [5].

Дослідження здійснювали в діапазоні температур від 300 К до 600 К з експоненціальним зростом у часі температури на межах кулі, виготовленої з металокерамічного матеріалу. Найбільша різниця між температурними полями, обчисленими для залежних від температури характеристик за різними моделями усереднення, досягається всередині порожнистої кулі в моменти часу до виходу на стаціонарний режим. Аналіз отриманих результатів дослідження показує, що найбільшу різницю між напруженнями, обчисленими при сталій температурі з урахуванням температурної залежності характеристик ФГМ отримано при часах, які відповідають стаціонарному розподілу температури, а також в початкові моменти часу. Вплив температурної залежності характеристик складових ФГМ порівняно з нетермочутливим матеріалом може становити понад 25% для колових напружень. У даних температурних межах термонапруження не досягають значень, які є співмірними з межами міцності кераміки на стиск і розтяг. Впливи температурної залежності складових вибраного ФГМ на термопружний стан порожнистої кулі, обчислені для різних моделей усереднення, суттєво не відрізняються.

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
2. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. – 614 p.
3. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and hollow sphere of a functionally gradiated material // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471–487.
4. *Reddy J.N.* Thermomechanical behavior of functionally graded materials // Final Report for AFOSR Grant F49620-95-1-0342. CML Report 98-01. – 1998. – 87 p.
5. *Tokovyy Yu, Ma C.-C.* The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – New Castle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 342 p.

THE INFLUENCE OF THE TEMPERATURE DEPENDENCE OF THERMO-MECHANICAL CHARACTERISTICS OF FGM ON THE THERMO-STRESSED STATE OF A HOLLOW SPHERE

The uncoupled quasi-static problem of thermoelasticity for a hollow sphere was solved, taking into account the temperature dependence of the thermomechanical characteristics of the components of the functional gradient material (FGM). The temperature field has been determined taking into account the complex heat exchange with media of time-varying temperature. The nonlinear non-stationary boundary value problem of thermal conductivity was solved by the numerical method of the lines. The corresponding problem of thermoelasticity was solved by its reduction to integral Fredholm equations of the second kind and replacing the integral with a quadrature formula. For various models of homogenization of the properties of the selected metal-ceramic two-component material the influence of the temperature dependence of thermophysical and mechanical characteristics on the thermostressed state of the hollow sphere has been investigated.

УДК 539.3

ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОЇ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ МІКРОІНЕРЦІЇ ТА ФЛЕКСОДИНАМІЧНОГО ЕФЕКТУ

Ольга Грицина, Мар'ян Грицина

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Інститут будівництва та архітектури Словацької академії наук

olha.hrytsyna@savba.sk, maryan.hrytsyna@savba.sk

З використанням варіаційного принципу Гамільтона сформульовано систему балансових рівнянь та крайові умови лінійних некласичних задач локально градієнтної електромеханіки. Згадана система рівнянь враховує вплив мікроструктури, мікроінерції та динамічного флексоелектричного ефекту на динамічну поведінку поляризовних неферомагнітних пружних тіл. Вона ґрунтується на градієнтного типу рівняннях стану локально градієнтної теорії діелектриків [1], яка враховує вплив вплив мікроструктури матеріалу на поведінку поляризовних тіл. При записі варіаційного рівняння враховано, що густина кінетичної енергії, окрім стандартного інерційного доданку, пропорційного вектору швидкості, містить також доданок, пропорційний градієнту вектора швидкості, та доданок, який включає часові похідні від вектора поляризації:

$$K = \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2}\rho l_* \dot{u}_{i,j}\dot{u}_{i,j} + \rho M_{ij}\dot{u}_i\dot{\pi}_j^e \,.$$

Тут ρ – густина маси матеріалу, u_i та π_j^e – компоненти вектора переміщення та питомої поляризації, l_* – характерна віддаль для мікроінерції, M_{ij} – флексодинамічні коефіцієнти, крапка над символом відзначає похідну по часу. Зазначимо, що характерна віддаль для мікроінерції тісно пов'язана з мікроструктурою матеріалу (сталою гратки кристалічного матеріалу, розміром зерна тощо). За такого опису у рівнянні балансу лінійного моменту порівняно з класичною теорією виникають доданки, пропорційні другій похідній по часу від вектора поляризації та мішаним похідним від вектора переміщення по часовій та просторових змінних. Згадані доданки контролюють вплив динамічного флексоелектричного ефекту та мікроінерції на механічний рух твердих діелектричних тіл. Показано, що отримана система рівнянь угоджується з ре-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_09.pdf

зультатами, отриманими Юдіним та Таганцевим [2] у рамках узагальненої теорії флексоелектрики, що враховує залежність енергії деформації від градієнта тензора деформації. Аналіз отриманих результатів засвідчив, що сформульована система рівнянь описує електромеханічну взаємодію у діелектричних матеріалах із високим рівнем симетрії кристалічної гратки. Вона є корисною для вивчення поверхневих і розмірних ефектів у дрібномасштабних структурах, а також дослідження впливу мікроструктури матеріалу на статичний та динамічний відгуки пружних тіл, які працюють на високих частотах.

З використанням рівнянь локальної градієнтної електропружності проаналізовано поширення плоскої гармонічної хвилі у безмежному ізотропному діелектрику. Показано, що плоска поздовжня пружна хвиля є дисперсійною на високих частотах через вплив динамічного флексоелектричного ефекту. Дисперсія вираженіша у випадку коротких хвиль. Отримані результати можуть бути використані для теоретичного аналізу поширення високочастотних поверхневих і плоских хвиль у поляризовних пружних структурах.

Роботу виконано за фінансової підтримки Slovak Research and Development Agency (грант номер SK-UA-21-0010) та Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (грант номер VEGA-2/0061/20).

1. *Hrytsyna O., Kondrat V.* Local gradient theory for dielectrics: fundamentals and applications. 1st ed. – Singapore: Jenny Stanford Publishing Pte. Ltd., 2020. – 312 p.
2. *Yudin P.V., Tagantsev A.K.* Fundamentals of flexoelectricity in solids // Nanotechnology. – 2013. – **24**. – C. 432001.

VARIATIONAL FORMULATION OF BOUNDARY PROBLEMS OF LOCAL GRADIENT ELECTROELASTICITY INCORPORATING MICRO-INERTIA AND FLEXODYNAMIC EFFECT

The non-classical theories of electroelasticity are extensively used to study wave propagation in dielectrics and the mechanical response of small-scale structures to dynamic loads. In this work, using the Hamilton variation principle and the gradient-type constitutive relations of the local gradient electrothermoelasticity, the governing equations and corresponding boundary conditions for piezoelectric solids are derived. To take the micro-inertia and dynamic flexoelectric effects into account, it is assumed that the kinetic-energy density function includes three terms. The first term contains the velocity vector (the classical inertia term), the second term involves the velocity gradients whereas the third one includes the first-time derivatives of the polarization vector. As a result, within this higher-grade theory, the linear moment balance equation additionally contains the phenomenological coefficients controlling the dynamics of polarization and one material constant (the micro-inertia length scale parameter) to capture the micro-inertia effect. Making use of the obtained system of governing equations, the propagation of a plane harmonic wave is analyzed. It is shown that the local gradient theory of dielectrics with dynamic flexoelectric effect allows for capturing the experimentally observed phenomenon of high-frequency dispersion of a longitudinal elastic wave. This research can be useful for the study of surface and size effects in small-scale structures as well as static and dynamic responses of microstructure-dependent solids having complex shapes and operating at high frequencies.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У РАДІАЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРАХ

Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

tokovyy@iapmm.lviv.ua

Домінуюча стратегія вивчення теплової та механічної відповіді багатошарових структур ґрунтується на зведенні до допоміжних крайових задач, сформульованих для кожного шару. Побудовані для кожної такої задачі розв'язки «зшивають» з використанням умов контакту шарів, а для крайніх шарів використовують умови, задані на відповідних поверхнях. Головною перевагою цієї стратегії є фізична «прозорість», а також той факт, що допоміжні задачі, як правило, можуть бути розв'язані класичними методами. Вагомим аргументом проти цієї стратегії є низька ефективність аналізу великої кількості неоднорідних шарів контрастної товщини. Останній випадок краще розглядати за допомогою альтернативної стратегії розв'язування такого класу задач, в рамках якої багатошаровий композит вважається єдиним цілим із кусково-змінними властивостями, що передбачає наявність розривів властивостей матеріалу на межах шарів. Ця обставина робить процес розв'язування менш чутливим до кількості та товщини шарів, позаяк його ефективність безпосередньо залежить від методу розв'язування некласичних задач для рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами.

У цій роботі розвинуто підхід до розв'язування двовимірних стаціонарних задач теплопровідності для порожнистого циліндра, коефіцієнт теплопровідності якого є гладкою або кусково-змінною функцією радіальної координати за змінного в коловому напрямку температурного навантаження внутрішньої та зовнішньої поверхонь. З використанням методу безпосереднього інтегрування в рамках єдиного підходу сформульовані задачі теплопровідності зведено до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, розв'язки яких побудовано у явному вигляді з використанням методу резольвентного ядра. Проаналізовано ефективність запропонованого підходу для аналізу теплового стану неперервно неоднорідного та багатошарового кільця. Зокрема, для заданих на внутрішній $\rho = k$ та зовнішній $\rho = 1$ поверхнях температур $T(\varphi) = T_0$, $T(\varphi) = T_0\left(d_0 + d_2\cos(2\varphi)\right)$, де $\rho = r/R_{\text{out}}$, $k = R_{\text{in}}/R_{\text{out}}$, $R_{\text{in}}, R_{\text{out}}$ – внутрішній та зовнішній радіуси кільця, а r, φ – радіальна та колова координати, T_0 – стала у розмірності температури та d_0, d_2 – безрозмірні параметри, досліджено розподіли температури за коефіцієнта теплопровід-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_10.pdf

ності $\lambda(\rho) = \lambda_0 \rho^{æ}$, $\lambda_0 = \text{const}\,[°\text{K}/\text{m}^2]$ (рис. 1).

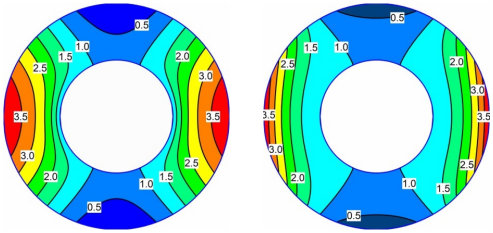


Рис. 1 Розподіл температури у кільці $k = 0.5$ при $æ = 3$ (ліворуч) та $æ = -3$ (праворуч)

Температуру у циліндрі $\lambda(\rho) = \lambda_0 \{k^{æ}$, при $k < \rho < \rho_1$, 1, при $\rho_1 < \rho < 1\}$ за таких же умов та різної товщини шарів наведено на рис. 2.

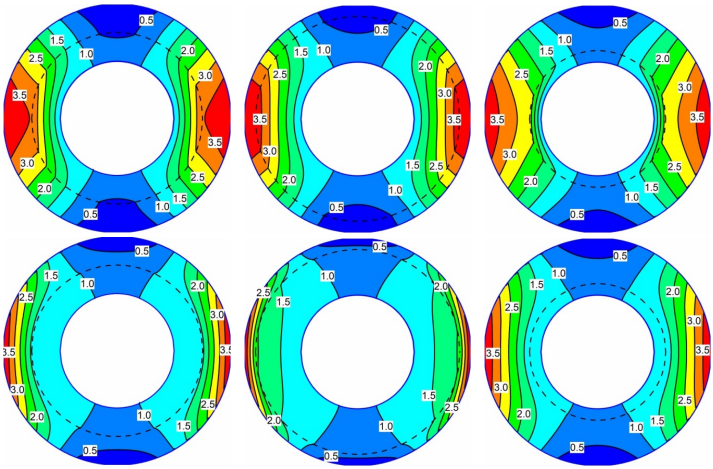


Рис. 2 Розподіл температури у кільці $k = 0.5$ при $æ = 3$ (перший рядок) та $æ = -3$ (другий рядок), $\rho_1 = 0.75$, $\rho_1 = 0.90$, $\rho_1 = 0.60$ (перша, друга і третя колонки)

Роботу виконано за підтримки українсько-словацького проєкту «Вплив нано-, мікро-, та мезо-неоднорідностей на макрохарактеристики термомеханічної поведінки композитних елементів конструкцій» (№ д. р. 0122U002392).

DETERMINATION OF TWO-DIMENSIONAL THERMAL FIELDS IN RADIALLY INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDERS

An approach on constructing analytical solutions to two-dimensional heat-conduction problems for radially inhomogeneoys hollow cylinders is suggested for the cases when the heat-conduction coefficient can vary within the radial coordinate in a continuous or a discontinuous manner.

УДК 539.3

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Микола Юзв'як, Юрій Токовий

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

yuzvyaky@ukr.net, tokovyy@gmail.com

Однією з найвідоміших задач механіки деформівного твердого тіла є задача про пружну рівновагу прямокутного паралелепіпеда, яку ще в 1852 році сформулював Ґабріель Ляме. Незважаючи на численні спроби на сьогодні, наскільки відомо, не існує аналітичного розв'язку цієї проблеми в загальній тривимірній постановці. Основна складність при побудові точного аналітичного розв'язку полягає в одночасному задоволенні вихідних рівнянь (рівнянь рівноваги та рівнянь суцільності) та повного набору межових умов, заданих на всіх гранях паралелепіпеда. Для подолання таких ускладнень розроблено низку наближених аналітичних підходів, які у переважній більшості, ґрунтуються на реалізації таких основних стратегій: точне задоволення ключових рівнянь при наближеному задоволенні межових умов (методи перехресної суперпозиції, однорідних розв'язків та ін.), або забезпечення точного виконання умов на межі при наближеному задоволенні ключових рівнянь (методи безпосереднього інтегрування, поліномів Горві та ін.), або ж наближене задоволення межових умов та ключових рівнянь (низка варіаційних та числових підходів).

В цій роботі в рамках другої стратегії пропонується побудова розв'язку на основі узагальнення методу безпосереднього інтегрування, що полягає у поданні компонент тензора напружень через три скалярні функції, названі функціями Вігака (в честь засновника методу професора В.М. Вігака). Такий підхід був успішно апробований при розв'язуванні задач теорії термопружності для прямокутної області [1], прямокутного паралелепіпеда [2] та задач пружності та термопружності для порожнистого та суцільного циліндрів скінченної довжини [3, 4].

Основна ідея полягає у введенні трьох функцій Вігака $\mathcal{V}_i \ \ (i = x, y, z)$ за формулами

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} = -\mathcal{V}_y, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} = -\mathcal{V}_x,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = \mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x. \tag{1}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_12.pdf

Інтегрування співвідношень (1) з врахуванням всіх межових умов дає змогу виразити шукані компоненти тензора напружень через уведені функції та задані зовнішні навантаження. На основі знайдених співвідношень, що тотожно задовольняють рівняння рівноваги, межові умови, задані для різних компонент тензора напружень еквівалентно заміняються інтегральними умовами на введені функції Вігака. Самі ж функції є розв'язками ключової системи інтегро-диференціальних рівнянь суцільності. Крім того в процесі інтегрування формул (1) знаходимо інтегральні умови рівноваги для заданих зовнішніх навантажень та умови погодження для дотичних зусиль на відповідних ребрах паралелепіпеда.

З використанням запропонованого методу послідовних наближень розв'язування отриманої зв'язаної системи рівнянь суцільності зводиться до послідовності розв'язування плоских задач пружності у відповідних поперечних перетинах паралелепіпеда. При цьому використовується метод відокремлення змінних та розвинення заданих і шуканих функцій у відповідні ряди за побудованими повними ортогональними системами власних та приєднаних функцій. Як результат, шукані функції записуються у вигляді тривимірних тригонометричних рядів, коефіцієнти яких визначаються відповідними рекурентними співвідношеннями. Наведено числові результати при різних способах силового навантаження та співвідношеннях граней прямокутного паралелепіпеда.

1. *Vihak V.M., Yuzvyak M.Y., Yasinsky A.V.* The solution of plane thermoelasticity problem for rectangular domain // J. Thermal Stresses. − 1998. − **21**, No. 5. − P. 545−562.
2. *Yuzvyak M., Tokovyy Y.* Thermal stresses in an elastic parallelepiped // J. Thermal Stresses. − 2022. − **45**, No. 12. − P. 1009−1028.
3. *Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В.* Пружна рівновага порожнистого циліндра скінченної довжини за осесиметричного силового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2021. − **64**, № 3. – С. 65–89.
4. *Yuzvyak M., Tokovyy Y., Yasinskyy A*. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // J. Thermal Stresses. − 2020. − **44**, No. 3. − P. 359−376.

ELASTIC EQUILIBRIUM OF A RECTANGULAR PARALLELEPIPED

A semi-analytical algorithm is presented for solving a three-dimensional elasticity problem for a rectangular parallelepiped. By generalizing the direct integration method, the problem is reduced to the determination of three Vihak key functions introduced as the integrals of the equilibrium equations. All boundary conditions given for different stress tensor components are equivalently replaced by integral conditions for the introduced functions. The governing system of integrodifferential equations for the Vihak functions is derived based on the compatibility equations in terms of stresses. Method of successive approximations is used to construct the solutions of the obtained coupled system that implies reducing to the sequence of solving plane problems of elasticity in the corresponding cross-sections of the parallelepiped. A numerical analysis of the stress state of the parallelepiped under different types of power loads is presented.

УДК 539.9, 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПОВЕРХНІ НА ГУСТИНУ ЙОНІВ У НАПІВОБМЕЖЕНИХ МЕТАЛЕВИХ СИСТЕМАХ

Петро Костробій, Ірина Рижа

Національний університет «Львівська політехніка»

petro.p.kostrobii@lpnu.ua, iryna.a.ryzha@lpnu.ua

Досягнення в розвитку нанотехнологій зумовили різке зростання досліджень, спрямованих на побудову моделей, що адекватно описують багаточисельні експериментальні дослідження наносистем [1].

Так як сучасні, експериментально отримані наносистеми характеризуються розмірами порядку 10 нм, то їх фізичні властивості сильно залежать від розмірів (так званий «квантово-розмірний ефект») [2].

Однією з таких характеристик є густина ρ йонної підсистеми, яка може змінюватися біля поверхні поділу «метал–вакуум». Ця зміна зумовлена наявністю біля поверхні поділу (в області вакууму) приповерхневого електронного шару [2], товщина якого сягає порядку двох періодів ґратки. Це зі свого боку приводить до зміни дискретної ґраткової структури йонної підсистеми.

Для опису такої зміни використано запропонований квантово-статистичний підхід до моделювання металевих систем з поверхнею поділу «метал–вакуум» [2].

Використання такого підходу дозволило отримати ефективний гамільтоніан йонної підсистеми в наближенні парних взаємодій між йонами:

$$H = H_0 + \sum_{n=1}^{N} \Phi_1\left(\vec{R}_n\right) + \sum_{n,n'=1}^{N} \Phi_2\left(\vec{R}_n, \vec{R}_{n'}\right), . \qquad (1)$$

де $H_0 = \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n^2}{2M}$ – гамільтоніан вільних йонів масою M та імпульсом $\vec{P}_n$ ($P_n \cdot d \ll 1$, d – період ґратки); N – число йонів у ґратковій структурі; $\Phi_1\left(\vec{R}_n\right)$ та $\Phi_2\left(\vec{R}_n, \vec{R}_{n'}\right)$ – відповідно одночастинковий потенціал (поява якого зумовлена електрон–йонною взаємодією) та потенціал парної ефективної взаємодії між йонами; $\vec{R}_n$ – радіус-вектор, що описує положення йона у ґрат-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_14.pdf

ковій структурі.

Поклавши в (1) $\vec{R}_n = \vec{R}_n^0 + \vec{\xi}_n$, де $\vec{R}_n^0$ – радіус-вектор йона у відсутність поверхні поділу, в квадратичному по $\left|\vec{\xi}_n\right|$ наближенні розраховано вільну енергію F моделі (1) і з умови

$$\vec{\nabla}_\xi F = 0 \tag{2}$$

отримано та розв’язано рівняння для зміщень $\vec{\xi}_n$, які мінімізують вільну енергію F.

Отримано вирази для діагональної складової тензора напружень σ_{ik} з урахуванням умов рівноваги на поверхні. Це дозволяє розрахувати зміну об’єму елементарної комірки приповерхневих йонних шарів, яка зі свого боку дозволить отримати зміну густини йонів у приповерхневій області металу.

1. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Основи механіки локально неоднорідних пружних тіл. Основи наномеханіки II. – Львів: Растр-7, 2014. – 167 с.
2. *Ваврух М.В., Костробій П.П., Маркович Б.М.* Базисний підхід в теорії багатоелектронних систем. – Львів: Растр-7, 2017. – 510 с.

MODELING OF THE SURFACE INFLUENCE ON THE ION DENSITY IN SEMI-INFINITE METALLIC SYSTEMS

We propose and investigate a mathematical model for describing the displacement of near-surface ion layers and changes in ion density in the near-surface region in metallic systems with a “metal-vacuum” separation surface.

УДК 539.3

КВАЗІСТАТИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ШАРУВАТОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНОГО ЦИЛІНДРА ЗА НЕЛІНІЙНИХ ТЕПЛОВИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Борис Процюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

borys.protsiuk@gmail.com

Запропоновано методику визначення одновимірних нестаціонарних температурних полів та зумовлених ними напружень у шаруватих циліндрах із функціонально-градієнтними складовими за урахування теплового випромінювання, поверхневих навантажень та осьової деформації.

Розв'язання задачі теплопровідності передбачає апроксимацію теплофізичних характеристик кусково-сталими функціями радіальної координати та знаходження у фіксовані моменти часу температур обмежувальних поверхонь із рекурентних лінійних співвідношень. При цьому використано функцію Гріна нестаціонарної задачі теплопровідності для багатошарового циліндра, лінійні сплайни і узагальнені функції.

Деформації і напруження визначено з використанням аналітичного розв'язку системи інтегро-алгебричних рівнянь, в яких коефіцієнти Ламе та шукані переміщення і радіальні деформації входять в інтегральні оператори Вольтерри, Фредгольма та як значення на обмежувальних поверхнях шарів. Ці рівняння отриманні із залученням функції Гріна задачі пружності для багатошарового циліндра зі сталими фізико-механічними характеристиками (ФМХ) шарів. Зазначений розв'язок отримано методом послідовних наближень, який обмежений лише першим наближенням. За нульове наближення взято розв'язок задачі термопружності для циліндра з кусково-сталими ФМХ.

Методика апробована на задачі термопружності для тришарового функціонально-градієнтного циліндра за нагріву його зовнішньої поверхні тепловим потоком і відводу з неї потоку теплового випромінювання.

1. *Процюк Б.В.* Квазістатичний термопружний стан шаруватого функціонально градієнтного циліндра за урахування теплового випромінювання // Мат.методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1–2. – С. 146–157.

QUASI-STATIC THERMOELASTIC STATE OF A LAYERED FUNCTIONALLY GRADIENT CYLINDER UNDER NONLINEAR THERMAL BOUNDARY CONDITIONS

A method of determining one-dimensional non-stationary temperature fields and the stresses caused by them in layered cylinders with functional gradient components, taking into account thermal radiation, surface loads and axial deformation, is proposed.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_13.pdf

UDC 539.315

NANOSTRUCTURING OF THE SI SURFACE UNDER THE ACTION OF LASER PULSES

Ivan Mohylyak, Dmytro Popovych

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine

mohylyak@gmail.com, popovych@iapmm.lviv.ua

Over the past decade, nonlinear interactions between powerful laser pulses and materials have opened great opportunities in the field of laser micro-nanostructuring [1]. Experimental studies of the features of the formation of laser-induced periodic surface nanostructures on the surface of silicon wafers in the zone of action of millisecond and nanosecond high-intensity laser pulses are conducted in the work. The results of microscopic investigations by electron microscope of periodic structures formed on the Si surface with crystallographic orientation (111), (100) are presented. Different types of periodic structures were obtained, such as micropyramids with square and triangular bases. Previous studies have interpreted that the LIPSS is formed by the interference between the incident laser field and the surface electromagnetic wave formed at the rough surface such as surface plasmon polaritons. Thus, the structural shape of the LIPSS can be easily manipulated by changing the optical parameters, such as polarization, incident angle, and input wavelengths [2]. The obtained results extend the idea of nonequilibrium melting and crystallization processes of semiconductors and can be used for controlled surface structuring for the purposes of micro-nanoelectronics.

1. *Venger Ye.F., Semchuk O.Yu., Havrylyuk O.O.* Lazer-indukovani nanostruktury v tverdykh tilakh. – Kyiv: Akademperiodyka, 2016. – 236 p.
2. *Mohylyak I.A., Bonchyk O.Yu., Korniy S.A., Kiyak S.G., Popovych D.I.* Laser formation of periodic micro- and nanostructures on the surface of monocrystalline silicon // Physics and Chemistry of Solid State. – 2020. – **21**, No 2. – P. 215–218.

НАНОСТРУКТУРУВАННЯ ПОВЕРХНІ КРЕМНІЄВИХ ПЛАСТИН ПРИ ДІЇ ЛАЗЕРНИХ ІМПУЛЬСІВ

Наведено результати експериментальних досліджень процесів мікро- і наноструктурування поверхні монокристалічного кремнію в зонах дії мілісекундних і наносекундних лазерних імпульсів. Наведені результати мікроскопічних досліджень періодичних структур, які формуються на поверхнях з кристалографічною орієнтацією (111) і (100). Одержані результати можуть бути використані для оптимізації режимів імпульсного лазерного впливу з метою контрольованого наноструктурування поверхні напівпровідників для цілей мікро- наноелектроніки.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТЕПЛОВОГО СТАНУ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Галина Гарматій, Михайло Глобчак

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Національний університет «Львівська політехніка»

galynaharmatiy@gmail.com, mykhailo.v.hlobchak@lpnu.ua

Визначено розподіл температурного поля в довгому порожнистому циліндрі, виготовленому з функціонально-градієнтного у радіальному напрямі матеріалу зі залежними від температури телофізичними характеристиками. Через внутрішню та зовнішню поверхні циліндра відбувається конвективний теплообмін з середовищами, температури яких є функціями часу. Тепловий стан циліндра визначено на основі моделі простої суміші [3] та модифікованої моделі простої суміші [2] теплофізичних властивостей двокомпонентного матеріалу.

Нелінійну нестаціонарну крайову задачу теплопровідності розв'язано чисельно методом прямих [1]. Просторову дискретизацію за радіальною координатою здійснено інтегро-інтерполяційним методом. В результаті отримано систему звичайних диференціальних рівнянь по часовій змінній. Для чисельного інтегрування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь застосовувалися формули диференціювання назад.

Як числовий приклад розглянуто порожнистий циліндр, виготовлений з металокераміки.

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
2. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and hollow sphere of a functionally gradiated material // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471–487.
3. *Reddy J.N.* Thermomechanical behavior of functionally graded materials // Final Report for AFOSR Grant F49620-95-1-0342. CML Report 98-01. – 1998 .– 87 p.

DETERMINATION OF THE UNSTEADY THERMAL STATE OF A FUNCTIONALLY-GRADIENT HOLLOW CYLINDER UNDER COMPLEX HEAT EXCHANGE

The distribution of the temperature field in a long hollow cylinder made of functionally gradient material with temperature-dependent telophysical characteristics is determined. The non-linear non-stationary boundary value problem of thermal conductivity is solved numerically by the method of straight lines.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_07.pdf

UDC 539.3

THREE-DIMENSIONAL STRESS ANALYSIS OF AN INHOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC LAYER

Yuriy Tokovyy, Dmytro Boiko, Dariusz Perkowski

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine,
Bialystok University of Technology (Poland)

tokovyy@iapmm.lviv.ua, dmytroboikoukr@gmail.com, d.perkowski@pb.edu.pl

An exhaustive elastic analysis of inhomogeneous composite structure members presents a major challenge for analytical methods due to the lack of techniques for solving governing differential eqautions with unknown variable coefficients formulated within the framework of a relevant mathematical model of macromechanics [1, 2]. The problems become even more involved when the composites exhibit anisotropic behavior.

This talk presents a method for constructing analytical solutions to three-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for an inhomogeneous transversely isotropic layer $|x|<\infty$, $|y|<\infty$, $|z|\le 1$ with all the elastic moduli exhibiting arbitrary variation within the thickness coordinate z. Here, (x, y, z) are the dimensionless Cartesian coordinates, normalized by the thickness of the layer. By making use of the direct integration method [2], a system of governing equations in terms of stresses is derived for the stress-tensor components. The obtained equations are uncoupled and then reduced to the second-kind integral equations for individual stress-tensor components. Making use of the resolvent-kernel method, the integral equations are solved analyticaly in the form of explicit functional dependences on the force and thermal loadings.

This work was partially supported through the joint Ukrainian-Polish Research and Development Project "Identification of the thermomechanical parameters of nonhomogeneous composite materials and protective coatings" (2023-2024).

1. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Elastic analysis of inhomogeneous solids: history and development in brief // Journal of Mechanics. – 2019. – **35**, No. 5. – P. 613–626.
2. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 329 p.

АНАЛІЗ ТРИВИМІРНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Запропоновано підхід до побудови явних розв'язків тривимірних задач теорії пружності та термопружності для трансверсально-ізотропного шару, властивості якого мають довільно залежності профілів розподілу за товщиною шару.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_11.pdf

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

УДК 539.3

ВЗАЄМОДІЯ ШТАМПІВ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

**Олександр Максимук, Іван Васильків,
Володимир Широков, Юрій Сачук**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Українська академія друкарства,
Луцький національний технічний університет

ov.maksymuk@gmail.com, ivanvasylkiv@ukr.net,
vvshyrokov@gmail.com, sachykyra@gmail.com

Взаємовплив мікровиступів, величини фактичної та номінальної областей контакту під час фрикційної взаємодії шорстких поверхонь є головними характеристиками при розрахунках надійності роботи фрикційних пар вузлів машин і механізмів. Контактна задача про взаємодію системи періодичних штампів із пружною основою, яка описується математичною моделлю з двома коефіцієнтами постелі [3, 4], дала змогу звести задачу до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, які мають аналітичні розв'язки, та отримати інженерні формули для різних форм штампів – виступів.

Розглянемо задачу про дію на пружну основу періодичної (з періодом ℓ) системи зосереджених сил $\mathbf{P}$ (рис. 1).

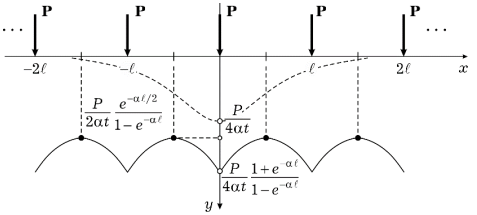


Рис. 1

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_02.pdf

За алгоритмом, запропонованим у працях [1, 3, 5] до розв'язку періодичних задач, у тому числі для тріщин і включень, враховуючи періодичність, виконаємо підсумовування для елементарного переміщення поверхні шару:

$$dV(x)=\frac{P}{4\alpha t}\Bigg(\ldots+e^{-\alpha|x-n\ell|}+\ldots+e^{-\alpha|x-2\ell|}+e^{-\alpha|x-\ell|}+$$

$$+e^{-\alpha|x|}+e^{-\alpha|x+\ell|}+e^{-\alpha|x+2\ell|}+\ldots+e^{-\alpha|x+n\ell|}+\ldots\Bigg)dt=$$

$$=\frac{P}{4\alpha t}\left(e^{\alpha|x|}\frac{e^{-\alpha\ell}}{1-e^{-\alpha\ell}}+\frac{e^{-\alpha|x|}}{1-e^{-\alpha\ell}}\right)dt=\frac{P}{4\alpha t}\mathcal{K}_\ell(x)\,dt\,. \tag{1}$$

Інтегральне рівняння для визначення контактного тиску у випадку дії періодичної системи штампів має вигляд (прирівнюємо прогини в області контакту) [2, 3]:

$$\delta_l-f(x)=C\int\limits_{-a}^{a}P(\xi)\mathcal{K}_l(x,\xi)d\xi,\quad |x|\le a\,, \tag{2}$$

розв'язок якого для довільної форми штампа такий:

$$p(x)=\frac{\alpha}{2C}\left(\delta_l-f(x)+\frac{1}{\alpha^2}f''(x)\right),\ \delta_l=f(a)+\frac{f'(a)}{\alpha}\psi(a,l)\,. \tag{3}$$

Позначення тут такі самі, як у роботі [3]. Тоді для контактного тиску для параболічних виступів отримуємо формули [3]:

$$p(x)=\frac{\alpha}{2RC}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell)-\frac{x^2}{2}\right),\ \delta=\frac{1}{R}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell)\right),$$

$$\psi(a,\ell)=\frac{e^{-\alpha a}+e^{\alpha a}e^{-\alpha\ell}}{e^{-\alpha a}-e^{\alpha a}e^{-\alpha\ell}},\ P=\frac{\alpha a}{CR}\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell)\right).$$

Урахування шорсткості (мікроструктури) контактуючих поверхонь є важливим завданням при визначенні контактної жорсткості, фактичної і номінальної областей контакту тіл, взаємодії мікровиступів тощо. Ці проблеми, як правило, вирішують шляхом розв'язування контактних задач із періодичною структурою поверхонь. Більшість таких досліджень проведено для пружної півплощини (плоска задача) або півпростору [4, 6]. Але застосування цих моделей веде до значних математичних труднощів при отриманні аналітичних розв'язків. У статті побудовано ядро інтегрального рівняння для періодичної задачі про взаємодію системи параболічних штампів із пружною осно-

вою. Особливості ядра інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, отриманого в роботі, відображають специфіку пружної основи з двома коефіцієнтами постелі і дають змогу отримати аналітичний розв'язок для штампів довільної форми. Виконано числовий аналіз результатів за параметрами задачі та проведено їх верифікацію через порівняння з відповідними результатами, отриманими для пружної півплощини.

1. *Кит Г.С., Кривцун М.Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
2. *Максимук О.В., Сачук Ю.В., Яцюк С.М*. Плоскі контактні задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 130–135.
3. *Максимук О.В., Василькiв І.М., Сачук Ю.В.* Періодична контактна задача для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 4. – С. 117–123.
4. *Johnson K.L.* Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 452 p.
5. *Grilitskii D.V., Sulim G.T.* Periodic problem for an elastic plane with thin-walled inclusions // J. Appl. Math. Mech. – 1975. – **39**, No. 3. – P. 494–503.
6. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Аналіз напружено-деформованого стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 162–167.

INTERACTION OF STAMPS OF A PERIODIC STRUCTURE WITH AN ELASTIC BASE WITH TWO COEFFICIENTS

The plane contact problems are considered for stamps of a canonical shape at their interaction with an elastic basis with two coefficients of a foundation. The problem is reduced to solving Fredholm integral equations of the first kind. An analytical solution for canonical stamps is obtained. The contact pressure of the stamp, the contact area depending on the load of the contact couples, the shape of the stamps are analyzed numerically, as well as a comparison of similar problems with the elastic half-plane.

УДК 539.3

ЗГИН ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНОЮ ТА КОЛІНЕАРНОЮ ЩІЛИНОЮ

Микола Маковійчук, Тарас Даляк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

makoviy@ua.fm, tdalyak@gmail.com

У двовимірній постановці досліджується згин пологої сферичної оболонки з двома, розміщеними вздовж меридіана, наскрізними дефектами – тріщиною, здатною до закриття та щілиною, береги якої не контактують. Закриття тріщини описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в лицьовій поверхні оболонки [1]. Під щілиною мається на увазі розріз з вільними від напружень поверхнями, на якому, у прийнятій постановці задачі, допускається від'ємний стрибок переміщень у зоні стискаючих напружень.

Для побудови розв'язку задачі використано метод сингулярних інтегральних рівнянь та числовий метод квадратур. За знайденими стрибками переміщень та кутів повороту нормалі підраховано коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефектів та контактне зусилля для тріщини. Досліджено розподіл контактної реакції вздовж лінії тріщини та вплив взаємодії системи тріщина–щілина на напружено-деформований стан оболонки залежно від її кривини та взаємного розташування дефектів.

1. *Шацький І.П.* Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 26–29.

BENDING OF A SHALLOW SPHERICAL SHELL WITH A CRACK AND A COLLINEAR SLOT

The problem of the interaction of two collinear defects – a closure-capable crack and a slot whose edges do not contact in the bending process of a shallow spherical shell is considered in the two-dimensional formulation. Crack closure is described using the contact model along a line in the facial surface of the shell. By the slot, we mean a section with stress-free surfaces, on which, in the accepted problem formulation, a negative jump of displacements in the zone of compressive stresses is allowed. The problem was solved using the method of singular integral equations and the numerical method of quadrature. The intensity factors of forces and moments in the inner and outer vertices of the crack and the slot were calculated. The distribution of the contact reaction along the crack line and the influence of the interaction of the crack-slot system on the stress-strain state of the shell depending on its curvature and the mutual location of defects were studied.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_29.pdf

УДК 539.375

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСУ РОЗКРИТТЯ / ЗАКРИТТЯ КРАЙОВОЇ ТРІЩИНИ В КРУГОВОМУ ДИСКУ ПІД ЧАС КОНТАКТУ КОЧЕННЯ

Григорій Марченко, Ірина Рудавська, Олександра Дацишин, Оксана Кравчук

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

mhp2113@gmail.com, irynasyd@gmail.com, o.p.datsyshyn@gmail.com

Пари кочення − широко розповсюджені вузли сучасних машин і механізмів. Їх ресурс вичерпується внаслідок розвитку тріщин, що призводить до аварійних ситуацій. На відміну від загальноприйнятого підходу [1], коли для спрощення розв'язання таких задач реальне тіло кочення математично моделювали півплощиною (у тривимірних задачах − півпростором), розглянута нами задача сформульована у точнішій постановці, коли тіло кочення моделюється круговим диском. Це дає змогу крім силових, температурних та інших факторів враховувати геометрію кругової форми тіл кочення, яка вносить свої корективи у числові розрахунки.

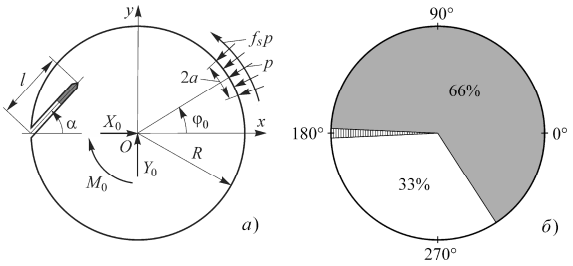


Рис. 1 Крайова тріщина в круговому диску під зовнішнім навантаженням: *а* – модельна схема задачі; *б* – діаграма розкриття / закриття тріщини залежно від розташування контактного навантаження (кута φ_0)

Розглянуто пружний ізотропний диск радіуса R, послаблений крайовою довільно орієнтованою тріщиною (рис. 1*а*). На межі диска на ділянці завдовжки $2a$ діє рівномірно розподілений тиск інтенсивності p разом з силами тертя. Ці зусилля зв'язані між собою законом Кулона через коефіцієнт тертя f_s.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_01.pdf

Контактне навантаження є зрівноваженим прикладеною у центрі диска зосередженою силою X_0+iY_0 і моментом M_0. Розташування ділянки контакту визначається кутом φ_0, що відповідає її середині.

Контактне навантаження за кочення має циклічний характер. При цьому один цикл навантаження (кочення) відбувається, коли ділянка контакту повністю обходить контур диска, тобто коли кут φ_0 змінюється від 0° до 360°. Також при пересуванні навантаження враховується можливий контакт з тертям берегів тріщини. Задача зводиться до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь I роду з ядром Коші відносно невідомих похідних від розривів нормальних і дотичних переміщень на берегах тріщини.

Як приклад, розглянуто залізничне колесо діаметром $2R$ = 920 мм за європейським стандартом EN 13262 для пасажирських і вантажних вагонів із колісної сталі марок 2 і Т. Довжину ділянки контакту колеса з рейкою $2a$ прийняли рівною 13 мм. У циклі кочення досліджувалась поведінка тріщини завдовжки 1 мм і 5 мм з кутом орієнтації $\alpha = 60°$, що відповідає характерному куту поширення поверхневих тріщин у тілах кочення [1].

Отримані числові результати свідчать про те, що на початку циклу кочення, коли ділянка контакту знаходиться у першому квадранті координатної площини xOy, тріщина є закритою (рис. 2*б*). З наближенням контактного навантаження до гирла тріщини, коли ділянка контакту є у другому квадранті, тріщина починає розкриватися з гирла і дуже швидко стає повністю відкритою. Вона є відкритою до тих пір, поки ділянка контакту перебуває у третьому квадранті, а також частково заходить у четвертий. І під кінець циклу тріщина знову закривається. Важливо те, що найдовше в циклі кочення (≈ 66%) тріщина повністю закрита, близько 33% часу вона відкрита і зовсім недовго (при переході від стану закриття в стан відкриття і навпаки) її береги частково контактують.

КІН K_{I} і K_{II} у вершині тріщини інтенсивно змінюються, коли контактне навантаження перебуває поблизу гирла тріщини, і в цей час вони досягають своєї найбільшої величини. Встановлено, що на початковій стадії розвитку тріщина схильна рости майже прямолінійно за зсувним механізмом.

1. *Keer L.M., Bryant M.D.* A pitting model for rolling contact fatigue // Trans. ASME: J. Lubric. Technol. − 1983. − **105**, No. 2. − P. 198−205.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE OPENING / CLOSURE PROCESS FOR AN EDGE CRACK IN A CIRCULAR DISC UNDER ROLLING CONTACT

A contact problem for an elastic circular disc with an edge arbitrarily oriented crack under the action of moving load applied on the disc contour has been solved by taking into account the slip friction between rolling elements. The kinetics of the interaction with friction of the crack faces under rolling cycle has been studied. The solution has been illustrated on the example of a railway wheel with diameter of 920 mm in accordance with the European standard EN made of 2 and T wheel steel grades.

УДК 539.3

НАПРУЖЕННЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Олександр Пономаренко

Львівський національний університет природокористування

alexanderponomarenko54@gmail.com

Розглянуто нескінченну тонку пластину, що містить два кругових включення з іншого матеріалу. Приймаємо, що пластина та включення перебувають у загальному плоскому напруженому стані. Осі декартокової системи координат x, y направлено вздовж осей симетрії. Задачу сформульовано в біполярних координатах α, β, які пов'язано з декартовим координатами x, y співвідношеннями [2] $x = J \operatorname{sh}\alpha$, $y = -J \sin\beta$, де $J = a/(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)$ – масштаб перетворення, a – віддаль від полюса до осі симетрії.

Задача полягає у визначенні розподілу напружень всередині і на спільних межах пластини і включень за двовісного розтягу на нескінченності пластини паралельно до осей x і y. Позначимо спільні межі пластини і включень $\alpha = \pm c$, а центри включень розташуємо в точках $x = \pm \operatorname{arcth} c$. Тоді крайові умови задамо для компонент напружень і зміщень наступним чином:

$$\sigma_\alpha = pT;\ \sigma_\beta = qT;\ \tau_{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \to 0, \beta \to 0,$$

та

$$\sigma_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha,\quad \tau_{\alpha\beta} = \hat{\tau}_{\alpha\beta},\quad u_\alpha = \hat{u}_\alpha,\quad u_\beta = \hat{u}_\beta,$$

на спільній межі пластини і включень. Тут «шапочка» позначає величини, які відносяться до включень, а без «шапочки» – до пластини поза включеннями. Задаємо:

$$p = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 1, \end{cases} \quad \text{і} \quad q = \begin{cases} 1, & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } y; \\ 0, & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } x; \\ 1, & \text{для всестороннього розтягу.} \end{cases}$$

Розглянемо функції напружень χ і $\hat{\chi}$ у формі $\chi / J = \alpha T(\chi_0 / J + \chi_1 / J)$ та $\hat{\chi} / J = \alpha T \hat{\chi}_1 / J$, в яких χ_0 / J відповідає розв'язку для суцільної нескін-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_03.pdf

ченної пластини без включень, і може бути записана у вигляді:

1) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y:

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}^2\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta} - \mathrm{sh}\alpha\,;$$

2) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі x:

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}\,;$$

3) для випадку всестороннього розтягу:

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta} - \mathrm{sh}\alpha\,.$$

Аналіз здійснено на основі функцій напружень Ері для загального плоского напруженого стану з використанням біполярних координат. Для визначення невідомих коефіцієнтів функції напружень застосовано метод збурення за параметром. Отримано розподіл максимальних напружень на спільній межі включень і пластини для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y залежно від r/d, де r – радіус включень, d – віддаль від центру включення до осі симетрії та залежно від співвідношень модулів пружності матеріалу пластини E та включень $\hat{E}$.

Результати, отримані в роботі, дають змогу теоретичного визначення коефіцієнта концентрації напружень біля включень і можуть бути використані в інженерній практиці при проектуванні деталей в кораблебудуванні, авіабудуванні та машинобудуванні [1].

1. *Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Мироненко А.Б.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинах. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 438 с.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.

STRESSES IN AN INFINITE PLATE WITH TWO CIRCULAR INCLUSIONS

An analytical solution is constructed to a problem for an infinite plate containing two circular holes filled with elastic inclusions of another material, and subjected to the uniform tension in the direction of the x and y axes. The analysis is performed on the basis of the Airy stress function in the generalized plane stress and by applying the bipolar coordinates. The perturbation method is adopted for the determination of unknown coefficients in the solution.

УДК 539.421

ПРО МОДЕЛЬ ПОВОРОТУ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ ВІД МЕЖІ ПОДІЛУ КВАЗІПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Анатолій Камінський, Михайло Дудик, Юлія Решітник, Юрій Чорноіван

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

dfm11@ukr.net, dudik_m@hotmail.com,
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua, fract@inmech.kiev.ua

Використання виробів із композитних матеріалів у режимах, за яких окремі конструкційні елементи можуть наближатись до граничних станів, вимагають дослідження надійності їх експлуатації. З цією метою ще на етапі проектування доцільно здійснювати швидку попередню оцінку їх тріщиностійкості, не вдаючись до процедур натурного або числового моделювання, затратних фінансово або за часом. У цьому випадку корисними можуть стати наближені аналітичні моделі, які в достатній мірі враховують механічні властивості матеріалів композитного з'єднання і дозволяють швидко отримати попередні оцінки умов зародження і поширення тріщин у складових частинах виробу.

Модель, розвинута в цій роботі, стосується дослідження поведінки міжфазної тріщини за умови квазікрихкого руйнування одного з матеріалів з'єднання і передбачає визначення параметрів маломасштабної зони передруйнування біля вершини тріщини. Це є актуальним для прогнозування повороту тріщини від межі поділу матеріалів, що є менш вивченим явищем порівняно з міжфазним поширенням тріщин. З цією метою сформульовано математичну модель зони передруйнування, яка в умовах плоскої деформації поширюється з вершини міжфазної тріщини під кутом до плоскої межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Матеріал, в якому поширюється зона, розглядається як квазіпружний, тоді як інший матеріал вважається пружним. Квазіпружність першого матеріалу означає його лінійну пружність всюди, крім зони передруйнування.

Відповідно до моделей Леонова–Панасюка і Дагдейла зону передруйнування подано лінією розриву нормального і дотичного переміщення, на якій виконується умова міцності типу Мізеса–Хілла

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_1}\right)^2=1,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_04.pdf

де σ_1, τ_1 – опори відриву та зсуву першого матеріалу відповідно.

Задачу про визначення параметрів зони зведено до векторного функціонального рівняння Вінера–Гопфа, для якого знайдено наближений аналітичний розв'язок. З отриманого розв'язку виведено рівняння для розрахунку довжини і орієнтації зони передруйнування, фазового кута напружень і швидкості вивільнення енергії в зоні та розкриття тріщини у її вершині. Вказаних величин виявляється цілком достатньо для прогнозування напрямку поширення тріщини та умов її зрушення.

Для ілюстрації можливостей моделі виконано числовий аналіз параметрів зони передруйнування в кінці внутрішньої міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині при її навантаженні рівномірно розподіленими тангенціальними і розтягувальними нормальними зусиллями. Виявлено суттєвий вплив на досліджувані параметри фазового кута зовнішнього навантаження і відношення опору відриву до опору зсуву матеріалу, в якому розвивається зона передруйнування. Показано, що в умовах двовісного пропорційного навантаження кут нахилу зони до межі поділу мало змінюється при збільшенні навантаження і може служити в якості прогнозованого кута повороту міжфазної тріщини. Продемонстровано можливість передбачення умов зрушення тріщини в рамках розвинутої моделі на основі критерію швидкості вивільнення енергії. Застосування моделі до аналізу окремих експериментальних результатів щодо повороту міжфазної тріщини засвідчило якісне і, частково, кількісне узгодження з ними та вказало на необхідність для квазікрихких матеріалів одночасного урахування крихкого і пластичного механізмів руйнування.

ON THE MODEL OF INTERFACE CRACK KINKING FROM THE INTERFACE OF QUASI-ELASTIC MATERIALS

To predict the kinking of an interface crack in a quasi-elastic material under plane strain conditions, a mathematical model of the process zone is formulated. In this model, the process zone extends from the tip of the interface crack at an angle to the plane interface of two homogeneous isotropic materials. In the process zone, the strength criterion of the Mises–Hill type is fulfilled, which implies a quasi-brittle mechanism of fracture. Determining the zone parameters is reduced to the Wiener–Hopf vector functional equation, for which an approximate analytical solution has been found. Equations are derived for calculating the length and orientation of the process zone, the phase angle of stresses, the amount of energy dissipation in the zone, and the crack tip opening. Under biaxial load conditions, a numerical analysis of the process zone parameters dependence on the loading values and the characteristics of the bounded materials was carried out. It is found that the studied parameters are significantly influenced by the phase angle of the external load and the ratio of the tensile strength to the shear strength for the material in which the process zone develops. The analysis of experiments on the kinking of the interface crack showed the possibility of using the developed model in studying the fracture of some composites of quasi-elastic materials.

УДК 539.3

ЧИСЛОВИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ШТАМПІВ СКЛАДНОЇ ФОРМИ З НАПЕРЕД НЕВІДОМИМИ ДІЛЯНКАМИ КОНТАКТУ

Тетяна Соляр, Ольга Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

t_solyar@ukr.net, solyarolya@gmail.com

Розглядається контактна осесиметрична задача для півпростору зі штампом, поверхня якого має складну форму. Відомо, що під дією такого штампа контакт буде здійснюватися на окремих, наперед невідомих ділянках контакту. Задачі такого типу достатньо вивчені для випадку гладких штампів параболоїдного типу, або кільцевих штампів, у яких виникає тільки одна ділянка контакту. Область контакту визначають, розв'язуючи відповідну систему алгебраїчних рівнянь, які отримують з умови, що на краях ділянок контакту контактні напруження дорівнюють нулю. Наведено алгоритм, який базується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування.

Приймемо, що рівняння основи штампа має вигляд $z = g(r)$, штамп до втискання дотикається до межі півпростору $z \le 0$, відоме вертикальне зміщення штампа w_0 ($w_0 < 0$). Розглядаємо випадок, коли штамп є гладким і область контакту є наперед невідомою. Треба знайти ділянки контакту і розподіл контактних напружень.

Використаємо відоме співвідношення для переміщень межі півпростору $z \le 0$, навантаженого нормально прикладеними зусиллями $\sigma(r) = \sigma_z(r,0)$ на проміжку $a < r < b$ у вигляді $w(r) = \dfrac{4(1-\nu^2)}{\pi E}\displaystyle\int_a^b \sigma(\rho)\rho K\left(\frac{4r\rho}{(r+\rho)^2}\right)d\rho$, де $K(x)$ – еліптичний інтеграл першого роду [1], $0 \le x < 1$.

При наперед незаданій області контакту умови запишемо у вигляді альтернативних рівнянь-нерівностей Сіньйоріні при $a < r < b$ [3]

$$\int_a^b q(\rho)F(r,\rho)d\rho = -W(r), \quad q > 0, \quad \int_a^b q(\rho)F(r,\rho)d\rho \ge -W(r), \quad q = 0, \quad (1)$$

$F(r,\rho) = 4K(4r\rho/(r+\rho)^2)/(r+\rho)$, $W(r) = \pi E(w_0 + g(r))/(1-\nu^2)$, $q(\rho) = \rho p(\rho)$, $p(\rho) = -\sigma(\rho)$, а відрізок $[a, b]$ повинен вміщувати область контакту.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_05.pdf

Побудуємо квадратурну формулу для інтеграла вигляду

$$\int_a^b q(\rho)F(r_n,\rho)d\rho\,. \tag{2}$$

Неперервну функцію q на проміжку $a<r<b$ опишемо лінійними, кусково-неперервними інтерполяційними функціями:

$$q(r)=\sum_{n=0}^{N} q_n S_h(r-r_n)\,,\ S_h(x)=\begin{cases}1-|x|/h, & |x|\le h,\\ 0, & |x|>h;\end{cases} \tag{3}$$

де $q_n=q(r_n)$, $r_0=a$, $r_{j+1}=r_j+h$, $j=\overline{0,N-1}$, $N+1-$ кількість вузлових точок, $h=(b-a)/N-$ крок розбиття. Тоді для інтеграла (2) отримуємо $\int_a^b q(\rho)F(r_n,\rho)d\rho=\sum_{m=0}^{N} A_{nm}q_m$, $n=\overline{0,N}$, $A_{nm}=\int_{r_n-h}^{r_n+h} S_h(t-r_m)F(r_n,t)dt$. Замінюючи в системі рівнянь-нерівностей (1) інтеграли квадратурними формулами [2], отримуємо алгебраїчну систему рівнянь-нерівностей

$$\sum_{m=0}^{N} A_{nm}q_m=-W_n,\ \ q_n\ge 0,\quad \sum_{m=0}^{N} A_{nm}q_m<-W_n,\ \ q_n=0,\quad n=\overline{0,N}\,,$$

де $W_n=W(r_n)$, $q_n=r_n p(r_n)$, $r_0,\ldots,r_N-$ вузлові точки, $r_0=a$, $r_N=b$. Ця система рівнянь-нерівностей має єдиний розв'язок, оскільки доведено, що вихідна контактна задача має єдиний розв'язок.

Показано, що розроблений алгоритм, є ефективним і дає змогу розв'язувати осесиметричні контактні задачі для півпростору за дії штампів складних форм.

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
2. *Maksymovych O., Solyar T.* Determination of non-axisymmetric stresses in the bodies of revolution based on regulized integral equations // European Journal of Mechanics. A – Solids. – 2021. – **87**. – 2021. – 104218.
3. *Signorini A.* Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – **18**, No 1–2. – P. 95–139.

NUMERICAL ALGORITHM FOR DETERMINING THE CONTACT STRESSES FOR STAMPS OF COMPLEX SHAPE WITH PREVIOUSLY UNKNOWN CONTACT AREAS

A numerical algorithm for solving an axisymmetric elasticity problem on the interaction of an elastic half-space with a stamp whose surface has a complex shape has been constructed. Under the action of such a stamp, contact occurs on separate, preliminary unknown contact areas. The contact problem is formulated in the form of Signorini's integral inequalities, which, using quadrature formulas for singular integrals, are transformed into a system of linear algebraic inequalities. The solution of the system is reduced to finding the minimum of the quadratic form under linear constraints on the unknown contact stresses.

УДК 593.3

СПОСІБ ПОБУДОВИ СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЯДРОМ КОШІ ДЛЯ З'ЯСУВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КЛИНОВОЇ СИСТЕМИ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Микола Махоркін

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

mahorkin@ukr.net

При оцінці надійності та довговічності устаткування окрему увагу слід приділити не тільки технології виготовлення і умовам експлуатації, а й конструктивним параметрам окремих деталей. За такі параметри можна прийняти профіль деталей, матеріал, з якого їх виготовили, наявність гострокінцевих включень чи вирізів або особливості межі поділу матеріалів у композитних деталях. Для врахування їх впливу є необхідними повні, об'єктивні та достовірні дані про процеси руйнування, а саме про зародження тріщин та з'ясування подальшого напряму їх розвитку. Ці дані можна отримати не лише у результаті коштовних експериментів з руйнування зразків, але й за допомогою математичного моделювання фізико-механічних полів всередині об'єкта досліджень.

Особливу увагу приділяють вивченню поля напружень в околі т. зв. концентраторів напружень, де, як правило, відбувається руйнування конструкції. Такими концентраторами можуть виступати з'єднання двох чи більше матеріалів, вихід на цю межу тонких дефектів, кінці тонких неоднорідностей всередині матеріалу тощо. Вивчення напруженого стану в околі точок, де виникає концентрація напружень, здійснюють за допомогою модельних задач, а саме клинових структур з радіальними дефектами чи без них, що призводить до необхідності розв'язувати системи сингулярних інтегральних рівнянь [1]. Через складний вигляд їх ядер це зазвичай становить певні труднощі і є окремою математичною задачею.

Запропоновано підхід до зведення інтегральних рівнянь, отриманих у результаті вивчення напружено-деформованого стану багатоклинової системи з радіальними тріщинами, до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром типу Коші. Даний підхід ґрунтується на властивості періодичності побудованих за допомогою формулювання узагальненої задачі спряження ядер CIP [2] та застосуванні теореми про лишки. У результаті отримано зручну аналітичну формулу для побудови ядра типу Коші у випадку довільної кількості еле-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_06.pdf

ментів багатоклинової системи.

Запропонований підхід застосовано для побудови ядра типу Коші для СІР, отриманого у випадку антиплоскої деформації двоклинової системи з навантаженою міжфазною тріщиною [2] (рис. 1). Обчислено і подано у вигляді таблиці значення величин, необхідних для побудови цього рівняння при різних значеннях геометричних характеристик системи. Для окремих співвідношень кутів розхилу клинів записано аналітичні вирази для обчислення полюсів відповідної підінтегральної функції. З’ясовано, що на такі величини як період полюсів T та їх кількість в межах одного періоду $p_l \in (0;T]$ механічні характеристики системи не впливають.

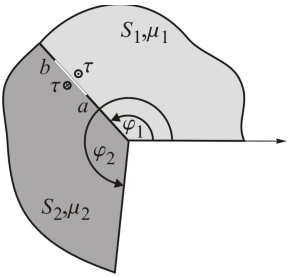


Рис. 1

Використавши метод механічних квадратур отримано розв’язки даного СІР та, на їх підставі обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) поблизу кінців міжфазної тріщини. У часткових випадках здійснено порівняння отриманих значень КІН з відомими у літературі [1].

Достовірність отриманих результатів забезпечена строгістю математичного апарату та збігом у частковому випадку отриманого рівняння з відомими в літературі рівняннями. Також слід окремо зазначити, що викладки, подані у статті для випадку двох клинів, справедливі і для більшої кількості елементів системи. Відтак, можна стверджувати, що запропонований підхід успішно використовуватиметься і для побудови відповідного СІР з ядром Коші та подальшого з’ясування напружено-деформованого стану складеної з довільної кількості клинів багатоклинової системи.

1. *Savruk M., Kazberuk A.* Stress concentration at notches. – Cham, Springer, 2016. – 498 p.
2. *Махоркін М., Махоркіна Т., Пукач П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану композитних клиноподібних елементів конструкцій // Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження. – 2021. – **24**. – С. 121–130.

AN APPROACH FOR DERIVATING A SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH A CAUCHY KERNEL REGARDING ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A WEDGE SYSTEM UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

An analytical approach to the construction of a singular integral equation (SIE) with a Cauchy kernel is proposed, which makes it possible to clarify the stress-strain state of the multi-wedge system with loaded radial cracks. This approach is based on the use of the theory of residues and the clarification of the solutions periodicity of the multi-wedge system characteristic equation. It is illustrated in the example of the construction of an SIE with a Cauchy kernel for a two-wedge system with a loaded interfacial crack under the conditions of antiplane deformation. For particular cases of geometric and mechanical parameters of the two-wedge system, the values necessary for constructing such an equation are calculated.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ МЕТОДОМ МОДИФІКОВАНИХ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ЗА ЧАСОМ

Олександр Демидов, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія»

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Розглядається пружний ізотропний циліндр висотою a і радіусом r_0 (Рис. 1). Нижня основа циліндра $(z=0)$ є жорстко закріпленою, а нормально до верхньої основи $(z=a)$ прикладено змінну в часі розподілену силу $P(r,t)$. На бічній поверхні виконуються умови ковзного контакту. За таких умов циліндр знаходиться у стані вісесиметричної деформації. Кутове переміщення дорівнює нулю, $u_\theta(\eta,\zeta,\tau)=0$, а радіальне $u_\eta(\eta,\zeta,\tau)$ та осьове $u_\zeta(\eta,\zeta,\tau)$ є розв'язками початково-крайової задачі для рівняння руху Ламе в безрозмірних координатах:

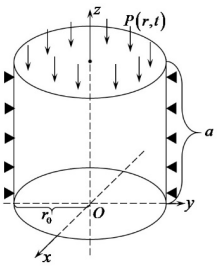


Рис. 1

$$\mu\left(\Delta u_\eta-\frac{u_\eta}{\eta^2}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta u_\eta\right)+\frac{\partial u_\zeta}{\partial\zeta}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_\eta}{\partial\tau^2};$$

$$\mu\Delta u_\zeta+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta u_\eta\right)+\frac{\partial u_\zeta}{\partial\zeta}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial\tau^2}, \tag{1}$$

$$0<\eta<1,\ 0<\zeta<1,\ \tau\in(0;+\infty),$$

$$u_\eta(\eta,0,\tau)=0;\ \ u_\zeta(\eta,0,\tau)=0;\ \ \sigma_{\zeta\zeta}(\eta,1,\tau)=P(\eta,\tau),\ \ \tau_{\eta\zeta}(\eta,1,\tau)=0,$$

$$u_\eta(1,\zeta,\tau)=0;\ \ \frac{\partial u_\zeta}{\partial\eta}(1,\zeta,\tau)=0,\ 0\le\eta<1,\ 0\le\zeta<1,\ \tau\in(0;+\infty), \tag{2}$$

де ρ – густина матеріалу, μ, λ – коефіцієнти Ламе, $u_\eta=u_r/r_0$, $u_\zeta=u_z/r_0$, $\eta=r/r_0$, $\zeta=z/r_0$, $\tau=c_2t/r_0$, $\sigma_{\zeta\zeta}=\sigma_{zz}/\mu$, $\tau_{\eta\zeta}=\tau_{rz}/\mu$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_07.pdf

До початково-крайової задачі (1), (2) застосовано метод, який ґрунтується на різницевій апроксимації похідних за часом [1].

Розраховано осьові переміщення на верхньому торці $u_\eta(0,1)$ і нормальні напруження на нижньому торці $\sigma_{\zeta\zeta}(0,0)$ циліндра за дії навантаження, розподіленого за законом $P(\eta,\tau)=(1-\eta^2)f(\tau)$, з коефіцієнтом Пуассона $\nu=0.25$. Результати обчислень наведено на рис. 2, 3, де криві показують залежність переміщень та напружень від безрозмірного часу при різних значеннях τ_0 – часу, за який навантаження досягає максимуму. Криві *1*, *2* і *3* відповідають значенням $\tau_0=0;1;1/\sqrt{3}$.

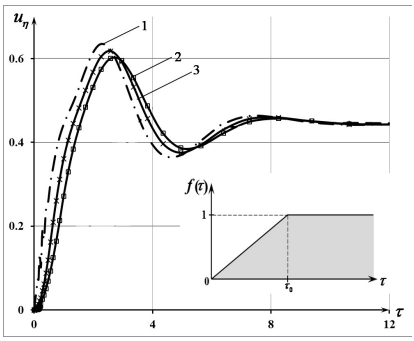


Рис. 2 Осьові переміщення

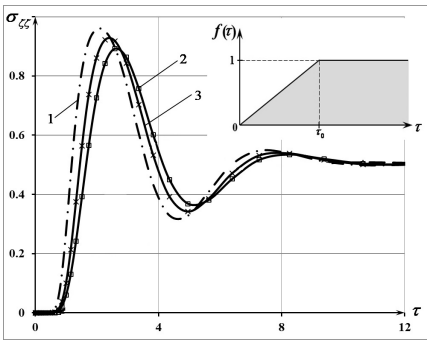


Рис. 3 Нормальні напруження

Графіки на рис. 2–3 демонструють, що максимум значення осьового переміщення на верхньому торці циліндра та нормального напруження на нижньому його торці спостерігається під час перехідного процесу, і цей максимум перевищує їх значення в усталеному режимі. А отже, руйнування, найймовірніше буде мати місце саме під час перехідного процесу.

1. *Savruk M.P.* New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Materials Science. – 2003. – **39**, No. 4. – P. 465–471.

DETERMINING OF NON-STATIONARY WAVE FIELD IN A FINITE CYLINDER USING THE MODIFIED FINITE DIFFERENCE METHOD

A mathematical model is suggested to describe non-stationary wave fields in an isotropic elastic cylinder of finite length under the influence of a time-dependent load. The investigation aims to explore the impact of the rate of load growth on the wave fields of displacement and stress that occur within the cylinder.

УДК 539.3

ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Олександр Бедзір, Василь Шопа

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

olbedzir@gmail.com, vasylshopa@gmail.com

Моделювання прорізних оболонкових пружних елементів [1] зводиться до формулювання задач взаємодії тришарової контактної системи з умовами неідеального контакту шарів [2, 3]. Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану елементів контактної системи у випадку використання неоднорідного заповнювача.

Розглянемо пружний порожнистий циліндр зовнішнього R_1 і внутрішнього R_2 радіусів та довжини $2l$, який розділяє коаксіально встановлені прорізну (радіуса R_1 і товщини h_1) та суцільну (радіуса R_2 і товщини h_2) циліндричні оболонки. На торці циліндра (деформівного заповнювача) через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження Q. Вважаємо, що кількість розрізів зовнішньої оболонки є достатньо великою, а заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту. Характер контактної взаємодії заповнювача та оболонок визначається законом сухого тертя $\tau(\varsigma) = -f_i \sigma \operatorname{sgn} \varsigma, \quad \varsigma \in W_i, \quad i = 1, 2$, де f_i – коефіцієнти тертя відповідно на поверхнях W_i; $W_1 \in [-1, -t] \cup [t, 1], \quad W_2 = (-t, t)$ – поверхні контакту тіл з різними коефіцієнтами тертя; $t \in [0, 1]$ – координата точки розділу ділянок W_i.

Контактну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь відносно функцій розподілу контактних напружень між заповнювачем та оболонками:

$$\begin{cases} a_{11}\sigma_1(\varsigma) + a_{12}\sigma_2(\varsigma) + \int\limits_{W_i} \left(K_{11}(\xi,\varsigma)\sigma_1(\xi) + K_{12}(\xi,\varsigma)\sigma_2(\xi)\right) d\xi = -\dfrac{\nu P}{1-\nu}; \\ a_{21}\sigma_1(\varsigma) + a_{22}\sigma_2(\varsigma) + \int\limits_{W_i} \left(K_{21}(\xi,\varsigma)\sigma_1(\xi) + K_{22}(\xi,\varsigma)\sigma_2(\xi)\right) d\xi = -\dfrac{\nu P}{1-\nu}. \end{cases}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_08.pdf

Ядра інтегральних рівнянь системи описуються формулами:

$$K_{11}(\xi,\varsigma)=\frac{\nu}{1-\nu}\frac{lR_1}{R_1^2-R_2^2}f_i\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\,\mathrm{sgn}(\xi-\varsigma)+4\mu^4G(\xi,\varsigma)\quad;$$

$$K_{12}(\xi,\varsigma)=\frac{\nu}{1-\nu}\frac{lR_2}{R_1^2-R_2^2}f_i\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\,\mathrm{sgn}(\xi-\varsigma)\,;$$

$$K_{21}(\xi,\varsigma)=\frac{\nu}{1-\nu}\frac{lR_1}{R_1^2-R_2^2}f_i\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\,\mathrm{sgn}(\xi-\varsigma)\,;$$

$$K_{22}(\xi,\varsigma)=\left(1+\frac{\nu_2}{2\nu(\varsigma)}\beta_2\right)\frac{\nu}{1-\nu}\frac{lR_2}{R_1^2-R_2^2}f_i\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\,\mathrm{sgn}(\xi-\varsigma)\,,$$

$$4\mu^4=\frac{1}{1-\nu(\varsigma)}\frac{R_1^3b}{I_x}\frac{E}{E_1}\,;\;E_0I_x=0{,}5E_0hR^3\left(\phi+\sin(\phi)-8\sin^2(\phi/2)/\phi\right);$$

$b=2R\sin(\phi/2)$; $\phi=2\pi/N$, N – кількість розрізів; $P\equiv\dfrac{Q}{\pi(R_1^2-R_2^2)}$; E_o, E_i, ν – модулі Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалів оболонок та заповнювача. Коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, β_1, β_2 та функцію Гріна крайової задачі $G(\varsigma,\xi)$ наведено в роботах [2, 3].

Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом квадратур, з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів. Для розв'язування системи рівнянь застосовано метод Гауса з виділенням головного елемента. В результаті розв'язку отримано значення контактних напружень, через які визначено характеристики пружної системи.

1. *Шопа В.М., Величкович А.С., Величкович С.В., Шацький І.П., Попадюк І.Й., Шопа Т.В.* Оболонкові пружини. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
2. *Шопа В.М., Попадюк І.Й., Бедзір О.О.* Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**. № 3. – С. 103–108.
3. *Шопа В.М., Шацький І.П., Бедзір О.О., Величкович А.С.* Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.

FRICTIONAL INTERACTION OF COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH INHOMOGENEOUS FILLER

The paper solves the mixed problem of frictional interaction in the system of coaxial cylindrical shells divided by an inhomogeneous filler. The integral equation for the determination of the contact stresses is derived using one-dimensional shell and filler models. On the basis of numerical solutions, the Authors investigated the effect of mechanical, geometric, and tribologic contacting pairs parameters on contact pressure distribution, rigidity, and strength of the system. For the numerical solution of integral equations, we used a numerical trapezoidal rule with a uniform grid.

УДК 539.3

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНИМИ ВИСОКОПРОВІДНИМИ ДЕФЕКТАМИ

Христина Середницька, Микола Шевцов

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка

ser.kristina@gmail.com, mykola.shevtsov@lnu.edu.ua

Дана доповідь стосується побудови аналітично-числової процедури для розв'язування задачі термопружності для біматеріалу з системою міжфазних високопровідних тріщин за теплопередачі між їх берегами.

На основі наведеної в літературі [2] класифікації математичних моделей теплопровідності різного роду включень, можна виділити модель низько провідної тріщини – між берегам якої виникає стрибок температури, який пропорційний тепловому потокові і обернено пропорційний теплопровідності тріщини в поперечному напрямі; і високопровідної тріщини – коли між берегами тріщини тепловий потік пропорційний теплопровідності тріщини у поздовжньому напрямі.

Розглянемо плоску задачу термопружності для біматеріалу з періодичною системою міжфазних теплопровідних тріщин за врахування передачі тепла між їх берегами в поздовжньому напрямі. Компоненти біматеріалу наділені різними термомеханічними властивостями, а на лінії їх з'єднання розташована періодична система тріщин завдовжки $2a$ з періодом розташування d. Теплопровідність тріщин характеризується коефіцієнтом поздовжньої теплопровідності λ_s. На нескінченності у напрямку, перпендикулярному до міжфазної лінії, біматеріал підданий дії стаціонарного однорідного теплового потоку q і рівномірно розподілених розтягувальних зусиль p.

Задачу термопружності для такого біматеріалу за відомою методикою [2] зведено до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури між берегами тріщин $\gamma(x)$ та висоти зазору тріщин $h(x)$:

$$\lambda_s \gamma''(x) + \frac{6\lambda}{\pi} \int_{-a}^{a} \gamma'(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = -12q\,, \ |x| < a\,,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_09.pdf

$$\frac{1}{d}\int_{-a}^{a} h'(t)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(t-x)}{d}\right)dt+\frac{\lambda\eta^{-}}{2}\left(\gamma(x)-\gamma_{ef}\right)=-\frac{G^{*}}{2}p\,,\ |x|<a\,,$$

де $\gamma(\pm a)=0$; $h(\pm a)=0$; $\gamma_{ef}=\frac{1}{d}\int_{-a}^{a}\gamma(x)dx$; $\lambda=\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$; $\eta^{-}=\eta_2-\eta_1$;

$\eta_1=\frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{\lambda_1}$; $\eta_2=\frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{\lambda_2}$; $G^{*}=(1-\kappa_1\kappa_2)\big/\big(G_1(1-\kappa_2)\big)$; $\kappa_n=3-4\nu_n$;

$n=1,2$; $(1-2\nu_1)G_2=(1-2\nu_2)G_1$; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона, G_1, G_2 – модулі зсуву, α_1, α_2 – коефіцієнти лінійного теплового розширення, λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності компонент біматеріалу.

Для побудови розв’язку отриманої системи розроблено аналітично-числову процедуру, яка базується на методі колокацій [1]. Невідомі функції $\gamma(x)$ і $h(x)$ апроксимуємо скінченими сумами за поліномами Чебишева, в результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів при поліномах Чебишева. Останню систему розв’язуємо числово. На основі проведених розрахунків проаналізовано фізичні характеристики міжфазної лінії біматеріалу, а саме зміну форми тріщин, ефективний стрибок температури, який визначається сумарним впливом тріщин, та ефективний міжфазний термоопір біматеріалу.

1. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
2. *Kushch V.I., Sevostianov I., Belyaev A.S.* Effective conductivity of spheroidal particle composite with imperfect interface: complete solutions for periodic and random microstructures // Mechanics of Materials. – 2015. – **89**. – P. 1–11.

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A BIMATERIAL WITH HIGHLY CONDUCTIVE INTERFACE DEFECTS

The thermoelastic behavior of a bimaterial with a periodic system of cracks was studied, taking into account heat transfer between their edges in the longitudinal direction. The problem of thermoelasticity was reduced to a system of singular integrodifferential equations with respect to temperature jumps and cracks opening. The resulting system was solved analytically by a numerical method using Chebyshev polynomials. The interface parameters of the bimaterial were analyzed for different values of the coefficient of thermal conductivity of the cracks.

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНА ПОВЕДІНКА БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ПОЗДОВЖНЬОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЇЇ БЕРЕГІВ

Христина Середницька

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ser.kristina@gmail.com

У сучасних технологіях важливим є врахування неоднорідностей та фізико-хімічних процесів між поверхнями спряження елементів конструкцій. Наявність дефектів типу тріщин зумовлюють додатковий розподіл напружень, який істотно залежить від термічних деформацій. Дана доповідь стосується дослідження впливу поздовжньої теплопровідності міжфазної тріщини на термопружну поведінку біматеріалу.

Розглянемо біматеріальну площину, компоненти якої наділені різними термомеханічними властивостями і характеризуються коефіцієнтами теплопровідності λ_1, λ_2 і лінійного теплового розширення α_1, α_2, коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 і модулями зсуву G_1, G_2. На лінії з'єднання півплощин розташована міжфазна тріщина завдовжки $2a$. Береги тріщини наділені тонкими плівками з коефіцієнтом поздовжньої теплопровідності λ_s Вважаємо, що порожнина тріщини заповнена речовиною, що не проводить тепло, а плівки мають сталу товщину і проводять тепло лише в поздовжньому напрямі.

На нескінченності у напрямку, перпендикулярному до міжфазної лінії, площина піддана дії стаціонарного однорідного теплового потоку з густиною q і рівномірно розподілених розтягувальних зусиль інтенсивності p.

Вважаємо, що плівки не чинять опору деформуванню біматеріалу і береги тріщини вільні від напружень.

Вплив плівок на теплопередачу між берегами тріщини враховуємо їх поздовжньою теплопровідністю, використовуючи умову неідеального теплового контакту [2].

Використовуючи методику розв'язування задач термопружності для біматеріалів з тріщинами [1], сформульовану задачу зведено до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури $\gamma(x)$ та розкриття тріщини $h(x)$:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_10.pdf

$$\lambda_s \gamma''(x) + \frac{6\lambda}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\gamma'(t)dt}{t-x} = -12q\ ,\ |x| < a\ ,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{h'(t)dt}{t-x} + \frac{\beta^2}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}\,h'(t)dt}{t-x} =$$

$$= -\lambda(\eta_4\beta + \eta_3)\gamma(x) + \frac{\lambda\beta\eta_4}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^{a} \gamma(t)dt - G^* p\ ,\ |x| < a\ ,$$

де $\gamma(\pm a) = 0$; $h(\pm a) = 0$; $\lambda = \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$; $\beta = \dfrac{G_2(1-\kappa_1) - G_1(1-\kappa_2)}{G_2(1+\kappa_1) + G_1(1+\kappa_2)}$;

$\eta_1 = \dfrac{\alpha_1(1+\nu_1)}{\lambda_1}$; $\eta_2 = \dfrac{\alpha_2(1+\nu_2)}{\lambda_2}$; $\eta_3 = \dfrac{(G_2+G_1\kappa_2)\eta_2 - (G_1+G_2\kappa_1)\eta_1}{G_2(1+\kappa_1) + G_1(1+\kappa_2)}$;

$\eta_4 = \dfrac{(G_2+G_1\kappa_2)\eta_2 + (G_1+G_2\kappa_1)\eta_1}{G_2(1+\kappa_1) + G_1(1+\kappa_2)}$; $G^* = \dfrac{(G_2+G_1\kappa_2)(G_1+G_2\kappa_1)}{G_1G_2(G_2(1+\kappa_1) + G_1(1+\kappa_2))}$;

$\kappa_n = 3 - 4\nu_n$, $n = 1, 2$.

Розв’язок отриманої системи побудовано на основі методу колокацій [1] за допомогою числових розрахунків.

Проаналізовано зміну розкриття тріщини та стрибка температури між її берегами залежно від інтенсивності розтягувальних зусиль, густини і напряму теплового потоку та коефіцієнта поздовжньої теплопровідності. Визначено коефіцієнти інтенсивності міжфазних напружень.

1. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
2. *Середницька Х.І.* Математична модель термопружної поведінки тіла з урахуванням поздовжньої теплопровідності берегів тріщини // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки – 2021»: Матеріали конференції (Львів, 15–17 вересня 2021 р.). – Львів. – 2021. – С. 137–138.

THERMO-ELASTIC BEHAVIOR OF THE BI-MATERIAL WITH AN INTERFACE CRACK DUE TO LONGITUDINAL THERMAL CONDUCTIVITY OF ITS FACES

The thermo-elastic behavior of the bimaterial body with an interface crack, the faces of which are covered with films and conduct heat only in the longitudinal direction with a given coefficient of thermal conductivity, was investigated. The problem of thermoelasticity was reduced to a system of singular integro-differential equations with respect to temperature jump and crack opening. The temperature change between the cracks faces and its opening for different values of the coefficient of longitudinal thermal conductivity were analyzed. The interface stress intensity coefficients were determined.

УДК 539.3

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШТАМПА ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ З ПІВПРОСТОРОМ ЗА ВРАХУВАННЯ ЗНОШУВАННЯ

Ольга Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

solyarolya@gmail.com

Розглядається контактна взаємодія пружного півпростору з жорстким штампом осесиметричної форми, який обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Внаслідок дії на штамп напрямленої уздовж осі обертання сили між ним і півпростором виникають сили тертя, протилежні до напрямку обертання, що призводить до залежного від контактних напружень зношування під штампом. Рівняння основи штампа до втискання має вигляд $z = g_0(r)$, $g_0(0) = 0$. Вважаємо, що штамп втискається на фіксовану величину $w_0 < 0$, а сила тертя дорівнює добутку нормального тиску на коефіцієнт тертя. Тоді у зоні контакту $\tau_{z\theta} = \mu\sigma_z$. Швидкість зношування штампа визначається як [1] $\left|\partial g(r,t)/\partial t\right| = \lambda\omega r\left|\tau_{z\theta}\right| = \lambda\omega r\mu p(r,t)$, $\tau_{z\theta} = \mu p$, де λ – коефіцієнт пропорційності між величиною роботи сил тертя і кількістю видаленого матеріалу, що визначається експериментально, μ – коефіцієнт тертя. За час Δt форма штампа зміниться на величину $\Delta g = \Delta\tau\, q/E$, $q = pr$, E – модуль Юнга півпростору, $\tau = \lambda E\omega\mu t$ – безрозмірна часова змінна. У процесі зношування форма штампа змінюється і має вигляд $z = g(r,\tau)$, $g(r,0) = g_0(r)$. Область контакту є наперед невідомою.

При визначенні напружено-деформованого стану маємо межові умови на площадці контакту S, при $z = 0$: $w = g(r,\tau) + w_0$, $\tau_{z\theta} = \mu p$, $\tau_{\rho z} = 0$, а поза нею на вільній поверхні: $\sigma_z = 0$; $\tau_{z\theta} = 0$; $\tau_{\rho z} = 0$. Рівняння для визначення контактних напружень є таким [1]: $\int_{a_0}^{b_0} \sigma_z(\rho)\rho F(r,\rho)d\rho = W(r)$, при $\sigma_z \le 0$, $a_0 < r < b_0$, де $[a_0, b_0]$ – область контакту, $W(r) = \pi E(w_0 + g(r,\tau))/(1-\nu^2)$, $F(r,\rho) = 4K(4r\rho/(r+\rho)^2)/(r+\rho)$, ν – коефіцієнт Пуассона, $K(x)$ – еліптичний інтеграл першого роду.

Умови контакту можуть бути записані при $a < r < b$ у вигляді альтернативних рівнянь-нерівностей Сіньйоріні [2]:

$$\int_a^b q(\rho)F(r,\rho)d\rho = -W(r), \quad q > 0, \quad \int_a^b q(\rho)F(r,\rho)d\rho \geq -W(r), \quad q = 0, \quad (1)$$

де $q(\rho) = \rho p(\rho)$, $p(\rho) = -\sigma_z(\rho)$, a, b – наперед невідомі величини, причому $[a, b]$ містить область контакту. Інтегральні рівняння-нерівності Сіньоріні з використанням квадратурних формул для інтегралів з особливостями зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей, розв'язування яких зведено до знаходження мінімуму квадратичної форми за лінійних обмежень на невідомі контактні напруження. Контактний тиск визначали із умови мінімуму величини $J = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} A_{nm}q_m q_n + \sum_{m=0}^{N} W_n q_n$ при виконанні рівнянь-нерівностей вигляду $\sum_{m=0}^{N} A_{nm}q_m < -W_n$, $q_n \geq 0$, $n = 0,...,N$. Зауважимо, що J є додатною і на розв'язку рівнянь-нерівностей (1) дорівнює нулю. Розв'язок контактної задачі зі зношуванням знаходимо за зміною часової координати. Введемо в розгляд моменти часу $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta_k$, де Δ_k – малі прирости часової координати. Тоді форму штампа в наступний момент часу знаходимо за формулою $g(\tau_k, r) = g(\tau_{k-1}, r) + \Delta_k q(\tau_{k-1}, r)$, $k = 1,...$.

Визначено та досліджено нормальні контактні напруження та зношування поверхні гладких штампів різних форм за різних заглиблень. Розглянуто штампи з гладкою основою, форма якої на ділянці малих розмірів має локальні виступи. Виявлено, що внаслідок зношування локальних нерівностей контактні напруження розподіляються як у гладкому штампі. В усіх розглянутих випадках форма основи штампа в його центральній частині після зношування (при достатньо великих часах) виявилася конусоподібною.

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
2. *Signorini A*. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – **18**, № 1–2. – P. 95–139.

CONTACT INTERACTION OF AN AXISYMMETRIC STAMP WITH A HALF-SPACE INCLUDING WEAR

A numerical algorithm for solving the axisymmetric problem of the theory of elasticity about pressing a stamp into a half-space due to wear caused by the action of frictional forces is presented. The contact problem is formulated in the form of Signorini's integral equations-inequalities, which, using quadrature formulas for singular integrals, are transformed into a system of linear algebraic equations-inequalities. Solving the system is reduced to finding the minimum of the quadratic form under linear constraints on the unknown contact stresses. The wear process was investigated by the method of steps along the time coordinate, in which the contact area and the stress distribution in it were found numerically. Using the developed algorithm, the axisymmetric problem of the interaction of an elastic half-space with a stamp having local irregularities is also considered.

УДК 539.3

ВПЛИВ НАТЯГУ ПОВЕРХОНЬ НА РОЗКРИТТЯ КРУГОВОЇ ТРІЩИНИ ТА НАПРУЖЕННЯ В ЇЇ ОКОЛІ

Віктор Михаськів, Іванна Бутрак

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

mykhaskiv@gmail.com, butrak@ukr.net

На нанорівні поверхнева енергія є одним із ключових факторів механічної поведінки структурованих пружних тіл, розгляд якої у рамках континуального підходу передбачає матеріалізацію та наділення внутрішніх і міжфазних поверхонь власною пружністю та/або залишковим натягом [1]. Залучення мембранної моделі Гуртіна–Мердока для таких поверхонь [2] уможливлює аналіз відповідних задач з нанорозмірними тріщинами методом граничних інтегральних рівнянь [3], ефективність якого визначається способом урахування сингулярностей у ядрах рівнянь.

Нехай у безмежному ізотропному пружному тілі (μ та ν – його модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона) у площині x_1Ox_2 розташовано плоску кругову тріщину S з радіусом a. Силовий вплив на тіло з тріщиною задається самозрівноваженими нормальними зусиллями $p(\mathbf{x})$ на протилежних поверхнях дефекту та залишковим поверхневим натягом τ_s цих поверхонь. Тоді на основі мембранної моделі зв'язок між неперервними нормальними напруженнями $\sigma_{33}(\mathbf{x})$ та стрибком нормальних переміщень $\Delta u_3(\mathbf{x})$ в області S тріщини буде:

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}) + \frac{\tau_s}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Delta u_3(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S\,. \tag{1}$$

Задоволенням крайової умови (1) інтегральними поданнями напружень задача зведена до такого граничного інтегро-диференціального рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left[\frac{\tau_s}{2}\Delta u_3(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\iint\limits_S \frac{\Delta u_3(\mathbf{y})}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|}\,dS_{\mathbf{y}}\right] = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S\,. \tag{2}$$

Для розв'язання рівняння (2) використано його трансформація в слабосингулярне інтегральне рівняння другого роду шляхом аналітичного обернення лапласіана з точністю до гармонічної функції з подальшим її однознач-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_12.pdf

ним визначенням через врахування умови змикання поверхонь тріщини на її фронті L, тобто $\Delta u_3(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in L$. Побудову дискретного аналога рівняння здійснено методом колокацій у внутрішніх і фронтальних вузлових точках покритої граничними елементами області S з кусково-постійною апроксимацією розв’язку $\Delta u_3(\mathbf{x})$.

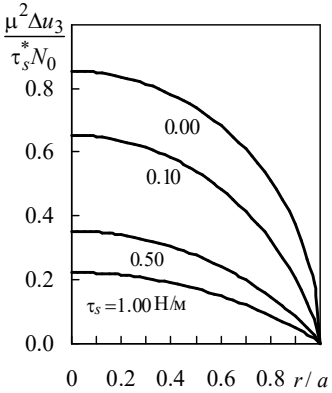


Рис. 1

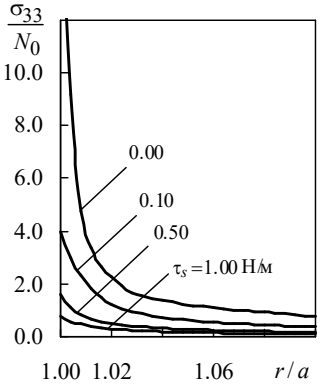


Рис. 2

Числові результати стосуються радіальних залежностей нормованих розкриття тріщини (рис. 1) та нормального напруження у її околі (рис. 2) при $p(\mathbf{x}) = N_0 = \text{const}$, $\nu = 0.33$, $\mu = 40.2262\,\text{ГПа}$, $\tau_s^* = 0.6056\,\text{Н/м}$, $a = \tau_s^* / \mu = 0.01506\,\text{нм}$.

1. *Kushch V.I., Shmegera S.V., Mykhas’kiv V.V.* Multiple spheroidal cavities with surface stress as a model of nanoporous solid // Int. J. Sol. Struct. – 2018. – **152-153**. – P. 261–271.
2. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* A continuum theory of elastic materials surfaces // Arch. Ration Mech. Anal. – 1975. – **57**. – P. 291–323.
3. Nguyen T.B., Rungamornrat J., Senjuntichai T., Wijeyewickrema A.C. FEM-SGBEM coupling for modeling of mode-I planar cracks in three-dimensional elastic media with residual surface tension effects // Eng. Anal. Bound. Elements. – 2015. – 55. – P. 40–51.

INFLUENCE OF SURFACES TENSION ON OPENING OF CIRCULAR CRACK AND STRESSES IN ITS VICINITY

The symmetric elastostatic problem for a 3D infinite solid with a circular crack accounting for the residual tension of its surfaces is solved by the boundary integral equation method. Numerical results concerning the crack opening displacements and stresses in the crack vicinity are presented and discussed to show the surface tension effects.

УДК 517.9:539.3

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТРИВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА З УМОВОЮ ТРАНСМІСІЙНОГО ТИПУ НА РОЗІМКНУТІЙ ЛІПШИЦЕВІЙ ПОВЕРХНІ

Юрій Сибіль

Львівський національний університет імені Івана Франка

sybil.yuri@gmail.com

Розглядається задача визначення стаціонарного температурного поля у тривимірній обмеженій області, що містить тріщину або тонке включення, які моделюються деякою розімкнутою поверхнею. Температура при переході через цю поверхню є непервною і пропорційною до різниці теплових потоків з різних сторін поверхні. Аналогічні задачі для теплопроникних та теплопровідних тріщинин розглядались в [1]. Двовимірний випадок такої задачі досліджено в роботі [2].

Нехай $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^3$ – обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ, S – розімкнута двостороння ліпшицева поверхня, з допомогою якої ми будемо моделювати деяку теплопроникну тріщину в тілі, обмеженому поверхнею Σ. Вважаємо, що $\overline{S} \subset \Omega_+$, де $\overline{S} = S \cup \Gamma$, Γ – межа S. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \overline{S}$, $[\gamma_{i,S}] = \gamma_{i,S}^+ - \gamma_{i,S}^-$, $i = 1,2$, де $\gamma_{0,S}^{\pm} u(x)$ – значення функції $u(x)$, заданої в області Ω, на S, а $\gamma_{1,S}^{\pm} u(x)$ – граничне значення її нормальної похідної з різних сторін S.

Математичною моделлю такої задачі стаціонарної теплопровідності є наступна задача в області Ω: знайти функцію $u \in H^1(\Omega)$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

умову неперервності температурного поля при переході через S та умову теплопроникності на S при заданій температурі на зовнішній поверхні Σ

$$\begin{aligned} &[\gamma_{0,S}] u(x) = 0, \quad \lambda [\gamma_{1,S}] u + \gamma_{0,S}^{\pm} u = f, x \in S, \\ &\gamma_{0,\Sigma}^{+} u(x) = g(x), x \in \Sigma. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $\lambda \in C(\overline{S})$, $f \in L_2(S)$, $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_14.pdf

Теорема 1. *Якщо* $\lambda \in C(\overline{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \overline{S}$, *то задача (1), (2) має єдиний розв'язок для довільних* $f \in L_2(S)$, $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Нехай $Q(x,y) = 1/(4\pi|x-y|)$. Для функції $u(x)$, яка є розв'язком задачі (1), (2) вірне наступне інтегральне подання: $u(x) = V_S\tau(x) + V_\Sigma\sigma(x)$, $x \in \Omega$, де $\tau = [\gamma_{1,S}]u$, $\sigma = \gamma^+_{1,\Sigma}u$, $V_S\tau(x) = \int_S Q(x,y)\tau(y)ds_y$, $V_\Sigma\sigma(x) = \int_\Sigma Q(x,y)\sigma(y)ds_y$, $x \in \Omega$.

Використавши крайові умови (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно невідомих τ та σ:

$$\begin{cases} \lambda\tau + K_S\tau + \gamma^+_{0,S}V_\Sigma\sigma = f, \\ \gamma^+_{0,\Sigma}V_S\tau + K_\Sigma\sigma = g, \end{cases} \tag{3}$$

де $K_S\tau = \gamma^+_{0,S}V_S\tau$, $K_\Sigma\sigma = \gamma^+_{0,\Sigma}V_\Sigma\sigma$ – інтегральні оператори зі слабкою особливістю, визначені на S та Σ відповідно.

Теорема 2. *Задача (1), (2) є еквівалентною системі (3). Якщо* $\lambda \in C(\overline{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \overline{S}$, *то система інтегральних рівнянь (3) має єдиний розв'язок для довільних* $f \in L_2(S)$, $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Для чисельного розв'язування системи (3) використовується метод колокації з використанням локальних базисних функцій, що дає можливість отримати добре обумовлену систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження наближених значень густин τ та σ.

1. *Кіт Г.С., Хай М.В.* Метод потенціалів в тривимірних задачах термопружності тіл з тріщинами. – Київ: Наукова думка, 1989. – 284 с.
2. *Sybil Yu., Grytsko B.* Boundary value problem for the two-dimensional Laplace equation with transmission condition on thin inclusion // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2016. – **3**, No. 109. – P. 120–129.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM OF STATIONARY HEAT CONDUCTION WITH CONDITION OF TRANSMISSION TYPE ON OPEN LIPSCHITZ SURFACE VALUE PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION

We consider the stationary temperature field in a domain with heat permeable crack or thin inclusion. The mathematical model of this problem is a boundary value problem for the three-dimensional Laplace equation in a bounded domain with boundary conditions of transmission type given on both sides of an open Lipschitz surface. Using the integral representation of the solution we reduce the initial boundary value problem to the equivalent system of integral equations. We show the existence and uniqueness of solutions to the boundary value problem and the obtained system of integral equations in appropriate functional spaces. For the numerical solution of the obtained system, we use the algorithm based on the collocation method.

УДК 539.3:534.1

ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ СФЕРИЧНОГО ДЕФЕКТУ

Олег Назаренко, Анжела Стехун

Державна академія будівництва та архітектури,
Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

Gelo.fabric@gmail.com, angela.stehun@gmail.com

Мета роботи. На основі методу розривних розв'язків [2, 3] у випадку стаціонарних пружних хвиль запропоновано спосіб зведення задач дифракції до системи одновимірних інтегро-диференціальних рівнянь. Деталізацію методу наведено для тонкого жорсткого сферичного включення.

Основний матеріал. Дефект [2, 3] – частина поверхні, при перетині якої зазнають розривів першого роду напруження та зміщення. Розглянемо випадок, коли дефектом є сферична поверхня. Побудуємо розривний розв'язок для хвильового рівняння

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad |\varphi| < \pi, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де Δ – оператор Лапласа у сферичній системі координат.

Під розривним розв'язком [2, 3] рівняння (1) розуміємо такий розв'язок, який задовольняє його всюди за виключенням лише точок дефекту. У цих точках функція та її нормальна (до поверхні дефекту) похідна зазнають розривів першого роду і додатково задані їхні стрибки:

$$\begin{aligned} &\psi(R-0,\theta,\varphi,t) - \psi(R+0,\theta,\varphi,t) = \langle\psi\rangle, \\ &\psi'(R-0,\theta,\varphi,t) - \psi'(R+0,\theta,\varphi,t) = \langle\psi'\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Позначимо похідну за змінною r штрихом і, застосовуючи до рівняння (1) інтегральні перетворення Лапласа (за змінною t), Фур'є (за змінною φ) та Лежандра (за змінною θ), зведемо (1) до вигляду:

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(r^2\psi'_{pnk}(r)\right)' - k(k+1)\psi_{pnk}(r)\right] - \frac{p^2}{c^2}\psi_{pnk}(r) = 0, \ 0 < r < \infty. \tag{3}$$

Застосувавши до (3) пряме, а потім зворотні перетворення Ганкеля і Лежандра [2], знаходимо трансформанту розривного розв'язку (3) зі стрибками (2):

$$\psi_{pn}(r,\theta) = R^2\left[\int_0^{\omega} T_{n,p}(\theta,\tau)\sin\tau d\tau - \int_0^{\omega}\tilde{T}_{n,p}(\theta,\tau)\sin\tau d\tau\right],$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_16.pdf

$$T_{n,p}(\theta,\tau)=\langle\psi'_{pn}\rangle M_{n,p}(\theta,\tau,r,R);$$
$$\tilde{T}_{n,p}(\theta,\tau)=\langle\psi_{pn}\rangle\frac{\partial}{\partial R}M_{n,p}(\theta,\tau,r,R), \qquad (4)$$

де

$$M_{n,p}(\theta,\tau,r,R)=\sigma_{kn}P_k^{|n|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\tau)\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{rR}}\begin{cases}I_\nu(Rpc^{-1})K_\nu(rpc^{-1}),\ r>R,\ \nu=k+\dfrac{1}{2},\\ I_\nu(rpc^{-1})K_\nu(Rpc^{-1}),\ r<R,\ k=0,1,2,\ldots,\end{cases}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – відповідно модифіковані функції Бесселя та Макдональда.

Якщо процес коливань є усталеним, то для функції $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ отримаємо рівняння (3), в якому $p=-i\omega_0$. І тоді, замість (4), остаточно отримуємо:

$$\tilde{\psi}_n(r,\theta)=R^2\left[\int_0^\omega P_{n,\mu}(\theta,\tau)\sin\tau d\tau-\int_0^\omega\tilde{P}_{n,\mu}(\theta,\tau)\sin\tau d\tau\right],$$
$$P_{n,\mu}(\theta,\tau)=\langle\tilde{\psi}'_{pn}\rangle M_{n,\mu},\quad n\tilde{P}_{n,\mu}(\theta,\tau)=\langle\tilde{\psi}_{pn}\rangle\frac{\partial}{\partial R}M_{n,\mu},$$
$$M_{n,\mu}\equiv M_{n,\mu}(\theta,\tau,r,R)=\sigma_{kn}P_k^{|n|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\tau)D_{k,\mu}(r,R),$$
$$D_{k,\mu}(r,R)=\frac{\pi i}{2\sqrt{rR}}\begin{cases}J_\nu(R\mu)H_\nu^{(1)}(r\mu),\ r>R,\ \mu=\dfrac{\omega_0}{c},\\ J_\nu(r\mu)H_\nu^{(1)}(R\mu),\ r<R,\ \nu=k+\dfrac{1}{2},k=0,1,2,\ldots.\end{cases}$$

1. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракція пружних хвиль. – Київ: Наукова думка, 1978. – 307 с.
2. *Nazarenko O.A.* Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect // Norwegian Journal of development of the International Science. – 2022. – No. 87. – P. 3–5.
3. *Popov G.Ya.* Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect // Advances in Mechanics. – 1992. – **15**, No. 1-2. – P. 71–110.

CONSTRUCTION OF A DISCONTINUOS SOLUTION OF THE WAWE EQUATION FOR A SPHERICAL DEFECT

Based on the method of discontinuous solutions in the case of stationary elastic waves, a method was proposed for reducing a number of diffraction problems to a system of one-dimensional integro-differential equations. The defect can be either a spherical crack or a thin rigid spherical inclusion. Detailing of the method is given for the second case.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ПІВПРОСТОРІ З ДВОЛАНКОВОЮ КРАЙОВОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ КОЛИВАННЯХ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Всеволод Попов, Ольга Кирилова

Національний університет «Одеська морська академія»

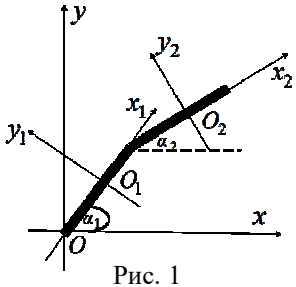


Рис. 1

Розглядається пружний ізотропний півпростір $y \ge 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < z < \infty$ з крайовою тріщиною, яка в площині Oxy займає відрізки довжини $2d_1$ і $2d_2$, зображені на рис. 1. Ланки тріщини знаходяться під дією зсувного вздовж осі Oz гармонічного навантаження $P_k e^{-i\omega t}$. Поверхня півпростору є незавантаженою:

$$\tau_{yz}(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (1)$$

За таких умов відмінною від нуля є лише z-компонента вектора переміщень $w(x,y)$, яка задовольняє рівняння Гельмгольца. З ланками тріщин пов'язуються локальні системи координат $O_k x_k y_k$, $k = 1,2$ (рис. 1). Якщо $w_k(x_k, y_k)$ є переміщення $w(x,y)$ після переходу до системи $O_k x_k y_k$, то мають виконуватися рівності

$$\tau_{y_k z}(x_k, 0) = G\,\partial w_k(x_k, 0)/\partial y_k = P_k, \quad -d_k < x < d_k, \; k = 1,2.$$

Далі будуються розривні розв'язки рівняння Гельмгольца $w_k^d(x_k, y_k)$ [2] зі стрибками переміщень $\chi_k(x_k)$ на ланках тріщин. Позначимо $w_k^g(x,y)$, $k = 1,2$, ці розривні розв'язки після переходу до системи координат Oxy. Далі розв'язок задачі шукаємо у вигляді $w(x,y) = w_1^g(x,y) + w_2^g(x,y) + w^h(x,y)$, де $w^h(x,y)$ – невідома функція, яка має задовольняти рівняння Гельмгольца та забезпечити виконання граничної умови (1). Після побудови цієї функції отримана система сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих стрибків:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_17.pdf

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_1'(\tau)\left[\frac{1}{\tau-\varsigma}-\frac{(\tau+1)\cos 2\alpha_1-(1+\varsigma)}{p_1(\tau,\varsigma)}\right]d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2'(\tau)g_{12}(\tau,\varsigma)d\tau+$$

$$+\frac{\kappa_0^2\gamma_1^2}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\tau)\ln|\tau-\varsigma|d\tau+\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\varphi_l'(\tau)U_{1l}(\tau,\varsigma)d\tau+\int_{-1}^{1}\varphi_l(\tau)Q_{1l}(\tau,\varsigma)d\tau\right)+$$

$$+\frac{\varphi_1(-1)}{2\pi}U_{11}^{-}(\varsigma)+\frac{\varphi_2(-1)}{2\pi}\frac{\gamma_2\left(2\cos 2\alpha_1-(1+\varsigma)\right)}{\gamma_1 p_1(1,\varsigma)}=P_{01}; \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_1'(\tau)g_{21}(\tau,\varsigma)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2'(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\varsigma}+\frac{\kappa_0^2\gamma_k^2}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2(\tau)\ln|\tau-\varsigma|d\tau+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\varphi_l'(\tau)V_{2l}(\tau,\varsigma)d\tau+\int_{-1}^{1}\varphi_l(\tau)Q_{2l}(\tau,\varsigma)d\tau\right)+\frac{\varphi_1(-1)}{2\pi}V_{21}^{-}(\varsigma)=P_{02}.$$

В системі (2) введено позначення: $\alpha_{kl}=\alpha_k-\alpha_l$, $\gamma_k=d_k/d$, $d=\max(d_1,d_2)$,

$d_k\varphi_k(\tau)=\chi_k(d_k\tau)$, $p_1(\tau,\varsigma)=(1+\tau)^2+(1+\zeta)^2-2(1+\tau)(1+\zeta)\cos 2\alpha_1$,

$$g_{kl}(\tau,\varsigma)=\frac{\gamma_l(\gamma_l(1+(-1)^l\tau)\cos\alpha_{kl}+\gamma_k(1+(-1)^k\varsigma))}{\gamma_l^2(1+(-1)^l\tau)^2+\gamma_k^2(1+(-1)^k\zeta)^2+2\gamma_k\gamma_l(1+(-1)^l\tau)(1+(-1)^l\varsigma)\cos\alpha_{kl}}.$$

Функції $V_{kl}(\tau,\varsigma)$, $Q_{kl}(\tau,\varsigma)$ є неперервними при $-1\le\tau,\varsigma\le 1$.

Як і в [1, 2], наближені розв'язки системи (2) отримуються числовим методом. Оцінка напруженого стану і прогнозування поширення тріщин здійснюється за значеннями коефіцієнта інтенсивності напружень, для якого отримано наближену формулу.

1. *Popov V.G.* Harmonic vibration of a half-space with a surface-breaking crack under condition of out-of-plane deformation // Mechanics of Solids. – 2013. – **48**, No. 2. – P. 194–202.
2. *Popov V.G.* Two cracks emerging from a single point under the influence of a longitudinal shear wave // Mechanics of Solids. – 2018. – **53**, No. 2. – P. 195–202.

STRESS STATE OF A HALF-SPACE WITH A TWO-LINK CRACK UNDER OSCILLATIONS OF LONGITUDINAL SHEAR

A problem on determining stresses in an elastic half-space with a two-link edge crack under harmonic oscillations of the longitudinal shear was solved. The original problem was reduced to a system of two singular integro-differential equations. This system was solved numerically by a method that takes into peculiarity the features of the solution and is based on the use of special quadrature formulas for singular integrals.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ ПРИ ДИФРАКЦІЇ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ НА СИСТЕМІ ТРІЩИН ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія»

Розглядається пружний ізотропний простір, який знаходиться у стані плоскої деформації та містить N наскрізних тріщин. Ці тріщини в координатній площині Oxy розміщуються на відрізках зовдовжки $2d_k$ з центрами у точках $O_k\left(a_k,b_k\right), k=1,2,...N$ (рис. 1). Тріщини перебувають під дією поздовжніх зсувних хвиль, які визначаються потенціалами

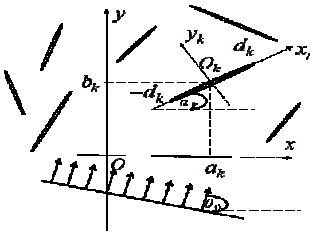


Рис. 1

$$\psi_{0j}\left(x,y\right)=A_j\kappa_j^{-1}\exp\left(i\kappa_j\left(x\cos\theta_0+y\sin\theta_0\right)\right);\ j=1,2. \tag{1}$$

Нехай $u\left(x,y\right)$ і $v\left(x,y\right)-$ переміщення у розсіяному на тріщинах хвильовому полі. Тоді вони мають задовольняти наступним рівнянням руху:

$$\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\Delta u=-\rho\omega^2u;\ \ \left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\Delta v=-\rho\omega^2v. \tag{2}$$

Для формулювання крайових умов на тріщинах з кожною з них пов'язується локальна система координат $O_kx_ky_k$ (рис. 1). Нехай $u^k\left(x_k,y_k\right)$, $v^k\left(x_k,y_k\right)$, $\sigma_x^k\left(x_k,y_k\right),\sigma_y^k\left(x_k,y_k\right)$, $\tau_{yx}^k\left(x_k,y_k\right)-$ переміщення і напруження розсіяних хвиль у системі $O_kx_ky_k$, а $u^{0k}\left(x_k,y_k\right)$, $v^{0k}\left(x_k,y_k\right)$, $\sigma_x^{0k}\left(x_k,y_k\right)$, $\sigma_y^{0k}\left(x_k,y_k\right)$, $\tau_{yx}^{0k}\left(x_k,y_k\right)-$ переміщення та напруження, спричинені хвилями (1), що поширюються. За умови незавантаженості поверхонь тріщин мають виконуватись рівності

$$\sigma_y^k\left(x_k,0\right)=-\sigma_y^{0k}\left(x_k,0\right);\ \tau_{yx}^k\left(x_k,0\right)=-\tau_{yx}^{0k}\left(x_k,0\right);-d_k<x<d_k;k=1,2,...N. \tag{3}$$

Як і у [1], вихідна задача (1)-(3) приводиться до системи $2N$ сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень $\chi_{sk}\left(x_k\right)$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_18.pdf

Щоб спростити розв’язання цієї системи у випадку великої кількості тріщин, пропонується ітераційний метод. Як і у [2], він полягає в розв’язуванні на кожному кроці рівнянь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{2\left(1-\xi^2\right)}{\tau-\zeta}E+R_{l2+l}\left(\tau-\zeta\right)\right]\Phi_{l+2}^{(i)\prime}\left(\tau\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\kappa_0^2\Gamma\ln\left|\tau-\zeta\right|+V_{ll+2}\left(\tau-\zeta\right)\right]\Phi_{l+2}^{(i)}\left(\tau\right)d\tau= \tag{4}$$

$$=F_l\left(\zeta\right)-\sum_{s=3}^{4}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}F_{ls}\left(\tau,\zeta\right)\Phi_s^{(i-1)\prime}\left(\tau\right)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}U_{ls}\left(\tau,\zeta\right)\Phi_s^{(i-1)}\left(\tau\right)d\tau\right),$$

$l=1,2;\ i=1,2,3....$

У рівняннях (4) позначено $\varphi_{sk}\left(\tau\right)=\chi_{sk}\left(d_k\tau\right)/d_k$, $\Phi_s\left(\tau\right)=(\varphi_{s1}(\tau),$ $\varphi_{s2}(\tau)\ ,...,\varphi_{sN}(\tau))^T$, $\Phi_s'\left(\tau\right)=\left(\varphi_{s1}'\left(\tau\right),\varphi_{s2}'\left(\tau\right),...,\varphi_{sN}'\left(\tau\right)\right)^T$, $s=3,4;$ $E-$ одинична $N\times N$ матриця, $\Gamma-$ діагональна $N\times N$ матриця з елементами $\gamma_k=d_k/d, d=\max\left(d_1,d_2,...,d_N\right)$ на діагоналі, $R_{ll+2}\left(\tau-\zeta\right)$, $V_{ll+2}\left(\tau-\zeta\right)$, $l=1,2-$ діагональні $N\times N$ матриці, $F_{ls}\left(\tau,\zeta\right)$, $U_{ls}\left(\tau,\zeta\right)-$ $N\times N$ матриці, діагональні елементи яких дорівнюють нулю. Ненульові елементи цих матриць є неперервними на $-1\le\tau,\zeta\le1$ функціями. При $i=0$ суми у правих частинах (4) мають бути відсутніми і отримуємо інтегральні рівняння, які відповідають N поодиноким тріщинам. Їх розв’язок обирається за нульове наближення. Розв’язки інтегральних рівнянь (4) здійснено числовим методом, як і в [1, 2]. Наведено числові приклади, які показують збіжність ітераційного процесу навіть для достатньо щільного розміщення тріщин.

1. *Popov V.G.* System of cracks under the impact of plane elastic waves // J. Phys.: Conf. – 2022. – Ser. 2231 012004. Doi: 10.1088/1742-6596/2231/1/012004.
2. *Popov V.G.* Iterative method for the determination of a difraction field in the ineraction of a longitudinal share wave with a system of cracs // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **183**, No. 2. – P. 241–251.

DETERMINING OF THE WAVE FIELD UNDER DIFFRACTION OF ELASTIC WAVES ON A SYSTEM OF CRACK BY THE ITERATIVE METHOD

The problem of determining the wave field under the diffraction of elastic waves on the cracks system has been solved. The initial problem is reduced to the system of singular integro-differential equations. An iterative method of solving this system is proposed in which zero approximation is the solution of ecuations for alones cracks.

УДК 539.3

ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З СИСТЕМОЮ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Микола Слободян, Леся Куротчин

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

mykola.slobodyan@lnu.edu.ua, klesi@i.ua

У роботі розглянуто круглу ізотропну пластину завтовшки $2h$ із системою M довільно орієнтованих наскрізних прямолінійних тріщин довжиною $2l_k$ $\left(k=\overline{1,M}\right)$.

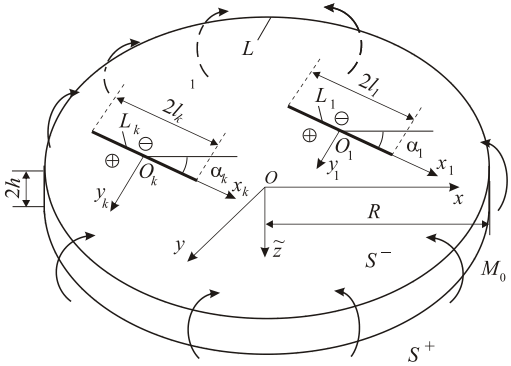


Рис. 1

Розмістимо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ у серединній площині пластини, так що початок координат співпадає з центром пластини, а вісь $O\tilde{z}$ була перпендикулярна до неї. Виберемо у площині Oxy полярну систему координат r і θ таким чином, щоб точка O була її полюсом, а Ox – полярною віссю. Нехай $\left(x_{0k}, y_{0k}\right)$ – координати центрів тріщин у площині Oxy, а α_k – кут нахилу лінії k-тої тріщини до осі Ox $\left(k=\overline{1,M}\right)$. Введемо декартову систему координат $O_k x_k y_k$ з центром O_k у точці z_{0k} $\left(z_{0k}=x_{0k}+iy_{0k}\right)$, так щоб вісь $O_k x_k$ збігалася з лінією k-тої тріщини. Пластина згинається рівномірно

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_19.pdf

розподіленими моментами M_0, прикладеними до її межі. Позначимо через S^+ область ззовні пластини, через S^- – всередині, через L_k – лінію, де розміщена k-та тріщина, через L – границю пластини (див. рис. 1).

Припустимо, що при заданому навантаженні береги тріщин будуть контактувати по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщин. Тому розв'язок задачі будемо шукати у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа-Лява, та плоскої задачі.

На межі пластини будуть такі крайові умови

$$M_r = M_0,\ P_r = 0,\ \sigma_{\Pi r} = 0,\ \tau_{\Pi r\theta} = 0,\ x \in L,$$

де M_r – згинальний момент, $\sigma_{\Pi r}$ і $\sigma_{\Pi r\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила.

Крайові умови гладкого контакту берегів тріщин мають вигляд

$$M^{\pm}_{y_k} = h\beta_k N_k,\ P^{\pm} = 0,\ \tau^{\pm}_{\Pi x_k y_k} = 0,\ \sigma^{\pm}_{\Pi y_k y_k} = -\frac{N_k}{2h},\ x_k \in L_k,\ k = \overline{1,M},$$

$$\frac{\partial [v_{\Pi}]}{\partial x_k} + \lambda_k h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y_k} \right] = 0,\ x_k \in L_k,\ k = \overline{1,M},$$

$$\beta_k = 1 - \gamma_k / 3,\ \lambda_k = 0.5\left(1 + \left(1 - \gamma_k\right)^2\right),\ \gamma_k = h_k / h,$$

де N_k – контактне зусилля між берегами k-тої тріщини; h_k – висота контакту k-ої тріщини; $[f] = f^+ - f^-$, значками "+" і "–" позначені граничні значення функцій при прямування точки площини до k-тої тріщини при $y_k \to \pm 0$.

Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі, розв'язок сформульованої задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь на берегах тріщини, а крайові умови на межі круглої пластини вдалося задовольнити аналітично. Здійснено числовий аналіз контактного зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль при різних значеннях параметрів задачі, на основі якого побудовано відповідні графіки.

BENDING OF A CIRCULAR PLATE WITH A SYSTEM OF CRACKS WITH ACCOUNT FOR THE STRIPED CONTACT OF THEIR EDGES

A solution to the problem of bending a circular isotropic plate with a system of through rectilinear cracks is constructed. A system of singular integral equations concerning displacement jumps in the plane problem and rotation angle jumps in the problem of bending on the edges of cracks is obtained. Numerical analysis of the problem was carried out and corresponding graphs were constructed for different geometric parameters of the problem.

УДК 539.375

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА БІОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З МАЛОМАСШТАБНИМИ МІЖФАЗНИМИ ТРІЩИНАМИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ ЗА НАЯВНОСТІ ВНУТРІШНЬОЇ ПІВНЕСКІНЧЕННОЇ ТРІЩИНИ

Володимир Назаренко, Олександр Кіпніс

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

a.l.kipnis@gmail.com

Розглядається плоска статична симетрична задача теорії пружності для біоднорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить маломасштабні міжфазні зсувні тріщини у кутовій точці і навантажену внутрішню півнескінченну тріщину (рис. 1).

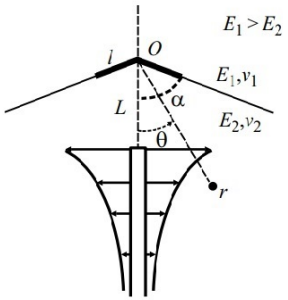


Рис. 1

Вважається, що довжини міжфазних тріщин значною мірою менші за відстань від кутової точки до вершини внутрішньої тріщини. Береги півнескінченної тріщини знаходяться під дією тиску, який розподілено за законом F / r^2, $r \geq L$ (F – задана додатна стала, що має розмірність сили).

З метою проведення дослідження напруженого стану біля кінців міжфазних тріщин та біля кутової точки, у відповідності до підходу, який запропоновано в [1], задачу, що розглядається, – задачу в цілому – розкладемо на зовнішню і внутрішню задачі. Зовнішньою задачею є задача теорії пружності

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_20.pdf

для біоднорідної ізотропної площини з внутрішньою навантаженою півнескінченною тріщиною (рис. 2). Внутрішня задача – плоска статична симетрична задача теорії пружності для біоднорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить тріщини скінченної довжини, що виходять з кутової точки і які розташовані на цій межі (рис. 3).

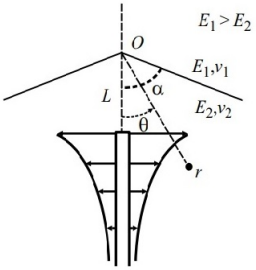


Рис. 2

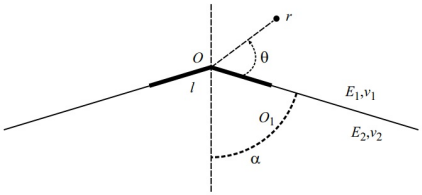


Рис. 3

Точні розв’язки внутрішньої і зовнішньої задач побудовано методом Вінера–Гопфа [2, 3] у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Меллі-на [4].

На основі побудованих розв’язків визначено коефіцієнт інтенсивності напружень в кінцях міжфазних тріщин у задачі в цілому та досліджено характер зміни руйнуючого навантаження.

1. *Кипнис А.Л.* О подходе к решению задач о межфазных трещинах, зародившихся в угловых точках кусочно-однородного тела // Доповіді НАН України. – 2014. – № 10. – С.51–55.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
4. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.

LIMIT EQUILIBRIUM OF A BIHOMOGENEOUS PLANE WITH SMALL-SCALE INTERFACIAL CRACKS AT A CORNER POINT OF INTERFACE IN THE PRESENCE OF A LOADED INTERNAL SEMI-INFINITE CRACK

A plane static symmetric problem of elasticity theory for a piecewise homogeneous isotropic plane with an interface in the form of sides of angle, containing small-scale interfacial shear cracks at a corner point and a loaded internal semi-infinite crack, is considered. The exact solution of this problem is constructed by the Wiener-Hopf method in combination with the apparatus of the Mellin integral transform. The stress intensity factor at the tips of interfacial cracks was determined and the nature of the change in the breaking load was studied.

УДК 539.3

ВПЛИВ МІЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА МІЦНІСТЬ СЕРЕДОВИЩА ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Олександр Кривий, Юрій Морозов

Національний університет «Одеська морська академія»,
Державний університет «Одеська політехніка»

krivoy-odessa@ukr.net, morozovyu@gmail.com

Оцінку здатності композитних конструкцій витримати прикладені навантаження з урахуванням наявності дефектів, можна реалізувати за допомогою критерію локального руйнування: поведінкою узагальненого коефіцієнта напружень K_z^* в околі дефекту. Для цього отримано вираз для нормальних напружень у площині з'єднання різних матеріалів, коли $\rho > a$.

Подання для напружень отримаємо, використавши сингулярні інтегральні співвідношення [1], та підхід запропонований в роботах [1-5]:

$$\sigma_z\Big|_{z=0} = -\frac{q_{12}}{2\rho}(e^{-i\varphi}\,\bar{\mathrm{D}}_*\,\mathrm{K}[v_2^- e^{i\varphi}] + e^{i\varphi}\,\bar{\mathrm{D}}_*\mathrm{K}[\overline{v_2^-}\,e^{-i\varphi}]) - q_{12}\frac{e^{i\varphi}}{\rho}\mathrm{D}_*\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}\bar{\mathrm{D}}_*\mathrm{K}[v_4^-].$$

З урахуванням впливу температурного навантаження нормальні напруження в площині з'єднання матеріалів подамо так:

$$\begin{aligned}\sigma_z^+\Big|_{z=0} &= q_{15}v_5^-(\rho,\varphi) - \frac{q_{12}}{2\rho}\{\cos\varphi\,\mathrm{Re}[\int_0^a 2\eta_{21}^*(t)dt + \\ &+\int_0^a \frac{\eta_{21}^*(t)}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt] - 2\rho\int_0^a \frac{t\eta_{20}^*(t)}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt + +\sin\varphi\,\mathrm{Im}[\int_0^a 2\eta_{21}^*(t)dt + \\ &+\int_0^a \frac{\eta_{21}^*(t)}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt] - 2\rho\int_0^a \frac{t\eta_{20}^*(t)}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt] - q_{14}\frac{2ha}{\rho}{}^2SC_1^0\,.\end{aligned} \qquad (1)$$

У випадку заданого теплового потоку на включенні, асимптотика для нормальних напружень має вигляд

$$\sigma_z^+\Big|_{z=0} \cong \frac{\pi}{2}\frac{q_0}{(2a)^{1/2}\sqrt{\rho-a}}\{\gamma_{11}\omega_c^a + \gamma_{12}\omega_s^a\}. \qquad (2)$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_21.pdf

Тоді, пов'язаний з інтенсивністю теплового потоку узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень (УКІН) набуде вигляду

$$K_z^* = q_0 \sum_{k=1}^{2} \sqrt{\gamma_{1k}^2} \ . \tag{5}$$

На рис. 1,2 наведені результати розрахунків для комбінації трансверсально ізотропних матеріалів: 1. Magn.–Cadm.; на рис. 2 для комбінації Magn.–Zn.

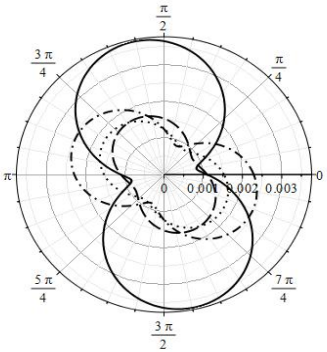


Рис. 1 K_z^* / q_0 для комбінації 1

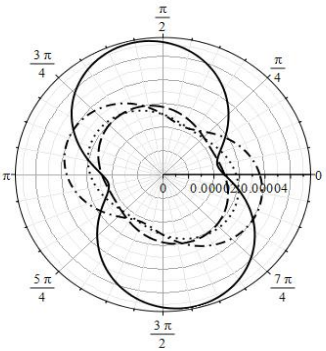


Рис. 2 K_z^* / q_0 для комбінації 2

1. *Kryvyy O.* The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Modern Analysis and Applications. – Ser. Operator Theory: Advances and Applications. – **191**. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 395–406.
2. *Krivoi A.F., Radiollo M.V.* Specific features of the stress field near inclusions in a composite anisotropic plane// Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela. – 1984. – P. 84–92.
3. *Kryvyi O., Morozov Yu.* Thermally active interphase inclusion in a smooth contact condition with transversely isotropic half-spaces // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2020. – **14**, No. 52. – P. 33–50.
4. *Kryvyi O.F., Morozov Yu.O.* Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise-homogeneous space with two circular inclusions // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 162–182.
5. *Kryvyi O.F., Morozov Yu.O.* The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic elastic space // Дослідження в математиці і механіці. – 2020. – **25**, № 1. – С. 16–30.

THE INFLUENCE OF STRUCTURAL HEMOGENIITIES ON THE STRENGTH UNDER TEMPERATURE LOAD

The presence of hard inclusions significantly reduces the service life of structures, and under certain conditions leads to their destruction. The behavior of the generalized stress intensity factor in the vicinity of defects is chosen as a failure criterion. A numerical analysis of the behavior of the intensity coefficients near circular absolutely rigid interfacial inclusions for some combinations of transversally isotropic materials.

УДК 539.4

ВІДНОВЛЕННЯ ІН'ЄКТУВАННЯМ МІЦНОСТІ ЦИЛІНДРА З ТРІЩИНОЮ ПРИ КРУЧЕННІ

Віктор Силованюк, Наталія Івантишин, Максим Філіпов

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

vsylovanyuk@gmail.com; n.ivantyshyn@gmail.com; maksym.filipov@gmail.com

У будівельній галузі застосовують ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених бетонних і залізобетонних споруд [1, 2]. Для надійної експлуатації відновлених таким чином об'єктів важливо оцінити їх залишковий ресурс. Деякі дослідження в цьому напрямі виконані раніше [2, 3]. Нижче запропоновано математичну модель заліковування тріщин у трансторопному циліндрі за умов кручення.

Нехай у площині ізотропії довгого трансторопного циліндра радіусом R (див. рис. 1) міститься залікована ін'єктуванням дископодібна тріщина радіусом a ($R >> a$). Циліндр зазнає скруту зусиллями з моментом M. Циліндричну систему координат (r, θ, z) вибираємо з початком в центрі тріщини так, щоб площина z=0 збігалася з площиною ізотропії пружних властивостей.

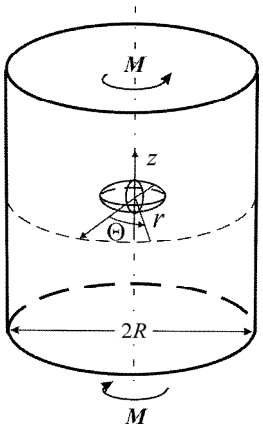


Рис. 1

За використання моделі пружного прошарку типу Вінклера задачу зведено до розв'язування інтегрального рівняння відносно переміщень повер-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_22.pdf

хонь тріщини. Коли тріщина заповнена в усьому об'ємі, проведено числовий аналіз впливу ступеня заповнення тріщини на ефективність відновлення міцності циліндричного елемента конструкції з тріщиною. Отримано точний аналітичний розв'язок відповідного інтегрального рівняння. На основі силового критерію механіки руйнування встановлено залишковий ресурс міцності за скруту залікованого циліндра

$$M_* = \frac{K_{\text{IIIC}}\sqrt{\pi}R^4(3\pi+4\beta\varepsilon)}{8\,a^{3/2}(1-\varepsilon)}\,. \tag{1}$$

Тут K_{IIIC} – тріщиностійкість матеріалу за поздовжнього зсуву в площині ізотропії; $\beta=a/c$, ε – відношення модулів зсуву матеріалів.

Для практики важливим є вибір ін'єкційного матеріалу такої міцності, щоб він не зруйнувався раніше від основного. На основі запропонованої моделі запишемо необхідну міцність на зсув ін'єкційного матеріалу

$$\tau_в \geq -\frac{K_{IIIC}(3\pi+4\beta\varepsilon)\mu_*}{4\sqrt{a}(1-\varepsilon)\sqrt{\pi\tilde{\mu}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}}+\frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi+4\beta\varepsilon)}\right), \tag{2}$$

де μ і $\tilde{\mu}$ – модулі зсуву транстропного матеріалу в площині тріщини і в поперечних площинах, відповідно.

Встановлено, що ефективність відновлення міцності циліндра з тріщиною залежить від геометричних параметрів дефекту та відношення модулів зсуву матеріалів. Із отриманих результатів випливає, що підбором ін'єкційного матеріалу можна досягти повного відновлення міцності пошкодженого тріщиною циліндра.

1. *Czarnecki L., Emmons P.H.* Naprava i ochrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 s.
2. *Panasyuk V.V., Marukha V.I., and Sylovanyuk V.P.* Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – 230 p.
3. *Sylovanyuk V.P. and Ivantyshyn N.A.* Healing of cracks in anisotropic bodies // Materials Science. – 2020. – **55**, No. 6. – P. 804–811.

RESTORATION OF THE STRENGTH OF A CYLINDER WITH A CRACK BY INJECTION

A mathematical model of crack healing in a transversely isotropic cylinder subjected to torsional deformation has been constructed. The problem is reduced to solving the integral equation with respect to the displacements of the crack surfaces. For the case when the crack is filled in the entire volume, an exact analytical solution of the corresponding integral equation is obtained. The effectiveness of cylinder strengthening depending on the geometric parameters of the crack and the mechanical characteristics of the injection material after solidification was determined.

УДК 539.3

ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ СКІНЧЕННИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ СПОЛУЧНОГО ПРОШАРКУ ТА ВНУТРІШНІХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Андрій Василишин, Ярослав Пастернак, Іван Звізло, Георгій Сулим

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

vasylyshyn.c.h@gmail.com, yaroslav.pasternak@gmail.com,
zvizloivan0@gmail.com, gtsulym@gmail.com

Бі- та мультиматеріальні структури широко використовують у сучасному інженерному проєктування. Без них практично неможливе створення приладів точної механіки, перетворювачів енергії, пристроїв точного позиціонування тощо. Такі вироби дають можливість створювати давачі та цілі сенсорні системи, що в свою чергу здатні в режимі реального часу діагоностувати відповідні конструкції.

Оскільки створення біматеріалів дуже часто відбувається за допомогою механічного поєднання сегнетоелектричних та магнітострикційних компонент, дуже важливим є глибоке вивчення впливу специфіки межі контакту (інтерфейсу) складових на фізико-механічні поля всередині такого кусково-однорідного тіла. Навіть за майже ідеального електромеханічного контакту цей інтерфест може істотно впливати на температурні та, як наслідок, магнітоелектромеханічні поля. В основному виділяють два типи таких інтерфейсів: інтерфейс низької (типу Капіци) та високої теплопровідності [2]. Особливістю інтерфейсу високої теплопровідності є те, що при переході через поверхню контакту складових тепловий потік має стрибок, а температуру все ще можна вважати неперервною функцією [1]. Незважаючи на те, що даний тип інтерфейсу істотно впливає на розподіл температур у смарт-матеріалах, публікацій, що стосуються вивчення його впливу у термомагнітоелектропружних кусково-однорідних тілах практично немає [3].

У даній роботі на основі використання формалізму Стро [1] та методів теорії функції комплексної змінної для математичного моделювання складеного тіла із інтерфейсом високої теплопровідності та системою замкнутих і розімкнутих контурів всередині кожної складової біматеріалу було отримано

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_23.pdf

систему (гіпер)сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій розривів (стрибків) фізико-механічних полів на цих контурах. Для моделювання внутрішніх тонких неоднорідностей було використано принцип спряження континуумів різної вимірності, що полягає у заміні тонкого включення деякою поверхнею розриву теплофізичного та напружено-деформованого стану тіла.

Для прикладу розглянуто біматеріальне термоелектромагнітопружне призматичне тіло квадратного поперечного перерізу із інтерфейсом високої теплопровідності. Складові тіла вважалися виготовленими із титанату барію ($BaTiO_3$ – піроелектрик) та селеніду кадмію (CdSe – піромагнетик). Його верхня, нижня та бічні поверхні вважалися теплоізольованими та вільними від механічних, теплових і електромагнітних навантажень. Окрім інтерфейсу, тіло містило ще й тонке прямолінійне в плані електропровідне абсолютно жорстке чи механічно податне стрічкове включення, розташоване під кутом φ до межі поділу матеріалів. Властивості його теплопровідності варіювалися у повному спектрі можливих змін: від абсолютної теплопровідності до повної теплоізольованості. Зовнішнім температурним навантаженням були джерело та стік тепла однакової інтенсивності, розміщені антисиметрично у різних складових тіла.

Побудовано графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень та електричних зміщень від параметра теплопровідності інтерфейсу для різних значень кута φ та параметрів матеріалу включення. Вплив електричних параметрів матеріалів на усі фізико-механічні поля в тілі поблизу включення і, зокрема, на значення узагальнених коефіцієнтів напруження є значним, а тому їх обов'язково потрібно брати до відома при розв'язуванні даного класу задач.

1. *Hwu* C. Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – 674 p.
2. *Kaessmair S., Javili A., Steinmann P.* Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces // Arch Appl Mech. – 2014. – **84**, No. 9–11. – P. 1409–1426.
3. *Quang H.L., Phan T.L., Bonnet G.* Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – **50**. – P. 1428–1444.

THERMO-MAGNETO-ELECTRO-ELASTICITY OF FINITE PIECE-HOMOGENEOUS SOLIDS IN THE PRESENCE OF A COUPLING LAYER AND INTERNAL THIN INCLUSIONS

The paper presents a method for solving plane problems of thermomagneto-electroelasticity for finite biomaterial solids bonded with a thin bonding layer (interface) of high thermal conductivity with thin inclusions sensitive to the influence of physical and mechanical fields. Due to the use of the extended Stroh formalism and the theory of complex variable functions, Somiliana-type integral equations are constructed. The calculation and analysis of the solutions of a number of problems for finite solids with inclusions that can interact with each other was carried out.

УДК 539.3

МІЖФАЗНА ТРІЩИНА ІЗ ЗОНАМИ КОНТАКТУ У НЕОДНОРІДНІЙ АНІЗОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ

Костянтин Архипенко, Олександр Кривий

Національний університет «Одеська морська академія»

k_arkhipenko@ukr.net, krivoy-odessa@ukr.net

Розглянуто задачу про міжфазну тріщину $L:\{y\in[-a;a],x=0\}$ у неоднорідній площині, що складається з двох різних анізотропних півплощин з'єднаних вздовж осі Oy. На кінцях тріщини враховано зони контакту $L_1:\{y\in[a-\varepsilon_1;a],x=0\}$ та $L_2:\{y\in[-a;-a+\varepsilon_2],x=0\}$, довжини яких є невідомими і мають бути визначені при розв'язанні задачі.

На нескінченості прикладені зусилля, що викликають на берегах тріщини напруження $\sigma_x(\pm 0,y)=P^{\pm}(y)$, $\tau_{xy}(\pm 0,y)=Q^{\pm}(y)$, $y\in[-a+\varepsilon_2;a-\varepsilon_1]$, а на зонах контакту вважаються реалізованими умови проковзування берегів тріщини, за яких нормальне та дотичне напруження підпорядковані закону тертя Кулона: $\tau_{xy}^{\pm}\big|_{x=0}=-\mu\cdot\sigma_x^{\pm}\big|_{x=0}$, $y\in L_K=L_1\cup L_2$.

Уведемо позначення для напружень і похідних переміщень на тріщині $\{\sigma_x,\tau_{xy},v_y',u_y'\}_{x=\pm 0}=\{\varphi_j^{\pm}(y)\}_{j=\overline{1,4}}$, $y\in L$, та їхніх сум і різниць $H_j^{\pm}(y)=\varphi_j^{+}(y)\pm\varphi_j^{-}(y)$, $j=\overline{1,4}$, $y\in L$. Використавши інтегральні співвідношення [1–5], відносно невідомої суми нормальних напружень $H_1^{+}(y)$, $y\in L_1\cup L_2$, та невідомих різниць похідних дотичного й нормального переміщення: $H_3^{-}(y), y\in L$, і $H_4^{-}(y), y\in L_0=L\setminus L_K$, отримано наступні системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР):

$$\begin{cases}-lH_1^{+}(y)+b_{13}H_3^{-}(y)+c_{13}\Gamma\left[H_3^{-}\right](y)+c_{14}\Gamma_0\left[H_4^{-}\right]=F_1(y),\\ l\mu H_1^{+}(y)+c_{23}\Gamma\left[H_3^{-}\right](y)+c_{24}\Gamma_0\left[H_4^{-}\right]=F_2(y),\end{cases}\quad y\in L_K, \qquad (1)$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_24.pdf

$$\begin{cases} b_{13}H_3^-(y)+c_{13}\Gamma\left[H_3^-\right](y)+c_{14}\Gamma_0\left[H_4^-\right]=F_1(y), \\ b_{24}H_4^-(y)+c_{23}\Gamma\left[H_3^-\right](y)+c_{24}\Gamma_0\left[H_4^-\right]=F_2(y), \end{cases} \quad y\in L_0, \qquad (2)$$

де l, b_{ij}, c_{ij} залежать від пружних констант анізотропних півплощин;

$$\Gamma[f](y)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{f(t)dt}{t-y},\ \Gamma_0[f](y)=\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\frac{f(t)dt}{t-y}.$$

Постановку задачі завершує умова для стрибка дотичних переміщень у зоні контакту з проковзуванням:

$$\left\langle v|_{x=0}\right\rangle = v(+0,y)-v(-0,y)>0,\ y\in L_1\cup L_2.$$

Використавши методику робіт [1–5], виконано аналіз розв'язків систем СІР (1)–(2) та з'ясовано показники особливостей полів напружень і переміщень, коли $y\to\pm a$ та $y\to\pm a\mp\varepsilon_{1,2}$. Запропоновано метод розв'язування систем СІР (1)-(2), що враховує сингулярну поведінку невідомих функцій у особливих точках.

1. *Кривой А.Ф., Радиолло М.В.* Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР, МТТ. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
2. *Krivoy A.F., Popov G.Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Applied Mechanics. – 2008. – **44**, No. 6. – P. 626–634.
3. *Krivoy A.F., Popov G.Ya*., Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics – 2008. – **72**, No. 4. – P. 499–507.
4. *Kryvyy O.F.* Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space // Journal of Mathematical Sciences – 2014. – **198**, No. 1. – P. 62–74.
5. *Kryvyi O.F* Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // Journal of Mathematical Sciences – 2015. – **208**, No. 4. – P. 409–416.

INTERPHASE CRACK WITH CONTACT ZONES IN A NON-HOMOGENOUS ANISOTROPIC PLANE

The problem of an interfacial crack with contact zones in an inhomogeneous plane consisting of two different anisotropic half-planes has been considered. In the contact zones, the conditions of slippage of the crack banks are assumed to be realized. The problem is reduced to systems of singular integral equations with respect to the unknown sum of the normal stress and the unknown differences of the derivatives of the tangential and normal displacement. The singularities of stress and displacement fields are established. A method for solving systems SIE that takes into account these singularities has been proposed.

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ МІЖФАЗНОГО ВІДШАРОВАНОГО НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Володимир Острик

Інститут прикладної фізики НАН України

v.i.ostryk@gmail.com

Міжфазні тонкі жорсткі відшаровані включення у кусково-однорідному середовищі вивчалися в роботах [2–5] в рамках осциляційної моделі. Осциляція напружень та переміщень в околах кінців включень свідчить про фізичну суперечливість отриманих у цих роботах розв'язків, оскільки поблизу кінців включень спостерігається взаємне проникнення різнорідних матеріалів. Щоб запобігти таким протиріччям, аналогічно до моделі Комніноу для міжфазної тріщини [6], поблизу кінця включення вводимо область контакту між відшарованою межею пружного тіла та включенням. Контактну задачу для відшарованого включення в однорідному середовищі розглянуто в роботі [1].

Розглянемо дві пружні півплощини: верхню $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$ і нижню $0 \le r < \infty$, $-\pi \le \vartheta \le 0$ з модулями зсуву G_1, G_2 та коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно, жорстко з'єднаних між собою вздовж частини $\vartheta = 0$ своєї спільної межі. На іншій частині $\vartheta = \pm\pi$ межі розміщене тонке жорстке включення, нижня сторона $\vartheta = -\pi$ якого з'єднана з нижньою півплощиною, а верхня $\vartheta = \pi$ – відшарована від верхньої півплощини. Тобто між включенням і верхньою півплощиною утворилася напівнескінченна тріщина $\vartheta = \pm\pi$. До верхнього берега $\vartheta = \pi$ тріщини на відстані $r = a$ від її вершини прикладено зосереджені нормальну P і дотичну Q сили (рис. 1). Вважаємо, що поблизу вершини тріщини її береги контактують в області $0 < r \le r_0$ невідомого розміру r_0, де нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона.

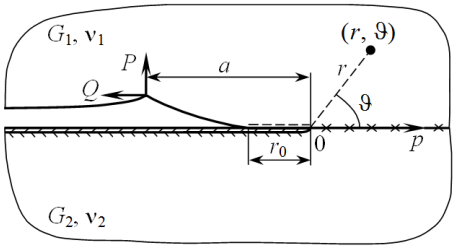


Рис. 1

Із застосуванням методу Вінера–Гопфа розв'язок інтегрального рівняння задачі знайдено в замкненій формі. Отримано трансцендентне рівняння для знаходження розміру r_0 області контакту берегів тріщини. Знайдено розподіли напружень в області контакту ($0 < r \le r_0$, $\vartheta = \pi$), на межі поділу пів-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_25.pdf

площин поза тріщиною ($0 < r < \infty$, $\vartheta = 0$) та в місці з'єднання включення з півплощиною ($0 < r < \infty$, $\vartheta = -\pi$), асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі кінця включення ($r \to 0$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$).

У таблиці 1 для коефіцієнта тертя $\mu_0 = 0$ (верхні значення) та $\mu_0 = 0.5$ (нижні значення) і різного відношення сил Q/P наведено відносний розмір r_0/a області контакту і безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень $\bar{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}\, a^{1-\rho} \Big/ \sqrt{P^2+Q^2}$, $\bar{K}_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}} a^{1-\rho} \Big/ \sqrt{P^2+Q^2}$, де ρ – показник головної особливості напружень. Видно, що інтенсивність зсувних напружень, перевищує інтенсивність розтягувальних напружень більше, ніж у 3 рази.

Таблиця 1

Q/P	0	1	2	5	10	20
$\frac{r_0}{a}$	$1.01\cdot10^{-10}$ $1.15\cdot10^{-10}$	$3.19\cdot10^{-5}$ $3.61\cdot10^{-5}$	$5.24\cdot10^{-3}$ $5.91\cdot10^{-3}$	0.245 0.268	0.668 0.702	0.900 0.920
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	0.1035 0.2812	0.0982 0.1765	0.0962 0.1460	0.0948 0.1254	0.0945 0.1191	0.0944 0.1161
$-\bar{K}_{\mathrm{II}}$	0.4001 0.8914	0.3796 0.5595	0.3718 0.4629	0.3665 0.3977	0.3654 0.3775	0.3651 0.3680

1. *Антипов Ю.А.* Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, вып. 4. – С. 669–680.
2. *Васильева Ю.О., Сильвестров В.В.* Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикл. математика и механика. – 2011. – **75**, вып. 6. – С. 1017–1037.
3. *Кривий О.Ф.* Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2014. – № 2. – С. 77–84.
4. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
5. *Черепанов Г.П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131–137.
6. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780–781.

CONTACT PROBLEM FOR INTERFACIAL EXFOLIATED SEMI-INFINITE INCLUSION

The equilibrium of two rigidly connected elastic half-planes made of different materials, at the interface of which a semi-infinite thin rigid inclusion is placed, is considered. One side of the inclusion is connected to one of the half-planes, and the other is exfoliated with the formation of a crack. Normal and tangential concentrated forces are applied to one of the edges of the crack. The frictional contact of the crack faces near its tip is taken into account. Using the Wiener–Hopf method, the solution of the integral equation of the problem is obtained in a closed form. The size of the contact zone of the crack faces, stress distributions in the contact zone, as well as at the interface of the half-planes outside the crack and at the junction of the inclusion with the half-plane are found.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РУЙНУВАННЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО БІМАТЕРІАЛУ ПРИ НАЯВНОСТІ ІНТЕРФЕЙСНОЇ ТРІЩИНИ З ВИКОРИСТАННЯМ МСЕ

Віктор Адлуцький, Максим Левченко, Володимир Лобода

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

adluckiivy_kkt@dnu.dp.ua, levchencko.maks2010@gmail.com, lobvv@ua.fm

Розглядається плоска деформація біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, зчеплених по інтерфейсу $x_3 = 0$ і заповнених п'єзоматеріалами 1 та 2 відповідно, поляризованими вздовж осі x_3. На відрізку AB $x_1 \in (-l, l)$ інтерфейсу розташована міжфазна тріщина (рис. 1). На нескінченності задані рівномірні розтягувальні механічні навантаження та електричне поле, паралельне тріщині. На берегах тріщини розглядаються наступні типи електричних граничних умов: проникність, ізольованість, електродованість. Припускається можливість контактної взаємодії берегів тріщини без тертя внаслідок деформування біматеріалу. Механічні навантаження додатково задовольняють умову неперервності деформацій на інтерфейсі. Досліджуються такі параметри руйнування, як розкриття тріщини та швидкість вивільнення енергії.

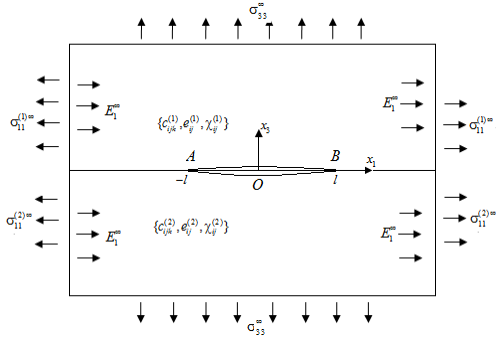


Рис. 1

Моделювання п'єзоелектричного біматеріалу з міжфазною тріщиною здійснюється за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Нескінченна область апроксимується скінченною областю $|x_1| \le b,\ |x_3| \le b,$ де $b = 20l$, що,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_26.pdf

як показали числові експерименти, забезпечує достатню збіжність з наявними аналітичними результатами. Електричне поле виражається через різницю потенціалів на протилежних сторонах скінченної області. Для дискретизації використовуються чотирикутні 8-вузлові елементи з поліноміальною апроксимацією другого порядку. Неоднорідні сітки скінченних елементів згущуються біля тріщини й розріджуються в міру наближення до зовнішньої границі біматеріалу. Для моделювання сингулярностей розв’язків в околах вершин тріщини будуються концентричні сітки сингулярних елементів. Визначення значень інтенсивностей вивільнення енергії у вершинах тріщини реалізується за допомогою інтегрального методу віртуального закриття тріщини.

З’ясовано, що у випадках електропроникної або електроізольованої тріщин під впливом електричного поля має місце безконтактне деформування з відсутністю асиметрії, характерної для електродованої тріщини.

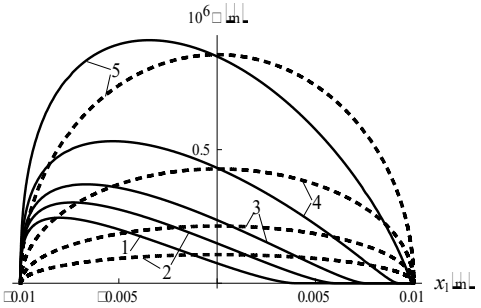


Рис. 2

На рис. 2 наведені графіки розкриття Δ електродованої тріщини (l=0,01m) в біматеріалі PZT-4/PZT-5H при $E_1^{\infty} = -2\times10^6$ V/m (суцільні лінії) та $E_1^{\infty} = 0$ (пунктирні лінії) для різних рівнів механічного навантаження: 1 – σ_{33}^{∞} =0 MPa; 2 – σ_{33}^{∞} =0,25 MPa; 3 – σ_{33}^{∞} =0,5 MPa; 4 – σ_{33}^{∞} =1,0 MPa; 5 – σ_{33}^{∞} =2,0 MPa.

DETERMINATION OF PIEZOELECTRIC BIMATERIAL FRACTURE PARAMETERS IN THE PRESENCE OF INTERFACIAL CRACK WITH USE OF FEM

The stress-strain state of an interfacial crack in piezoelectric bimaterial polarized in the direction perpendicular to the crack faces and loaded by remote electrical field parallel to the crack faces and tension parallel to the polarization axis are investigated by finite element method. Several variants of electrostatic boundary conditions are considered at the crack faces. Existence of mechanical contact zones between the faces of the crack is allowed. The problem is considered on the base of plane strain formulation. Determination of the energy release rate is realized using the virtual crack closure integral method. It is shown that the type of boundary conditions has a significant influence on the fracture parameters.

УДК 539.3

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА З АНІЗОТРОПНИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

**Михайло Саврук, Володимир Кравець,
Любов Онишко, Олексій Кваснюк**

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

vlad@ipm.lviv.ua, onyszko@ukr.net

Методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) розв'язано антиплоску задачу теорії пружності для ортотропного тіла (матриці) з криволінійними анізотропними включеннями. Побудовані СІР другого роду розв'язано число-во методом механічних квадратур. Досліджено впливи пружних характеристик анізотропних матеріалів та форм криволінійних включень на розподіли контактних та контурних напружень зсуву.

Розглянуто ортотропну матрицю S, віднесену до декартової системи координат xOy з осями вздовж осей ортотропії матеріалу. Матриця містить анізотропні включення $S^{(j)}$, обмежені криволінійними замкненими контурами $L^{(j)}$. Матеріали матриці та включень за поздовжнього зсуву характеризуються певними параметрами [2, 3]: $a_0 = \sqrt{a_{44}a_{55}}$, $a_{45} = 0$, $a_0^{(j)} = \sqrt{a_{44}^{(j)}a_{55}^{(j)} - a_{45}^{(j)}a_{45}^{(j)}}$, $\gamma_3 = \sqrt{a_{44}/a_{55}} = \sqrt{G_{xz}/G_{yz}}$, $\mu_3 = i\gamma_3$; $\mu_3^{(j)} = \widetilde{\gamma}_3^{(j)} + i\gamma_3^{(j)}$, $\widetilde{\gamma}_3^{(j)} = a_{45}^{(j)}/a_{55}^{(j)}$, $\gamma_3^{(j)} = a_0^{(j)}/a_{55}^{(j)}$). На нескінченності задано навантаження $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$, $\tau_{xz}^{\infty} = 0$. За переходу через контури включень напруження неперервні

$$\tau_{nz}^{+}(t) - \tau_{nz}^{-}(t) = 0, t \in L,\ L = \bigcup L^{(j)}, \tag{1}$$

а переміщення можуть зазнавати розриву

$$w^{+}(t) - w^{-}(t) = g^{*}(t),\ t \in L. \tag{2}$$

Тут верхні знаки відповідають граничним значенням величин зліва (+) та справа (-) за вибраного напряму обходу контурів проти годинникової стрілки.

Комплексні потенціали напружень шукатимемо у вигляді [3]

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 + \int_{L_3} \frac{\phi_3'(t_3)}{t_3 - z_3} dt_3,\ z \in S;\quad \Phi_3^{(j)}(z_3^{(j)}) = \Gamma_3^{(j)} + \int_{L_3^{(j)}} \frac{\phi_3'^{(j)}(t_3^{(j)})}{t_3^{(j)} - z_3^{(j)}} dt_3^{(j)},\ z \in S^{(j)}, \tag{3}$$

де $\Phi_3(z_3) = \varphi'_3(z_3)$, $\Phi_3^{(j)}(z_3^{(j)}) = \varphi'^{(j)}_3(z_3^{(j)})$, а аналітичні функції $\varphi_3, \varphi_3^{(j)}$ комплексних аргументів $z_3 = x + \mu_3 y$, $z_3^{(j)} = x + \mu_3^{(j)} y$ визначають переміщення $w(x,y) = a_0 \operatorname{Im}[\varphi_3(z_3)]$ та компоненти напружень $\tau_{xz}(x,y) = -\operatorname{Re}[\mu_3 \Phi_3(z_3)]$,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_27.pdf

$\tau_{yz}(x,y)=\mathrm{Re}[\Phi_3(z_3)]$. Контури $L_3, L_3^{(j)}$ у комплексних математичних площинах $z_3, z_3^{(j)}$ відповідають контурам $L, L^{(j)}$ у площині $z=x+iy$. Для заданого навантаження $\Gamma_3=\tau$, а комплексну сталу $\Gamma_3^{(j)}$ в області $S^{(j)}$ потрібно вибрати таким чином, щоб за переходу через контур L забезпечувалась неперервність напружень [1].

Для задоволення крайових умов (1) та

$$dw^+(t)/ds - dw^-(t)/ds = g'^*(t)dt/ds,\ s=s(t),\ t\in L \tag{4}$$

граничні значення потенціалів (3) знайдено за використання формул Сохоцького-Племеля для інтегралів Коші. Задачу зведено до розв'язування систем СІР другого роду

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}[\phi_3'(s)]+\frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{Re}\left\{K_1(s',s)\phi_3'(s')+M_1(s',s)\overline{\phi_3'(s')}\right\}ds'=0,\ s=s(t),\ t\in L;\\ &\mathrm{Re}[\phi_3'(s)]+\frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{Im}\left\{K_2(s',s)\phi_3'(s')+M_2(s',s)\overline{\phi_3'(s')}\right\}ds'=\mathrm{Im}[f_2(s)],\end{aligned} \tag{5}$$

де $f_2(s)=\{a_0\Gamma_3 dt_3/ds - a_0^{(j)}\Gamma_3^{(j)}dt_3^{(j)}/ds\}/(a_0+a_0^{(j)})$, ядра K_1, M_1, K_2, M_2 – функції геометричних та фізичних параметрів задачі у комплексних площинах $z_3, z_3^{(j)}$ і містять відповідні інтеграли Коші у цих математичних площинах, $s=s(t)$ – дугова абсциса точки $t\in L$.

Для одного анізотропного включення (j=1) у матриці побудовану систему СІР (5) розв'язували чисельно методом квадратур [3]. Визначено розподіли контактних напружень $\tau_{nz}^+(t)=\tau_{nz}^-(t)$ на контурі включення, зсувних напружень зі сторони матриці $\tau_{sz}^-(t)$ та включення $\tau_{sz}^+(t)$ для різних параметрів задачі. Отримані результати для контурних напружень $\tau_{sz}^{\pm}(t)$ дозволяють підбирати параметри компонентів композиту для мінімізації коефіцієнтів концентрації напружень на контурах з'єднання включень та матриці.

1. *Долгих В.Н., Фильштинский Л.А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами // Изв. АН СССР, МТТ. – 1980. – № 4. – С. 103–110.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – С. 416.
3. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.

LONGITUDINAL SHEAR OF ORTHOTROPIC BODY WITH ANISOTROPIC CURVILINEAR INCLUSIONS

The antiplane problem of the theory of elasticity for an orthotropic body with curvilinear anisotropic inclusions was solved using the method of singular integral equations. The obtained singular integral equations of the second kind were solved numerically by the quadrature method. The effects of elastic characteristics of anisotropic materials and forms of curvilinear inclusions on contact and contour stress distributions were studied.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КВАЗІОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРУЖНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Володимир Кравець, Андрій Чорненький

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

vlad@ipm.lviv.ua, a.b.chornenkyi@gmail.com

Розглянуто плоску задачу теорії пружності для квазіортотропного тіла з криволінійним квазіортотропним включенням. Побудоване сингулярне інтегральне рівняння (СІР) другого роду методом механічних квадратур зведено до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь. Визначено розподіли контактних і контурних напружень на контурах включень різних форм.

Нехай у квазіортотропній [1, 2] площині S, віднесеній до базисної декартової системи координат xOy з осями вздовж осей ортотропії матеріалу площини міститься криволінійне квазіортотропне включення $S^{(1)}$, обмежене гладким замкненим контуром L і віднесене до локальної декартової системи координат $x^{(1)}O_1y^{(1)}$, вісь $O_1x^{(1)}$ якої утворює кут $\alpha^{(1)}$ з віссю Ox. Площина S на нескінченності завантажена напруженнями $\sigma_y^\infty = p$, $\sigma_x^\infty = q$, $\tau_{xz}^\infty = \tau$. Пружні сталі площини (матриці) позначимо $E_1, E_2, G, \kappa, \gamma = \sqrt[4]{E_1 / E_2}$, а включення – $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, G^{(1)}, \kappa^{(1)}, \gamma^{(1)} = \sqrt[4]{E_1^{(1)} / E_2^{(1)}}$. Вважатимемо, що граничні значення напружень на контурі L однакові як у включенні, так і в матриці:

$$[N(t) + iT(t)]^+ = [N(t) + iT(t)]^-, \; t \in L, \tag{1}$$

а переміщення можуть зазнавати розриву

$$2Gd\big/dt[(u+iv)^+ - (u+iv)^-] = g'(t), \; t \in L. \tag{2}$$

Комплексні потенціали напружень шукатимемо у вигляді

$$\Phi_1(z_1) = \Gamma - \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} \frac{\phi_1(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \quad \Psi_1(z_1) = \Gamma' - \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} \frac{\psi_1(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \quad z \in S;$$
$$\Phi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) = \Gamma_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{L_1^{(1)}} \frac{\phi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)})}{\tau_1^{(1)} - z_1^{(1)}} d\tau_1^{(1)}, \Psi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) = \Gamma'_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{L_1^{(1)}} \frac{\psi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)})}{\tau_1^{(1)} - z_1^{(1)}} \tau_1^{(1)}, z \in S^{(1)}, \tag{3}$$

де комплексні сталі

$$2\Gamma = (p + q\gamma^{-2})/2, \;\; \Gamma' = (p - q\gamma^{-2})/2 + i\tau/\gamma;$$
$$2\Gamma_1 = (p + q/(\gamma^{(1)})^2)/2, \Gamma_1' = (p - q/(\gamma^{(1)})^2)/2 + i\tau/\gamma^{(1)},$$

що визначають однорідні напружені стани в областях S і $S^{(1)}$ вибрано таким чином, щоб на контурі L забезпечувалася неперервність відповідних напру-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_28.pdf

жень. Тут прийнято за додатний обхід контуру L – напрям проти годинникової стрілки, коли область включення $S^{(1)}$ розташована ліворуч. Контури L_1 і $L_1^{(1)}$ у комплексних площинах $z_1 = x + i\gamma y$ і $z_1^{(1)} = x^{(1)} + i\gamma^{(1)} y^{(1)}$ відповідають контуру L у площині $z = x + iy$.

На основі заданої умови ідеального силового контакту матриці з включенням (1) знайдено зв'язок між невідомими функціями – густинами потенціалів (3) $\phi_1(\tau_1), \psi_1(\tau_1), \phi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)}), \psi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)})$. Визначивши граничні значення потенціалів (3) за використання формул Сохоцького-Племеля для інтегралів типу Коші, граничні вектора напруження N+iT можна записати у вигляді [2]

$$N^- + iT^- = [(1+\gamma)P_1(t_1)dt_1 / dt + (1-\gamma)\overline{P_1(t_1)d\bar{t}_1 / dt}]/2,$$

$$N^+ + iT^+ = [(1+\gamma^{(1)})P_1^{(1)}(t_1^{(1)})dt_1^{(1)} / dt^{(1)} + (1-\gamma^{(1)})\overline{P_1^{(1)}(t_1^{(1)})d\bar{t}_1^{(1)} / dt^{(1)}}]/2,$$

де $P_1(t_1) = \Phi_1(t_1) + \overline{\Phi_1(t_1)} + \left(t_1\overline{\Phi'_1(t_1)} + \overline{\Psi_1(t_1)}\right)d\bar{t}_1 / dt_1$ і аналогічно для $P_1^{(1)}(t_1^{(1)})$ – через потенціали для включення. Тут відсутні позаінтегральні доданки внаслідок неперервності напружень N+iT за переходу через контур L (1).

Задовольнивши граничну умову (2), отримано комплексне СІР 2-го роду

$$C\phi_1(\tau_1) + D\overline{\phi_1(\tau_1)} + \frac{1}{\pi}\int_L [M(\tau_1, t_1)\phi_1(\tau_1) + N(\tau_1, t_1)\overline{\phi_1(\tau_1)}]d\tau = G^{(1)}g'(t)/G,\ t \in L, \quad (4)$$

де сталі C, D визначаються пружними характеристиками матеріалів матриці та включення, ядра $M(\tau_1, t_1), N(\tau_1, t_1)$ – механічними та геометричними параметрами задачі, поданими у різних площинах $z, z_1, z_1^{(1)}$. Для кусково-ізотропної площини ($\gamma = \gamma^{(1)} = 1$) з рівняння (4) отримуємо відоме СІР [3].

На основі числового розв'язування СІР (4) визначено розподіли контурних $\sigma_s^+(t), \sigma_s^-(t)$ та контактних напружень N+iT на контурах квазіортотропних включень різних форм та рівнів ортотропії матриці та включень.

1. *Hasebe N. and Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.
2. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.
3. *Savruk M.P., Kuznyak N.V.* Solving two-dimensional cases for cracks in piecewise-homogeneous bodies // Mater. Sci. – 1989. – **25**, No. 4. – P. 407–415.

THE STRESS STATE OF A QUASI-ORTHOTROPIC PLANE WITH AN ELASTIC CURVILINEAR INCLUSION

The plane problem of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with a curvilinear quasi-orthotropic inclusion is considered. The obtained singular integral equation of the second kind is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations by the method of mechanical quadrature. The distribution of contact and contour stresses on the contours of inclusions of various shapes was determined.

УДК 519.6:539.3

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ КУЛОНІВСЬКОГО ТЕРТЯ

Ігор Прокопишин, Іван Прокопишин, Іван Дияк

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Національний університет «Львівська політехніка»

ihor84@gmail.com, ivan.prokopyshyn@lnu.edu.ua, ivan.dyyak@lnu.edu.ua

Розглянуто задачу про контакт з кулонівським тертям декількох осесиметричних пружних тіл скінченних розмірів. Використовуючи метод штрафу, отримано слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння в гільбертовому просторі та встановлено умови існування і єдиності його розв'язку. На основі застосування результатів праць [1–4] розроблено ітераційні методи декомпозиції області (МДО) типу Робіна, які зводять розв'язування цього варіаційного рівняння до паралельного розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах, що відповідають осесиметричним крайовим задачам теорії пружності з умовами Робіна на ділянках можливого контакту. Доведено теорему про умови збіжності алгоритмів МДО. Здійснено програмну реалізацію отриманих МДО з використанням скінченноелементних апроксимацій. За допомогою запропонованих методів досліджено фрикційну контактну взаємодію конічних ущільнюючих елементів пневмо-гідро арматури. Проаналізовано вплив зовнішнього навантаження та коефіцієнта тертя на розподіли контактних напружень.

1. *Прокопишин І.І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
2. *Прокопишин І.І., Дияк І.І., Мартиняк Р.М.* Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 1. – С. 46–55.
3. *Dyyak I.I., Prokopyshyn I.I., Prokopyshyn I.A.* Convergence of penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity // http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf. – 2015. – 33 p.
4. *Prokopyshyn I.I., Dyyak I.I., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – **91**. – P. 647–654.

NUMERICAL ANALYSIS OF CONTACT BETWEEN AXISYMMETRIC ELASTIC BODIES WITH COULOMB FRICTION

Using the penalty method, we obtain a weak formulation of contact problem with Coulomb friction for several axisymmetric elastic bodies in the form of nonlinear variational equation in Hilbert space and establish the conditions of its unique solution. To solve this variational equation, we propose parallel iterative Robin-type domain decomposition methods (DDMs) and prove the theorem on their convergence. We develop the software that implements these methods with the use of the finite element approximations. The proposed DDMs are used for numerical investigation of frictional contact interaction between conical sealing elements of pneumo-hydro valves.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_13.pdf

УДК 539.3

МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦІЙНОГО ДЕМПФУВАННЯ У ФРИКЦІЙНОМУ МОДУЛІ ОБОЛОНКОВОГО АМОРТИЗАТОРА

Іван Шацький, Андрій Величкович

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ipshatsky@gmail.com, a_velychkovych@ukr.net

Розглянуто нову конструкцію оболонкового амортизатора зі сухим тертям, яка містить дві пружинні секції та фрикційний модуль із розімкнутою оболонкою і пружним заповнювачем. Пружинні секції і фрикційний модуль працюють паралельно. При немонотонному навантаженні такого амортизатора внаслідок контактної взаємодії заповнювача з розімкнутою оболонкою спостерігається явище конструкційного гістерезису.

Для опису деформування фрикційного амортизатора розроблено механіко-математичну модель циліндричної оболонки з розрізом уздовж твірної. Розвинуто методику квазістатичного аналізу конструкційного демпфування в малорухомих неконсервативних оболонкових системах з пружним заповнювачем [1].

На кожному етапі циклічного навантаження досліджено розподіл напружень та зв'язок між зовнішнім навантаженням та переміщенням поршнів амортизатора. Аналітично описано діаграму деформування оболонкового амортизатора з урахуванням паралельного з'єднання фрикційного модуля з пружинами. Встановлено нерівності для допустимого навантаження, які гарантують безпечну експлуатацію конструкції.

Отримані результати дають змогу здійснювати інженерний розрахунок фрикційного амортизатора, орієнтований на практичні потреби та ефективну експлуатацію.

1. *Shatskyi I., Velychkovych A.* Analytical Model of Structural Damping in Friction Module of Shell Shock Absorber Connected to Spring // Shock and Vibration. – 2023. – 2023. – Article ID 4140583. – 17 p.

MODEL OF STRUCTURAL DAMPING IN A FRICTION MODULE OF SHELL SHOCK ABSORBER

A new dry-friction shell shock-absorber design is introduced. At each stage of the cyclic loading, the distribution of stresses and relationships between the external loading and the piston displacement were studied. Inequalities for permissible loads are obtained.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_15.pdf

ДИНАМІКА НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧНІ МОДЕЛІ ТОНКИХ ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ У МАГНІТОЕЛЕКТРОКЕРАМІЧНІЙ МАТРИЦІ

Роман Рабош, Ярослав Кунець, Віктор Міщенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

romanrabosh@gmail.com, kunets@iapmm.lviv.ua, adm@iapmm.lviv.ua

Вдосконалення роботи адаптивних систем потребує конструювання новітніх композитних матеріалів з магнітоелектропружними властивостями. Тому останнім часом значна увага дослідників зосереджена на визначенні динамічного чи статичного напружено-деформованого стану таких композитів.

У даній роботі розглянуто поширення SH-хвиль у композиті, який складається з магнітоелектропружної матриці та металічного включення. Товщина включення вважається малою (у порівнянні з довжиною) і характеризується малим параметром ε. Композит знаходиться за умов антиплоского динамічного навантаження та плоского електричного поля. Матеріал матриці характеризуються трансверсально-ізотропною поведінкою і поляризований вздовж осі x_3 прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$. На лінії контакту складових композиту виконується умова ідеального механічного контакту, а потенціали електричного та магнітного полів рівні нулю.

З використанням методів асимптотичних збурень [1] функції фізико-механічних полів подано у вигляді розкладів за малим параметром ε і отримано математичні моделі неоднорідності для різних випадків її жорсткостей.

1. *Rabosh R.V.* Dynamic interaction between elastic medium and thin curvelinear piezoelectric inclusion under longitudial vibration of composite // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – **168**, № 5. – P. 625–632.

ASYMPTOTIC MODELS OF THIN ELASTIC INHOMOGENIITIES IN A MAGNETO-ELECTROCERAMIC MATRIX

Assymptotic models of a thin metallic inclusion in a magneto-electro-elastic medium under dynamic shear loading and perfect mechanical contact are obtained. Using the methods of asymptotic perturbations the antiplane dynamic problem for the elastic layer is reduced to the boundary value problem. Inhomogeneities with various kinds of mechanical properties are considered.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_09.pdf

УДК 539.3

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ТА ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПОРИСТИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ СЕНДВИЧ ПЛАСТИН

Лідія Курпа, Тетяна Шматко, Ганна Лінник

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

kurpalidia@gmail.com, ktv_ua@yahoo.com, linnik2105@gmail.com

Функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) широко використовуються в різних галузях промисловості: ракетно-космічній, медичній, будівельній та ін. При виготовленні цих матеріалів можливо виникнення пор, які змінюють механічні властивості суміші матеріалів. Тому в останній час вчені приділяють багато уваги питанням динамічної та статичної поведінки пористих сендвич пластин та оболонок. З огляду літератури, можна зробити висновок, що головні зусилля вчених спрямовані на розробку нових теорій, які проілюстровано тільки для пластин та пологих оболонок із прямокутною формою плану.

Ця робота присвячена вивченню стійкості та коливань пористих ФГ сендвич пластин зі складною геометричною формою. Диференціальні рівняння руху одержано за допомогою звичайної зсувної деформаційної теорії першого порядку із заданим коефіцієнтом зсуву. Досліджено дві моделі розподілення пористості згідно степеневого (P-law) та сигмовидного (S-law) законів. Одержані аналітичні вирази для обчислення ефективних механічних характеристик ФГ матеріалу. Для визначення критичного навантаження та частот пластин використано метод Релея–Рітца у сполученні з теорією R-функцій [1]. Розроблені алгоритми та програмне забезпечення перевірено на тестових прикладах, та порівняно з відомими результатами, одержаними за допомогою інших методів. Вирішено ряд задач стійкості та коливань ФГ пористих сендвич пластин зі складною геометричною формою.

1. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.

ANALYSIS OF BUCKLING AND FREE VIBRATIONS OF POROUS FUNCTIONALLY GRADIENT SANDWICH PLATES

Stability and vibrations of porous FG sandwich plates with a complex geometric shape is studied. The first-order shear deformation theory is used. Two models of porosity distribution are considered: power (P-law) and sigmoid (S-law). The Rayleigh–Ritz method joined with the R-functions theory is applied to determine the critical load and natural frequencies. The numerical results are presented for complex form plates.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_07.pdf

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО СФЕРИЧНО-ШАРУВАТОГО КОНУСА

Костянтин Мисов

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова

kmysov2309@gmail.com

Розв'язано осесиметричну динамічна задача кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного сферично-шаруватого конуса у випадку усталених крутильних коливань, коли всі характеристики представлено у вигляді $\widehat{f}\left(r,\theta,\varphi,t\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f\left(r,\theta,\varphi\right)$. У всіх наступних формулах $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ опущено. Момент кручення прикладено до конуса через абсолютно жорстку накладку, що зчеплена з нижньою сферичною поверхнею. Беручи до уваги геометрію конуса та поверхонь зрізу, а також характер навантаження, задачу сформульовано у сферичній системі координат $\left(r,\theta,\varphi\right)$.

Для розв'язання задачі необхідно знайти невідоме переміщення j-го шару $w^{(j)}\left(r,\theta\right)=u_{\varphi}^{(j)}\left(r,\theta\right),\ j=\overline{1,n}$, яке задовольняє рівняння кручення

$$\left(r^2\left(w^{(j)}\left(r,\theta\right)\right)'\right)'+\frac{\left(\sin\theta\left(w^{(j)}\left(r,\theta\right)\right)^{\bullet}\right)^{\bullet}}{\sin\theta}-\frac{w^{(j)}\left(r,\theta\right)}{\sin^2\theta}=-\left(rq^{(j)}\right)^2w^{(j)}\left(r,\theta\right),$$

$$a_{j-1}\le r\le a_j,0\le\theta\le\psi$$

граничні умови

$$w^{(1)}\left(r,\theta\right)\Big|_{r=a_0}=\alpha lF\left(\theta\right),0\le\theta\le\psi,$$

$$w^{(n)}\left(r,\theta\right)\Big|_{r=a_n}=0,0\le\theta\le\psi,$$

$$G^{(j)}r^{-1}\left(\left(w^{(j)}\left(r,\theta\right)\right)^{\bullet}-w^{(j)}\left(r,\theta\right)\cot\theta\right)\Big|_{\theta=\psi}=0,a_{j-1}\le r\le a_j,$$

та умови ідеального контакту на стиках шарів, де $f^{\bullet}=\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}$, $f'=\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}$, $q^{(j)}=\dfrac{\omega}{c^{(j)}}$, $c^{(j)}=\sqrt{G^{(j)}/\rho^{(j)}}$, $\rho^{(j)}$ – густина, $G^{(j)}$ – модуль

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_01.pdf

зсуву, $j=\overline{1,n}$, $l=a_n-a_0$, $F(\theta)$ – задана неперервна функція та α – невідомий кут отвору який знаходиться з рівняння руху накладки

$$2\pi a_0^3\int_0^{\psi}\sin^2\theta\tau^{(1)}(a_0,\theta)d\theta+M+\omega^2\alpha J=0,$$

де M – момент кручення накладки та J – відомий момент інерції накладки.

Після застосування інтегрального перетворення Г.Я. Попова [1]

$$w_k^{(j)}(r)=\int_0^{\psi}\sin\theta w^{(j)}(r,\theta)P_{\nu_k}^1(\cos\theta)d\theta,$$

$$w^{(j)}(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_k^{(j)}(r)P_{\nu_k}^1(\cos\theta)}{\left\|P_{\nu_k}^1(\cos\theta)\right\|^2},$$

задача зводиться до одновимірної крайової задачі, для якої побудовано точний розв'язок

$$w_k^{(j)}(r)={}_1\Phi_k^{(j)}(r)\,{}_1C_k^{(j)}+{}_2\Phi_k^{(j)}(r)\,{}_2C_k^{(j)},a_{j-1}\le r\le a_j,j=\overline{1,n},$$

де $\left\{{}_1\Phi_k^{(j)}(r),{}_2\Phi_k^{(j)}(r)\right\},a_{j-1}\le r\le a_j,j=\overline{1,n}$ – фундаментальні розв'язки рівняння кручення. Після використання граничних умов на стиках шарів отримано систему з якої знайдено невідомі сталі ${}_1C_k^{(j)},{}_2C_k^{(j)},j=\overline{1,n}$.

$$\begin{cases}{}_1C_k^{(j)}=\alpha l^{(1)}F_k\,{}_1A_k^{(j)}\left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_1A_k^{(1)}+{}_2\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_2A_k^{(1)}\right)^{-1}\\ {}_2C_k^{(j)}=\alpha l^{(1)}F_k\,{}_2A_k^{(j)}\left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_1A_k^{(1)}+{}_2\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_2A_k^{(1)}\right)^{-1}\end{cases},j=\overline{1,n}.$$

Тут $\left\{{}_1A_k^{(j)},{}_2A_k^{(j)}\right\},j=\overline{1,n}$ розраховано за ітеративною процедурою.

Було проведено числовий аналіз хвильового поля для досліджуваного об'єкту та порівняно напруження на боковій поверхні для різної кількості шарів та при їх різних механічних характеристиках.

1. *Popov G.Ya.* New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics // International Applied Mechanics. – 2003. – **39**, № 12. – С. 1400–1424.

DYNAMIC TORSION PROBLEM FOR A TWICE-TRUNCATED ELASTIC SPHERICALLY LAYERED CONE

The dynamic rotation problem for a twice-truncated elastic spherically-layered cone in the case of steady-state oscillations is solved with the help of the Popov integral transform. The solution was derived in the iterative form which allows us to use it for an arbitrary number of layers. The stress field was analyzed numerically.

УДК 539.3

АНАЛІЗ ЕФЕКТІВ НЕЛІНІЙНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОВЕРХНЕВИХ SH ХВИЛЬ ПРИ МЕМБРАННОМУ ПОКРИТТІ ПОВЕРХНІ ХВИЛЕВОДУ

Надія Жоголева

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

zhogoleva.nadia@gmail.com

У роботі використано модель фізично та геометрично нелінійної динамічної деформації, яка базується на поданнях пружного потенціалу як

$$U=\frac{1}{2}c_{jqrl}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rl}+\frac{1}{6}c_{jqrlmn}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rl}\varepsilon_{nm}\ \ (j,q,r,l,n,m=\overline{1,3}),$$

та пружних деформацій у вигляді

$$\varepsilon_{rl}=\frac{1}{2}(u_{r,l}+u_{l,r}+u_{q,r}u_{q,l})\ .$$

Тут $u_{r.l}=\partial u_r/\partial x_l$ – компоненти пружних хвильових зсувів, а c_{jqrl}, c_{jqrlmn} – пружні константи матеріалу. Безрозмірні нормалізовані компоненти тензору напружень та рівняння руху за відсутності об'ємних сил отримуються зі співвідношення

$$\sigma_{j,d}=\frac{\partial U}{\partial u_{j,d}}\ \ (j,d=\overline{1,3}),\qquad \rho\ddot{u}_j=\frac{\partial\sigma_{jd}}{\partial x_d}.$$

Досліджуваний хвилевод складається з анізотропного монокристалічного шару товщини h класу m3m кубічної системи $V_1=\{-\infty<x_1,x_2<\infty,\ -h\le x_3\le 0\}$, розташованому на півпросторі $V_2=\{-\infty<x_1,x_2<\infty,0<x_3<\infty\}$ того ж класу анізотропії. Використано систему нормалізованих прямокутних координат $Ox_1x_2x_3$, $x_j=\tilde{x}_j/h$. Товщина шару h вважається нормалізуючим параметром для координатних змінних $\tilde{x}_j$. На верхній грані шар має мембранне покриття, а в зоні контакту з півпростором – ідеальний механічний контакт. Розглядається одночасне поширення двох SH хвиль різної частоти. Фізико-механічні властивості матеріалів характеризуються пружними константами другого $\tilde{c}_{ij}^{(p)}$ та третього $\tilde{c}_{ijl}^{(p)}$ порядку та густиною $\tilde{\rho}_p$ $(i,j,l=\overline{1,6}$;

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_02.pdf

$p=\overline{1,2}$. Компоненти вектор-функції пружних зсувів $\tilde{u}^{(p)}$ віднесено до нормуючого параметру $u_* = \max\limits_{\{x_1,x_2,x_3,t,j\}} |\tilde{u}_j(x_1,x_2,x_3,t)|$.

Використано підхід, що базується на концепції визначення характеристик досліджуваного хвильового поля, як перших двох доданків у поданнях векторних функцій u_j в компоненті V_p відрізка ряду за степенями малого параметра $\delta = u_* / h$:

$$u_j^{(p)} = u_j^{(p,l)} + \delta u_j^{(p,n)} \quad (j=\overline{1,3}), \tag{1}$$

При підстановці виразу (1) у рівняння руху та крайові умови, а також при подальшому підборі доданків того ж порядку малості за параметром δ виникають двоетапні задачі визначення компонент $u_j^{(p,l)}$ та $u_j^{(p,n)}$, $u_{j+}^{(p,n)}$. Отримано розв'язок задачі першого наближення, яке представлено єдиною ненульовою компонентою $u_2^{(p,l)}$. На основі отриманих представлень для $u_2^{(p,l)}$ розв'язано задачу другого наближення, яка визначає ненульові компоненти $u_{1+}^{(p,n)}$ та $u_{3+}^{(p,n)}$ в аналітичній формі, що характеризують нелінійну взаємодію різночастотних одночасно поширених SH хвиль.

Виконано числовий аналіз для сукупності матеріалів NaCl–Si для шару та півпростору.

Автор висловлює подяку за часткову підтримку цього дослідження за грантом EFDS-FL2-08 від The European Federation of Academies of Sciences and Humanities (ALLEA).

1. *Singh S.S.* Love wave at a layer medium bounded by irregular boundary surfaces // Journal of Vibration and Control. – 2011. – **17**, No. 5. – P. 789–795.
2. *Shevchenko V.P., Zhogoleva N. V.* Nonlinear second harmonics of localized shear waves in anisotropic layer between anisotropic half spaces under the condition of imperfect contact // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – **236**, No. 2. – P. 199–211.

EFFECTS ANALYSIS OF SURFACE SH WAVES NONLINEAR INTERACTION AT THE MEMBRANE COVERING OF THE WAVEGUIDE SURFACE

The work is based on the model of general geometric and physical nonlinearity of dynamic deformation processes. The approach of expansion into series by a small parameter of nonlinear elastic wave characteristics is applied. The effects of the second harmonic, which occurs during the simultaneous propagation of surface SH waves of different frequencies, are investigated. The waveguide consists of an anisotropic elastic crystal layer of the m3m class cubic system located on a crystal half-space of the same class of anisotropy. The outer surface of the waveguide is covered with an inextensible membrane.

УДК 532.59:534.29

ДІЯ РАДІАЦІЙНИХ СИЛ АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ В РІДИНІ НА КРАПЛІ ІНШОЇ РІДИНИ

Олександр Жук, Ярослав Жук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

opzhuk1939@gmail.com, y.zhuk@i.ua

З використання методу [2, 3] досліджено систему двох сферичних крапель рідини радіусів R_1 і R_2 в іншій рідині на відстані l одна від одної. Густини рідин в краплях відповідно ρ_1 і ρ_2, а швидкість звуку – a_1 і a_2 Використано декартову систему $Oxyz$ з початком в точці O, який розташовано посередині між центрами крапель. Вісь Oz проходить через центри крапель в напрямі до 2-ї краплі. Хвильове рівняння має вигляд:

$$\Delta\Phi - a_0^{-2}\partial^2\Phi/\partial t^2 = 0\,, \tag{1}$$

де Δ – оператор Лапласа, Φ – потенціал акустичної хвилі, a_0 – швидкість хвилі в зовнішній рідині. Потенціал первинної акустичної хвилі, який є розв'язком рівняння (1), подамо виразом

$$\Phi_i = A\exp[i(kz-\omega t)]\,, \tag{2}$$

де A – амплітуда, $k=\omega/a_0$ – хвильове число, ω – кутова частота.

Визначення потенціалів розсіяних на краплях хвиль, обумовлених хвилею (2), зводиться до знаходження розв'язків (1), що задовольняють умови випромінювання на нескінченності і крайові умови на поверхні кожної краплі, які вимагають неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини на поверхнях крапель і неперервності тиску при переході через поверхню крапель. Для розв'язання задачі використаємо метод [1] та локальні системи сферичних координат (r_s,θ_s,φ_s) з початками в центрах крапель $(s=1,2)$, де θ_s відраховується від осі O_sz і $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$. Потенціали первинної хвилі і розсіяних на краплях хвиль подамо у вигляді:

$$\Phi_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2Ae^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kr_s)P_n(\cos\theta_s)e^{-i\omega t}, s=1,2; \tag{3}$$

$$\Phi_d^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s)P_n(\cos\theta_s)e^{-i\omega t},\ \ s=1,2. \tag{4}$$

Потенціал хвильового поля в s-й краплі запишемо в такому вигляді:

$$\Psi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(s)} j_n(\bar{k}_s\bar{r}_s)P_n(\cos\theta_s)e^{-i\omega t},\ \ s=1,2\,. \tag{5}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_03.pdf

В формулах (3)–(5) $j_n(kr_s)$ – сферичні функції Бесселя, $h_n^{(1)}(kr_s)$ – сферичні функції Ганкеля, $P_n\left(\cos\theta_s\right)$ – ортонормовані поліноми Лежандра.

У кожній з локальних систем координат потенціал хвильового поля в зовнішній рідині визначається співвідношенням

$$\Phi^{(s)} = \Phi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^{2} \Phi_d^{(s)}, \quad s = 1,2 \ . \tag{6}$$

Для використання умов на поверхнях крапель в обчисленні $A_n^{(s)}, \overline{A}_n^{(s)}$ в (4)–(5), потенціал (6) потрібно записати в кожній з локальних систем координат. Для цього використано теорему додавання сферичних хвильових функцій [1].

При визначенні гідродинамічної сили, що діє на s-у краплю в напрямі осі Oz, і яка обчислюється за формулою

$$F_z^{(s)} = -\iint\limits_S p^{(s)} \cos\theta_s dS \ , \tag{7}$$

тиск $p^{(s)}$ в зовнішній рідині згідно з прийнятим методом [2, 3] необхідно обчислювати з точністю до величин другого порядку мализни за формулою

$$p^{(s)} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0 \left(\nabla \Phi^{(s)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t}\right)^2 .$$

Після осереднення в часі (7) одержуємо формулу для обчислення акустичної радіаційної сили, яка діє на кожну з крапель

$$\left\langle F_z^{(s)} \right\rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left\{ (K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)}) \left[n(n+2) - \alpha_s^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{dK_n^{(s)}}{d\alpha_s} \frac{dK_{n+1}^{(s)}}{d\alpha_s} + \frac{dL_n^{(s)}}{d\alpha_s} \frac{dL_{n+1}^{(s)}}{d\alpha_s} \right) \alpha_s^2 \right\}, \alpha_s = kR_s, s = 1,2 \ .$$

1. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязних телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
2. *Жук А.П.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц, обусловленное звуковой волной, распространяющейся вдоль линии центров // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 9. – С. 111–116.
3. *King L.V.* On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1934. – **147**, № 861. – P. 246–265.

ACTION OF ACOUSTIC FIELD RADIATION FORCE IN LIQUID UPON DROPS OF OTHER LIQUID

A problem on the interaction of two spherical drops of an ideal liquid in another ideal liquid is solved. The interaction between drops is caused by a plane acoustic wave propagating along the line of the drop centers. The measure of drop interaction is defined as the acoustic radiation force – the time-averaged value of the hydrodynamic force acting in the acoustic field on each of the drops.

УДК 539.3:534.1

ТИПИ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ РІДИНИ І ПОРОПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

Наталія Городецька, Тетяна Соболь, Тетяна Щербак

Інститут гідромеханіки НАН України,
Національний університет біоресурсів і природокористування України

nsgihm@gmail.com, sobol2017liza@gmail.com, mirgtanya@gmail.com

Визначено різні типи поверхневих хвиль, які виникають на межі пористо-пружного півпростору та рідини. Аналіз виконано на основі теорії Біо для різних крайових умов, зокрема, проникної та непроникної меж. Розглянуто різні співвідношення механічних характеристик контактуючих середовищ.

Показано, що на межі пористо-пружного півпростору та рідини без урахування дисипації можуть існувати три різні типи поверхневих хвиль. В залежності від крайових умов на межі та співвідношення механічних характеристик можливі ситуації, коли існують три, два або лише один тип поверхневих хвиль. Тип поверхневої хвилі визначається відношенням її швидкості до швидкостей об'ємних хвиль: трьох у пористо-пружному півпросторі та двох у пружному півпросторі, а також типом крайових умов. В класичному розумінні поверхнева хвиля, утворена неоднорідними хвилями, переносить енергію тільки вздовж межі, згасає вглиб обох середовищ і не переносить енергію вглиб жодного з них. Перший тип відповідає саме такій поверхневій хвилі – хвилі Стоунлі, фазова швидкість якої менша, ніж фазові швидкості всіх об'ємних хвиль в обох середовищах.

Решта поверхневих хвиль – це витікаючі квазіповерхневі хвилі: вони поширюються вздовж межі, переносять енергію вглиб одного або обох середовищ за рахунок перерозподілу енергії поверхневої хвиль в об'ємні хвилі. Квазіповерхнева хвиля Стоунлі поширюється з фазовою швидкістю, більшою за швидкість повільної поздовжньої хвилі в пористо-пружному середовищі, але меншою за швидкості поперечної та швидкої поздовжньої хвилі в пористо-пружному середовищі та хвилі в рідині. Для неї повільна поздовжня хвиля в пористо-пружному середовищі стає такою, що поширюється й переносить енергію вглиб пористо-пружного півпростору, а у рідині енергія вглиб середовища не переноситься і поверхнева хвиля експоненціально згасає.

Третій тип поверхневих хвиль – це квазіповерхнева хвиля Релея, фазова швидкість якої більша, ніж швидкість хвилі в рідині, та перевищує швидкість повільної поздовжньої хвилі в пористо-пружному півпросторі. Швидкість квазіповерхневої хвилі релеївського типу менше швидкостей поперечної та швидкої поздовжньої хвиль в пористо-пружному півпросторі. В цій хвилі енергія переноситься як вглиб рідини, так і в пористо-пружне середовище по-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_04.pdf

вільною поздовжньою хвилею.

Тип граничних умов на межі розділу середовищ суттєво впливає як на характеристики поверхневих хвиль, так і на умови їх існування. В роботі було показано, що для непроникної межі хвиля Стоунлі існує для всіх можливих співвідношень механічних характеристик контактуючих середовищ. Для проникної межі хвиля Стоунлі існує для обмеженого співвідношення механічних параметрів. При цьому за умови існування хвилі Стоунлі, її швидкість на проникній межі більша, ніж на непроникній межі.

Квазіповерхнева хвиля Стоунлі для проникної і непроникної межі існує в обмеженому діапазоні зміни параметрів контактуючих середовищ. На проникній межі швидкість квазіповерхневої хвилі менша, ніж на непроникній.

Квазіповерхнева хвиля Реле для проникної і непроникної межі існує не для всіх можливих параметрів середовищ. Для непроникної межі квазіповерхнева хвиля Релея існує для більш жорстких середовищ, ніж для проникної межі і її швидкість на непроникній межі більша.

Тип граничних хвиль є визначальним для кінематичних та енергетичних характеристик поверхневої хвилі. Для певних механічних характеристик контактуючих середовищ для проникної межі поверхнева хвиля Стоунлі проникає на більшу глибину в пористо-пружній півпростір, ніж для непроникної межі. Для обох типів граничних умов енергія цієї хвилі зосереджена переважно в пористо-пружному півпросторі. Зокрема, для проникної межі при контакті води і пористо-пружного півпростору, насиченого водою, в рідині практично вся енергії зосереджена в шарі 0.2λ, а в пористо-пружному півпросторі – в шарі λ, де λ – довжина хвилі Стоунлі. Для непроникної межі основна частина енергії поверхневої хвилі зосереджена в пружному скелеті, але процентний вміст цієї енергії в пористо-пружний півпростір є меншим, ніж для проникної межі.

Аналізуючи кінематичні характеристики відмітимо, що для непроникної межі вертикальна компонента переміщення порової рідини в пористо-пружному півпросторі та переміщення в пружному направлені однаково. Для проникної межі вертикальна компонента переміщення порової рідини і пружного скелету направлені в протилежні боки. Горизонтальна компонента переміщення пружного скелету змінює знак з глибиною для обох типів граничних умов. В той же час переміщення в поровій рідині знак не змінюють.

Таким чином, зміна типу граничних умов на межі рідини та пористо-пружного півпростору суттєво впливає на акустичні характеристики поверхневої хвилі.

TYPES OF SURFACE WAVES AT THE INTERFACE OF A FLUID AND A PORE-ELASTIC HALF-SPACE

The surface wave propagation at the interface of a porous-elastic fluid-saturated half-space and a fluid have been analyzed. It is found that three types of surface waves can exist in the system, depending on mechanical characteristics of the contacting media and boundary conditions (permeable or impermeable boundary). The kinematic and energy characteristics of the surface wave have been studied.

УДК 539.3:534.1:624.071

ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ СТЕРЖНЯ ІЗ ЗОВНІШНІМ СУХИМ ТЕРТЯМ ПРИ НЕЛІНІЙНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Василь Перепічка

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

v.v.perepichka@gmail.com

В рамках класичної теорії розглянуто задачу нестаціонарної динаміки півнескінченного стержня, що взаємодіє з середовищем через бокові поверхні шляхом фрикційного проковзування в контакті, при нелінійному законі зростання сили притиску на торці. Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщень стержня $u(X,T)$ в процесі збурення поздовжньою силою $N(T)$ записується наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u(X,T)}{\partial X^2}+\frac{\Pi}{A}\frac{\tau_X}{E}=\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u(X,T)}{\partial T^2},\quad X\ge 0,\ T>0\ ;$$

$$\frac{\partial u(X,T)}{\partial T}\ne 0:\tau_X=-\tau_c\,\mathrm{sgn}\frac{\partial u(X,T)}{\partial T},\qquad \frac{\partial u(X,T)}{\partial T}=0:|\,\tau_X\,|\le\tau_c\ ;$$

$$u(X,0)=0,\quad \frac{\partial u(X,0)}{\partial T}=0,\quad X\ge 0\ ;$$

$$\frac{\partial u(0,T)}{\partial X}=-\frac{N(T)}{AE}H(T),\quad u(\infty,T)=0,\quad T>0\ . \qquad (1)$$

Тут X, T – координата та час у вибраній системі відліку з початком на краю стержня; A – площа поперечного перерізу стержня, Π – довжина частини периметру, де діє сухе тертя; τ_X – дотичні напруження на бічній поверхні, τ_c – порогове значення дотичних напружень; ρ, E – густина та модуль Юнга матеріалу стержня; $N(T)=A\sigma_0\left(T/n\right)^k$, σ_0 – довільне еталонне робоче напруження притиску в задачі удару, n – час (у секундах), k – параметр нелінійності навантаження торця, $k\in(0,1)\bigcup(1,\infty)$; $H(t)$ – функція Гевісайда.

Наявність нестаціонарності в правій частині рівняння (1) призводить до того, що отриманий розв'язок відповідає задачі коливань. Має місце поява на

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_05.pdf

фронті відбитої хвилі або виникнення тимчасової області зупинки руху, де наявні залишкові напруження на час зупинки та повторне подальше збурення для зрушених перерізів. Така специфіка дослідженої задачі: розв'язок не будується на одній прямій хвилі.

Знерозміренням і нормуванням шуканої функції, а також з врахуванням того, що в відліковій конфігурації немає залишкових напружень, початково-крайову задачу (1) було зведено до універсальної форми запису:

$$f'' = \ddot{f} + \operatorname{sgn}\dot{f}, \qquad x \ge 0, t > 0;$$

$$f(x,0) = 0, \qquad \dot{f}(x,0) = 0, \qquad x \ge 0;$$

$$f'(0,t) = t^k H(t), \qquad f(\infty,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2}$$

Тут $f(x,t) \equiv \dfrac{u(x,t)}{\mathrm{N}}$, $\mathrm{N} = \dfrac{\Pi}{A}\dfrac{\tau_c n^2}{\rho}\left(\dfrac{1}{M}\right)^{\frac{2}{k-1}}$ при знерозміренні фізичних змінних із масштабуванням: $x = \dfrac{X}{n}\sqrt{\dfrac{\rho}{E}}M^{\frac{1}{k-1}}$, $t = \dfrac{T}{n}M^{\frac{1}{k-1}}$, $M = \dfrac{\sigma_0}{\tau_c}\sqrt{\dfrac{\rho}{E}}\dfrac{A}{n\Pi}$.

Для обґрунтування існування розв'язку та його побудови розглядались дві споріднені з (2) задачі, а саме задача збурення заданим навантаженням стержня за відсутності тертя на боковій поверхні та задача про поширення дотичних зусиль на боковій поверхні стержня зі змінною в часі швидкістю, що не локально завжди менша за акустичну характеристику матеріалу стержня. В просторі трансформант перетворення Лапласа отримано розв'язок задачі (2) як суперпозицію розв'язків споріднених задач за умови виконання інтегральної рівності, що пов'язує функцію фронту збурення по довжині стержня в задачі про дотичні зусилля та закон навантаження в часі торця для задачі збурення стержня без тертя.

В дійсних змінних розв'язок (2) будувався на ґрунті отриманого структурного подання через дві невідомі функції:

$$f(x,t) = \left\{\frac{1}{k+1}(t-x)^{k+1} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\phi(t+x) + \phi(t-x)\right]\right\} H(L(t)-x) \qquad .$$

Для неударного лінійного збурення торця ($k = 1$) запропонований спосіб побудови розв'язку також чинний та співпадає з відомими результатами.

TO THE QUESTION ON CONSTRUCTING SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF ROD DYNAMICS WITH EXTERNAL DRY FRICTION UNDER NONLINEAR LOADS

Analytical approach to constructing solutions to the problem of rod dynamics under external dry friction under nonlinear loading is substantiated and implemented on examples.

УДК 539.3

СИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ГЕКСАГОНАЛЬНОЇ ҐРАТКИ З КРУГОВИХ ТРІЩИН У ПРУЖНОМУ ТІЛІ

Віктор Михаськів, Ігор Жбадинський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

mykhaskiv@gmail.com, zhbadynskyi.igor@gmail.com

Розвиток технологій 3D друку стимулював застосування в інженерній практиці акустичних метаматеріалів з періодичними тріщинними хвильовими розсіювачами [1], компактне заповнення яких досягається впорядкуванням у гексагональні ґратки. Присутність таких структурних елементів вимагає також дослідження динамічних напружень в їх околі (досі розглядались ортогональні прямокутні ґратки з кругових тріщин [2, 3]).

Симетричну задачу падіння у напрямку Ox_3 пружної гармонічної хвилі нормальних напружень з постійною амплітудою N_0 на двоперіодичний масив компланарних кругових тріщин з однаковими радіусами a та нахилом $\alpha = 60°$ між напрямками їх розташування на відстані d (рис. 1) з урахуванням умов періодичності зведено до граничного інтегрального рівняння (ГІР) відносно динамічного розкриття $\Delta u(\mathbf{x})$ відлікової тріщини S в одиничній комірці структури у вигляді

$$\iint\limits_S \Delta u(\mathbf{y}) \left\{ \sum_{j=1}^{2} \mathbf{D}_j^{\mathbf{x}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[ik_j r_{nm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right]}{r_{nm}(\mathbf{x},\mathbf{y})} \right] \right\} dS_{\mathbf{y}} = N_0, \ \mathbf{x} \in S. \quad (1)$$

Тут $r_{nm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1 - nd - md\cos\alpha)^2 + (x_2 - y_2 - md\sin\alpha)^2}$, $k_j \ (j = 1,2)$ – хвильові числа поздовжньої та поперечної хвиль, $\mathbf{D}_j^{\mathbf{x}}$ $(j = 1,2)$ – відомі диференціальні оператори четвертого порядку за змінними x_1 та x_2 [3].

Розв'язання ГІР (1) ґрунтується на декомпозиції відповідальних за динамічну взаємодію тріщин ґраткових сум на складові за віддаленістю від відлікової та перетворенні цих складових до швидкозбіжних форм шляхом інтегральних подань з експоненційно спадними підінтегральними виразами. Для отримання добре обумовленого дискретного аналога рівняння застосовано також

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_06.pdf

процедури регуляризації його сингулярних ядер з виділенням спеціальних «вирізних» значень (точок аномалій Вуда) на частотному спектрі та метод колокацій з кусково-постійною апроксимацією розв'язку на радіально-кутовій сітці граничних елементів, що покривають область відлікової тріщини.

За розв'язком ГІР амплітуда коефіцієнта інтенсивності динамічних напружень відриву $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ в околі відлікової тріщини як функція кутової координати φ точки її фронту визначається так (A – нормувальна стала):

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}(\varphi) = A(a^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2} \left|\Delta u(\mathbf{x})\right|\Big|_{\substack{x_1 = a\cos\varphi \\ x_2 = a\sin\varphi}}. \qquad (2)$$

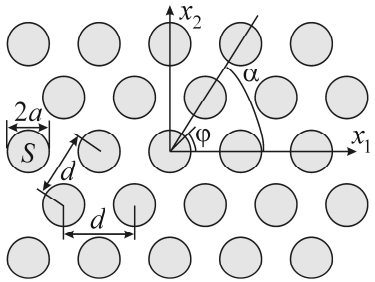


Рис. 1

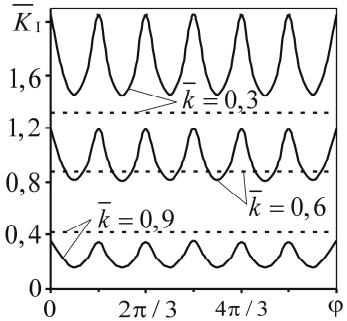


Рис. 2

Рис. 2 стосується розрахунків, коли $d = 2,01a$, коефіцієнт Пуассона тіла з тріщинами дорівнює 0,3, та для різних безрозмірних хвильових чисел $\overline{k} = k_2 d/(2\pi\sin\alpha)$. Штрихові прямі відповідають гармонічно навантаженій поодинокій тріщині.

1. *Khelif A., Adibi A*. Phononic crystals: fundamentals and applications. – New York: Springer, 2016. – 268 p.
2. *Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskyi I.Ya., Zhang Ch.* Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks // Мат. Методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 94–101.
3. *Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskyi I.Ya., Zhang Ch.* On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks // European Journal of Mechanics / A Solids – 2019. – **73**. – P. 306–317.

SYMMETRIC PROBLEM ON TIME-HARMONIC LOADING OF HEXAGONAL LATTICE OF CIRCULAR CRACKS IN AN ELASTIC SOLID

The symmetric frequency-domain problem on the interaction effects in hexagonal lattice of coplanar circular cracks located in an infinite elastic solid is investigated by the boundary integral equation method. The mode-I dynamic stress intensity factor in the crack vicinities depending on the angular coordinate and frequency is calculated and analyzed.

УДК 534.1:539.3

ЗАСТОСУВАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ПРИНЦИПУ ХЕЛІНГЕРА–РЕЙССНЕРА ДЛЯ АНАЛІЗУ ДЕМПФУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН

Олена Савченко, Олег Деркач

Національний університет «Чернігівська політехніка»,
Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

derkach@ipp.kiev.ua

Впровадження сучасних композитних матеріалів у практику проєктування та виготовлення нових зразків техніки енергетичного та авіаційного машинобудування дає змогу досягти їх високої конкурентоспроможності. Водночас умови експлуатації такої техніки часто пов'язані з дією інтенсивних нестаціонарних навантажень, що потребує розробки ефективних методів забезпечення їх вібраційної надійності. В останні десятиліття набули розвитку прикладні дослідження у галузі механіки зв'язаних полів в елементах конструкцій щодо активного та активно-пасивного (гібридного) демпфування коливань за допомогою п'єзоелектричних перетворювачів. До переваг таких методів слід віднести можливість забезпечення високої демпфувальної здатності конструктивних елементів у широкому діапазоні частот їх коливань та можливість забезпечення суттєвого зменшення амплітуд коливань у початкові моменти часу [1]. Необхідність застосування адаптивних методів контролю за умов активного демпфування коливань обумовлює особливу актуальність розробки математичних моделей композитних конструкцій із в'язкопружними та п'єзоелектричними шарами матеріалу, що мають електров'язкопружні властивості. Так, зокрема, для побудови розрахункових рівнянь динаміки в'язкопружних та електров'язкопружних конструкцій в [1] було використано варіаційні рівняння Лагранжа у згортках. При цьому вважалося, що для шарів на поверхнях контакту виконуються умови нерозривності відповідних переміщень. Для уточнення розрахункової моделі доцільним є застосування математичних моделей, що враховують нерозривність напружень. Так, для додаткового визначення напружень на поверхнях розділу шарів у даній роботі застосовано функціонал Хелінгера–Рейсснера з умовою, яка встановлює незалежність напружень, що діють між шарами, від переміщень та електричного потенціалу. Таким чином, метою представленої роботи є розробка уточнених моделей багатошарових пластин з пасивними

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_08.pdf

в'язкопружними і активними п'єзоелектричними шарами на основі даного змішаного варіаційного принципу.

У доповіді розглядаються алгоритми застосування варіаційного рівняння Хелінгера–Рейсснера у згортках, а також його слабка варіаційна постановка змішаної задачі електров'язкопружності безпосередньо у частотному просторі Фур'є. Для побудови розрахункових рівнянь було застосовано дискретно-структурний підхід. Так, тривимірну задачу було зведено до двовимірної, а неоднорідність пластини по товщині враховано шляхом її розділення на розрахункові шари. Для врахування ефекту електромеханічної зв'язаності в кожному розрахунковому шарі матеріалу для механічних та електричних змінних було прийнято кубічну апрокимацію по товщині кожного шару.

Розрахункові рівняння для шарнірно закріпленої по краям прямокутної пластини одержано у просторі зображень Фур'є переміщень, напружень та електричного потенціалу. Це дозволяє проводити аналіз нестаціонарних, багаточастотних та випадкових коливань з урахуванням залежності пружних та дисипативних властивостей від частоти, характерної для в'язкопружних матеріалів.

Для підтвердження достовірності отриманої моделі проведено аналіз збіжності розв'язків, а результати тестових розрахунків співставлено з точними результатами, які відомі з літератури. Для демонстрації ефективності запропонованої методики наведено результати розрахункових досліджень з визначення розподілу переміщень, електричного потенціалу, а також напружень, що діють між шарами матеріалу по товщині анізотропних багатошарових пластин із різною конфігурацією шарів.

1. *Деркач О.Л., Зіньковський А.П., Савченко О.В.* Активне демпфірування нестаціонарних коливань тришарової електро-в'язкопружної композитної пластини // Проблеми міцності. – 2020. – **52**, № 6. – С. 65–78.

APPLICATION OF THE HELLINGER-REISSNER VARIANCE PRINCIPLE FOR THE ANALYSIS OF DAMPING OF NON-STATIONARY VIBRATIONS OF MULTILAYER PLATES

The algorithms for applying the Hellinger-Reissner variational principle in convolutions, as well as its weak variational formulation of the mixed electroviscoelasticity problem directly in the Fourier frequency space were considered. A discrete-structural approach was used to construct the displacement equations. To take into account the effect of electromechanical coupling, a cubic approximation of displacements and electric potentials through the thickness of each calculated layer of the multilayer plate was adopted. Resolving equations are obtained for a simply-supported plate in the Fourier frequency domain, which allows providing the analysis of non-stationary vibrations taking into account the dependence of elastic and dissipative properties on the frequency. The results of calculation studies on the determination of the stress distribution for anisotropic multilayer plates with different configurations of the layers are presented.

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

**Роман Андрійчук, Ярослав Кунець,
Валерій Матус, Василь Пороховський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

andriychukroman@gmail.com, kunets56@gmail.com, vmatus56@gmail.com

Нехай у пружному ізотропному середовищі знаходиться тонке дискове п'єзокерамічне (за кругової поляризації) включення змінної товщини, яке займає область $W_\varepsilon = \{(r,z): 0 \le r \le a,\ \varepsilon f_-(r) \le z \le \varepsilon f_+(r)\}$, де $Or\theta z$ – циліндрична система координат; a і $h(r) = \varepsilon f(r) = \varepsilon[f_+(r) - f_-(r)]$ – радіус і товщина включення; ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує відносну товщину включення. Електропружна система перебуває в умовах осесиметричного кручення та динамічних навантажень.

Рівняння руху і рівняння Максвелла для матеріалу включення у циліндричній системі координат запишемо [1]:

$$\frac{\partial \sigma^0_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^0_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma^0_{r\theta} + k_0^2 u^0_\theta = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^0 = \frac{\partial D^0_r}{\partial r} + \frac{D^0_r}{r} + \frac{\partial D^0_z}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$\sigma^0_{r\theta}$, $\sigma^0_{\theta z}$ – компоненти тензора напружень; u^0_θ – відмінна від нуля компонента вектора зміщень; D^0_r та D^0_z – компоненти вектора індукції електричного поля $\mathbf{D}^0$; $k_0 = \omega / c_0$ та $c_0 = \sqrt{c_{44}(1+\eta^2)/\rho_0}$ – хвильове число та швидкість поперечних хвиль у включенні; ρ_0, c_{44}, e_{15}, ε_{11} – густина, пружна та п'єзоелектрична сталі, діелектрична проникність матеріалу включення; $\eta = e_{15}^2 / (c_{44}\varepsilon_{11})$ – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Матеріальні рівняння для матеріалу включення мають вигляд

$$\sigma^0_{r\theta} = c_{44}\left(\frac{\partial u^0_\theta}{\partial r} - \frac{u^0_\theta}{r} + \eta^2 \frac{\partial \varphi^0_p}{\partial r}\right), \quad \sigma^0_{\theta z} = c_{44}\left(\frac{\partial u^0_\theta}{\partial z} + \eta^2 \frac{\partial \varphi^0_p}{\partial z}\right),$$

$$D^0_r = e_{15}\left(\frac{\partial u^0_\theta}{\partial r} - \frac{u^0_\theta}{r} - \frac{\partial \varphi^0_p}{\partial r}\right), \qquad D^0_z = e_{15}\left(\frac{\partial u^0_\theta}{\partial z} - \frac{\partial \varphi^0_p}{\partial z}\right), \quad (2)$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_10.pdf

$$\varphi_p^0(r,z) = \varepsilon_{11}\varphi^0(r,z) / e_{15}, \tag{3}$$

де $\varphi^0(r,z)$ – електричний потенціал включення.

Розглянуто випадок ідеального механічного контакту між складовими композиту. Зокрема, на лицьових поверхнях включення маємо:

$$u_\theta(r,z) = u_\theta^0(r,z), \qquad \sigma_n(r,z) = \sigma_n^0(r,z), \qquad (r,z) \in \partial W_\varepsilon, \tag{4}$$

де $\sigma_n = \sigma_{\theta z} n_z + \sigma_{\theta r} n_r$, $\sigma_n^0 = \sigma_{\theta z}^0 n_z + \sigma_{\theta r}^0 n_r$, $n_z^{\pm} \approx \pm 1$, $n_r^{\pm} \approx 2\varepsilon f_{\pm}'(r)$.

Для електроізольованого та заземленого включення на поверхні неоднорідності виконуються відповідно граничні умови:

$$D_n^0(r,z) = 0, \quad \varphi^0(r,z) = 0, \quad (r,z) \in \partial W_\varepsilon, \tag{5}$$

де $D_n^0 = D_z n_z + D_r n_r$. Тут $u_\theta(r,z)$, $\sigma_{\theta r}(r,z)$ та $\sigma_{\theta z}(r,z)$ – повні поля зміщень та напружень у матриці.

Оскільки відносна товщина включення мала, для отримання наближених розв'язків задачі використовуємо методи теорії сингулярних збурень [2, 3], подаючи шукані величини у вигляді асимптотичних розкладів за степенями ε.

Характер цих розкладів визначається співвідношенням між параметром контрастності жорсткостей складових електропружної системи $\gamma = c_{44}/\mu$ та ε. Тому розглядаються три різні діапазони зміни параметра γ: **1**) $\varepsilon \le \gamma \le 1/\varepsilon$; **2**) $0 \le \gamma \le \varepsilon$; **3**) $1/\varepsilon \le \gamma < \infty$. *Діапазон* **1** відповідає неконтрастним неоднорідностям, *діапазони* **2** та **3** описують випадки включень малої та великої жорсткостей.

Досліджено напружено-деформований стан тіла в околі гострокінцевих включень.

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
2. *Кунець Я.І., Матус В.В.* Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 1. – С. 75–93.
3. *Kunets Ya. I.* Axisymmetric torsion of an elastic space with a thin elastic inclusion // J. App. Math. Mech. – 1987. – **51,** No. 4. – P. 497–503.

DYNAMIC INTERACTION OF ELASTIC BODY WITH THIN PIEZOCERAMIC INCLUSION OF VARIABLE THICKNESS

A mathematical models of dynamic interaction of a thin piezoceramic inclusion of variable thickness with isotropic elastic medium under axisymmetric torsion of a composite are constructed. Conditions of the perfect mechanical contact on the interface of components are satisfied. Cases of electrically insulated and grounded piezoceramic inclusions are considered. Modeling is performed using the theory of singular perturbations.

ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЄКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН РІЗЬБОВОГО З'ЄДНАННЯ ОБОЛОНОК З УПОРНОЮ РІЗЬБОЮ

Дмитро Клименко, Володимир Харченко

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

volodymyrmx@gmail.com

Найпоширенішим способом з'єднання оболонок у конструкціях, що знаходяться під дією високого тиску, таких як великогабаритні труби, балони високого тиску, корпуси і паливні баки ракетних двигунів, є зварні з'єднання. Такі з'єднання є нерозбірними. Одним із типів розбірних з'єднань є різьбові з'єднання, що застосовуються, в основному, в середньогабаритних конструкціях.

Особливістю різьбових з'єднань оболонкових конструкцій, що знаходяться під дією високого внутрішнього тиску, є їх відносно велика деформативність внаслідок тонкостінності конструкції. В оболонкових конструкціях, що мають днище, внутрішній тиск на днище спричиняє осьову розтягувальну силу, яка призводить до появи радіальної розпірної сили в різьбі. Для зменшення розпірної сили в різьбі (під час дії на з'єднання осьової сили) застосовують упорну різьбу.

В [1] розглянута задача визначення розподілу навантаження в різьбовому з'єднанні оболонок типу «циліндр–гайка», при цьому контактний тиск на витки різьби вважався розподіленим рівномірно.

Мета даної роботи – методом скінченних елементів розрахувати напружено-деформований стан різьбового з'єднання оболонок з упорною різьбою. Розглядаємо різьбове з'єднання оболонок типу «циліндр–днище» під дією внутрішнього тиску з урахуванням пружно-пластичних властивостей матеріалів, великих переміщень та контактної взаємодії витків різьби. Задачу розв'язували для різних варіантів проникнення тиску в різьбове з'єднання. У результаті розв'язання задачі отримали параметри напружено-деформованого стану з'єднання, зокрема розподіл контактного тиску між витками, радіальний зазор в з'єднанні, напруження та деформації.

1. *Биргер И.А., Иосилевич Г.Б.* Резьбовые и фланцевые соединения. – Москва: Машиностроение, 1990. – 368 с.

STRESSE-STRAIN STATE OF CARVING CONNECTION OF SHELLS WITH RESISTANT CARVE

The stress-strain state of the threaded connection of shells with a thrust thread was calculated using the finite element method.

УДК 539.3

РОЗРАХУНКОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНОГО СТАНУ СТИКІВ РАКЕТНИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ УМОВ ВИПРОБУВАНЬ НА МІЦНІСТЬ

Володимир Харченко

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

volodymyrmx@gmail.com

Для забезпечення економічної ефективності в ДП «КБ «Південне» аналіз міцності стиків ракетних конструкцій із композиційних матеріалів проводять на дослідних конструкціях, виготовлених методом фрагментування (розрізування) штатної повнорозмірної конструкції.

Мета даної роботи – методом скінченних елементів розрахувати напружено-деформований стан штифто-шпилькового стиків елементів ракетних конструкцій із композиційних матеріалів повнорозмірної конструкції та/або її фрагментів (за умов випробування на міцність). Особливістю заміни випробувань стиків повнорозмірної конструкції циліндричної форми її фрагментами є те, що ці фрагменти, на відміну від штатної повнорозмірної конструкції, не мають циліндричної жорсткості.

Напружено-деформований стан стику розраховувався за методикою [1, 2] при дії навантажень, які визначались за методикою [3] з урахуванням та без урахування циліндричної жорсткості. У результаті розв'язання задачі отримано параметри напружено-деформованого стану повнорозмірної конструкції стику та її фрагментів, проаналізовано отримані числові результати та розроблено відповідні рекомендації щодо випробувань фрагментів стиків.

1. *Клименко Д.В., Марчук М.В., Пакош В.С., Харченко В.М., Хом'як М.М.* Особливості скінченно-елементного моделювання та розрахунку стиків відсіків корпусів ракет // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Зб. наукових праць. – Львів: Львівський нац. ун-т імені Івана Франка. – 2015. – С. 172–175.
2. *Харченко В.М.* Моделювання та визначення напруженого стану стиків ракетних конструкцій із композиційних матеріалів // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 185–190.
3. *Харченко В.М., Клименко Д.В.* Навантаженість стиків ракети з урахуванням особливостей конструкцій суміжних відсіків // Прикладні проблеми механіки і математики. − 2019. – Вип. 17. – С. 98–104. https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.98-104.

COMPUTATIVE SIMULATION OF THE MECHANICAL STATE OF JOINTS IN ROCKET STRUCTURES MADE OF COMPOSITE MATERIALS UNDER THE CONDITIONS OF STRENGTH TESTS

Settlement modeling by a method of finite elements of a mechanical condition of joints of rocket designs and their fragments from composite materials for the durability test.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_06.pdf

УДК 531.8+519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАВАНТАЖЕНОЇ ХОДИ ЛЮДИНИ З ГОМІЛКОВОСТОПНИМИ ПРУЖИННИМИ ОРТЕЗАМИ

Мирослав Демидюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

m_demydyuk@ukr.net

Моделюємо ходу людини (з вантажем за спиною) по нерухомій горизонтальній поверхні. Вантаж, що переноситься, створює додаткове навантаження на опорно-руховий апарат людини, особливо на м'язово-скелетну структуру гомілковостопних суглобів, що призводить до підвищення рівня відповідних м'язових зусиль. Для зменшення цих навантажень використовуємо гомілковостопні розвантажувальні ортези [1–3]. Для підсилення розвантажувального ефекту в шарнір кожного ортеза вмонтовано пружинний пристрій (концентрично розміщені спіральні пружини з різною кутовою активацією [1]), параметри (вектор $\mathbf{c}_i$) яких вибираємо за умови зменшення рівня м'язових зусиль p_i в ортезованих суглобах, $i = 1, 2$.

Метою дослідження є побудова математичної моделі навантаженої ходи людини з гомілковостопними шарнірно-пружинними ортезами та розроблення відповідного алгоритму оптимізації параметрів ортезів.

Для моделювання ходи використовуємо систему дев'яти твердих тіл з одинадцятьма ступенями вільності (вектор узагальнених координат ξ), які представляють корпус людини та дві чотириланкові нижні кінцівки (стегно, гомілка та дволанкова стопа). Тіла послідовно з'єднані між собою циліндричними шарнірами, осі яких ортогональні сагітальній площині. Кожний ортез моделюємо двома стрижнями, закріпленими відповідно на гомілці та стопі й з'єднані між собою циліндричним шарніром із зосередженою пружною податливістю (момент пружних сил $f_i(\xi, \mathbf{c}_i)$), обумовленою взаємодією невагомих пружин. Переносний вантаж представляємо у вигляді точкової маси, закріпленої на корпусі в заданому положенні.

Ходу моделюємо на проміжку подвійного кроку $t \in [0, T]$, де враховуємо періодичність руху ланок ніг та основні ритмічні, кінематичні та динамічні умови антропоморфного переміщення стоп. Також на міжланкові кути системи накладаємо двосторонні нестаціонарні обмеження, загальноприйняті в біомеханіці ходи людини. В основі математичного моделювання ходи людини

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_01.pdf

лежить принцип енергетичної мінімальності, згідно з яким людина під час усталеної ходи намагається мінімізувати свої енерговитрати.

Пошук параметрів ортезів $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, які знижують рівень м'язових зусиль в ортезованих суглобах, проводимо у два етапи. На першому етапі для заданих масінерційних параметрів опорно-рухового апарату людини та переносного вантажу моделюємо її ходу без ортезів. Для розрахунку характеристик такої ходи розв'язуємо **задачу 1**: визначити такий рух механічної моделі $\xi_n^*(t)$, $t \in [0, T]$ та відповідні м'язові зусилля, які за накладених умов ходи мінімізують механічні енерговитрати E. Побудований закон руху $\xi = \xi^*(t)$ та відповідні м'язові зусилля в гомілковостопних суглобах $p_1^*(t)$, $p_2^*(t)$ використовуємо на другому етапі, де розв'язуємо **задачу 2**: для заданої ходи людини $\xi^*(t)$, $t \in [0, T]$ знайти такі вектори параметрів $\mathbf{c}_i^* \in \Omega_i$, які мінімізують м'язові зусилля в ортезованих суглобах $P_i = k_1 \max\limits_{\tilde{p}_i > 0,\, t \in [0,T]} \tilde{p}_i(t) + k_2 \max\limits_{\tilde{p}_i < 0,\, t \in [0,T]} \left|\tilde{p}_i(t)\right|$, $i = 1, 2$, де $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – задані вагові коефіцієнти, $\tilde{p}_i(t) \equiv p_i^*(t) - f_i(\xi^*, \mathbf{c}_i)$ – момент м'язових сил в ортезованому суглобі i – ї ноги.

Для розв'язання сформульованих задач була використана методика параметричної оптимізації та чисельні процедури нелінійного програмування. Ефективність побудованого алгоритму підтверджено результатами числового моделювання навантаженої ходи людини з пружинними ортезами.

1. *Demydyuk M.V., Lytvyn B.A.* The Mathematical Modeling of the Human Gait with Ankle Hinged Orthosis // J. of Automation and Information Sciences. – 2015. – **47**, Is. 4. – P. 64–77. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i4.70.
2. *Демидюк М.В.* Математичне моделювання та оптимізація ходи людини з пасивно керованим гомілковостопним ортезом // Реабілітація та протезування/ортезування XXI століття. Проблематика, перспективи та міжнародні стандарти відновлення рухової активності: Зб. наук. праць науково-практ. конф. (Харків, 15 квітня 2021 р.). – 2021. Харків: УкрНДІ протезування. – С. 96–100.

THE MATHEMATICAL MODELING OF THE LOADED HUMAN GAIT WITH ANKLE SPRING ORTHOSES

The mathematical model of the human loaded gait with ankle spring-hinged orthosis is built. The system of 9 rigid bodies (trunk and two two-link feet) joined by cylindrical hinges is used for modeling. The active muscle forces and orthosis spring elastic forces are acting together in the orthosis joint. The elastic parameters stiffness optimization problem to minimize the maximum value of the active forces torque (over double stride interval) in the orthotic joint is investigated. The methodology of the approximate solution construction of the formulated problem based on the generalized coordinates parametrization by the set of cubic smoothing splines and numerical methods of the nonlinear mathematical programming is developed.

УДК 539.3

СИМУЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ У ОПТИМІЗАЦІЇ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТИХ БІОМАТЕРІАЛІВ

Олександр Сад, Олена Мікуліч, Наталя Коменда

Луцький національний технічний університет

sadolexandr@gmail.com, shyprao@gmail.com, nvkomenda@gmail.com

Нинішня ситуація в Україні, що пов'язана з військовою агресією та бойовими діями на території України, які спричиняють поранення та каліцтво не тільки військових, а і цивільних жителів, вимагає розробки власних сучасних методів протезування. Всі ці заходи дозволять задовольнити потреби українців, що зазнали мінно-вибухових травм та забезпечать їх повернення до звичайних умов життя. Тому актуальною є проблема удосконалення наявних та розроблення нових матеріалів і технологій, що використовуються у протезуванні. Зокрема, це стосується створення та розроблення матеріалів, які матимуть наперед задані механічні характеристики. Такий підхід забезпечить не тільки хороші експлуатаційні характеристики протезів, а й швидку адаптацію людини до даного протеза.

Виходячи з вище сказаного, метою роботи є розроблення методу оцінювання оптимальності механічних характеристик спінених та пористих біоматеріалів, який би дозволив аналізувати зміну певних характеристик на механічну поведінку відповідних тіл. Дослідження проведені в рамках моментного континууму Коссера, що дозволяє враховувати структурну неоднорідність матеріалу через вплив обертально-зсувних деформацій частинок середовища [1, 2]. Використання апарату моментної теорії пружності для моделювання дало можливість більш точно врахувати структурну неоднорідність досліджуваних матеріалів. Такий підхід використовується також і іншими авторами [3], що підтверджує його раціональність.

Використана для моделювання модель Кобба-Дугласа [4] дозволяє врахувати нелінійну залежність модуля зсуву від густини та пористості матеріалу. Розроблений підхід дав змогу оцінити вплив густини матеріалу та пористості на зміну механічної поведінки матеріалів за різних типів навантаження.

Аналіз ефективності розробленого підходу здійснено на основі результатів експериментальних досліджень та числової симуляції для біоматеріалів, що використовуються для виготовлення біокісток [5, 6] та спінених полімерів [7], які мають широке застосування в протезуванні під час виготовлення амортизуючих елементів приймальної гільзи протеза людини.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_02.pdf

Метод аналітико-числового моделювання, заснований на запропонованих у роботі підходах, зручний і практичний для спінених, пористих та інших типів структурно неоднорідних матеріалів. Перевагою такого підходу є можливість провести аналіз та визначити значення оптимальних величин механічних характеристик спінених та пористих біоматеріалів, які широко використовуються в протезуванні. Такий підхід також значно розширить область застосування спінених полімерів.

1. *Erofeev V.I.* Wave processes in solids with microstructure. – Singepore: World Scientific, 2003. – 276 p.
2. *Mikulich O.* Wave propagation speed analysis in polyurethane foams / In: Tonkonogyi V., Ivanov V., Trojanowska J., Oborskyi G., Pavlenko I. (eds.) // Advanced Manufacturing Processes IV. InterPartner 2022. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-16651-8_44.
3. *Eremeyev V.A., Skrzat A., Stachowicz F.* Linear micropolar elasticity analysis of stresses in bones under static loads // Strength of Materials. – 2017. – **49**. – P. 575–585.
4. *Mahaboob B., Ajmath K., Venkateswarlu B., Narayana C., Praveen J.* On Cobb-Douglas production function model // AIP Conference Proceedings. – 2019. – **2177**. – 020040.
5. *Buechner P.M., Lakes R.S.* Size effects in the elasticity and viscoelasticity of bone // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2003. – **1**. – P. 295–301.
6. *Ramézani H., El-Hraiech A., Jeong J., Benhamou C.* Size effect method application for modeling of human cancellous bone using geometrically exact Cosserat elasticity // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2012. – **240**. – P. 227–243.
7. *Chen S., Lei S., Zhu J., Zhang T.* The influence of microstructure on sound absorption of polyurethane foams through numerical simulation // Macromolecural Theory and Simulation. – 2021. – **30**, No. 5. – 2000075.

SIMULATION ANALYSIS IN OPTIMIZATION OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF POROUS BIOMATERIALS

The research is devoted to the solution of the actual problem of developing a method for optimizing the mechanical characteristics of porous and foam structurally heterogeneous materials. The approach can be used to create and manufacture materials with predetermined mechanical characteristics. The developed method for assessing the optimality of the mechanical characteristics of foam and porous biomaterials allows for analyzing the change of specific characteristics in the mechanical behaviour of the corresponding bodies. The research was carried out within the framework of the Cosserat elasticity, which allows accounting for the structural heterogeneity of the material due to the influence of rotational-shear deformations of the medium particles. The Cobb-Douglas model was used in the development of the method, which made it possible to take into account the nonlinear dependence between the mechanical characteristics of the material. The analysis of the effectiveness of the developed approach was carried out on the basis of the results of experimental studies and numerical simulation for biomaterials used for the manufacture of biobones and foamed polymers, which are widely used in prosthetics in the manufacture of amortizing elements. This approach also significantly expands the scope of the application of structurally heterogeneous materials.

УДК 539.3

ОБҐРУНТУВАННЯ ДОСТОВІРНОСТІ РОЗРАХУНКУ МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ З УРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВХІДНИХ ДАНИХ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ НЕРУЙНІВНИХ ВИПРОБУВАНЬ

Анатолій Дзюба, Володимир Сіренко

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

dzb@ua.fm, v.n.sirenko@i.ua

Зниження вартості виведення на орбіту одиниці корисного вантажу є однією з пріоритетних задач ракетно-космічної галузі. Водночас, незважаючи на жорсткі вимоги до якості виконання робіт з проєктування, розрахунку і створення тримальних конструкцій нової техніки, на завершальній стадії розробки перевірка їх вірогідності здійснюється шляхом проведення досить високовартісних руйнівних натурних випробувань створюваних фрагментів і (або) усієї конструкції. Зазначена проблема обумовлена наявністю певної розбіжності результатів розрахунку та руйнівних випробувань, що суттєво підвищує вартість розроблення таких виробів і знижує їх конкурентоздатність на ринку послуг ракетно-космічної техніки.

Подана робота направлена на побудову методики оцінювання вірогідності прогнозування тримальної здатності неоднорідних оболонкових конструкцій сучасного машинобудування, зокрема елементів ракетно-космічної техніки, баків, сухих відсіків ракет-носіїв та ін., з метою відмови від проведення або для зменшення обсягу високовартісних руйнівних випробувань.

Вхідні дані числового аналізу приймаються проєктними (ідеальними), в той час як після виготовлення конструкції їх фізично реальні значення (геометричні розміри, значення фізико-механічних характеристик, параметри зовнішніх навантажень, умови закріплення та ін.) можуть мати певні відхилення від прийнятих у розрахунках. Побудована методика моделювання впливу можливих відхилень вхідних даних від своїх номінальних значень на відхилення основних параметрів результатів обчислень.

Реально існуючі вхідні дані (їх відхилення) встановлюються вимірюванням на натурній конструкції. Контроль накопичення похибок числового розрахунку здійснюється шляхом системного інтерактивного комп'ютерного моделювання із залученням елементів теорії чутливості для оцінювання залежності результатів розрахунку від зміни вхідних параметрів та проведення по-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_04.pdf

рівняльного аналізу з даними паралельного неруйнівного випробування реального об'єкта (в пружній області) з використанням засобів вимірювання деформацій та напружень або методів голографічної інтерферометрії.

При досягненні гранично припустимих значень напружень пружного неруйнівного деформування, навантаження на реальну конструкцію зупиняється і проводиться порівняння напружень, обчислених за декількома вибраними критеріями, в найбільш небезпечних (де і встановлюються вимірювальні пристрої) точках. За цими результатами обирається критерій з найбільш близькими до даних неруйнівних випробувань показниками.

За наявності неприпустимих відхилень результатів розрахунку та експериментальних даних, проводиться виявлення причин неточностей в розрахунку та внесення відповідних коректив в числове моделювання напружено-деформованого стану конструкцій.

За межами пружності (при нелінійному моделюванні) подальше досягнення критичного стану і віртуального руйнування проводиться лише у вигляді комп'ютерного моделювання.

Таким чином, застосування підходу дозволяє шляхом заміни досить витратних руйнівних випробувань натурних конструкцій на менш витратне, хоча і досить трудомістке, системне комп'ютерне моделювання та використання даних неруйнівного (в пружній області деформування) випробування конструкції, встановити контроль за величиною накопиченої похибки у вигляді кількісних показників відхилень (розкиду) результатів розрахунку від відхилення вхідних даних, та визначити їх граничні допуски, зокрема і тих, які вносяться в конструкцію під час її виготовлення і, як наслідок, в розрахунках не враховані.

Це дозволяє більш достовірно встановити величину критичного (руйнівного) навантаження та загальну картину втрати тримальної здатності за межами пружності, обґрунтувати вибір раціональної величини коефіцієнта запасу міцності, який у цьому випадку буде реально погоджений з отриманими порівняльними результатами з урахуванням похибок розрахункових математичних моделей, числового розрахунку, відхилень вхідних даних та технологій виготовлення конструкції.

Результати досліджень можуть бути використані для внесення коректив у проєктні та розрахункові дані з метою підвищення достовірності результатів розрахунку тримальної здатності та зменшення обсягу чи повної відмови від руйнівних випробувань.

JUSTIFICATION OF THE RELIABILITY FOR CALCULATING THE STRENGTH OF SHELL STRUCTURES TAKING INTO ACCOUNT THE ERRORS OF THE INPUT DATA AND THE RESULTS OF NON-DESTRUCTIVE LOADING

The methodology for assessing the reliability of the results of predicting the destructive loads of non-uniform shell structures of modern mechanical engineering using the analysis of the sensitivity of the numerical calculation results to the errors of input data and data of non-destructive tests is described.

УДК 621.43

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРИВОДІ ЕЛЕКТРОПІДСИЛЮВАЧА КЕРМА ЕЛЕКТРОБУСА

Богдан Кіндрацький, Роман Літвін

Національний університет «Львівська політехніка»

bohdan.i.kindratskyy@lpnu.ua, roman.h.litvin@lpnu.ua

Системи кермового керування з електромеханічним підсилювачем (ЕМП) широко розповсюджені в легких автомобілях. Застосування таких підсилювачів керма в автобусах, тролейбусах чи електробусах потребує додаткових досліджень для обґрунтування доцільності їх застосування.

Динамічна модель приводу кермового керування електробуса з ЕМП керма наведена на рис. 1.

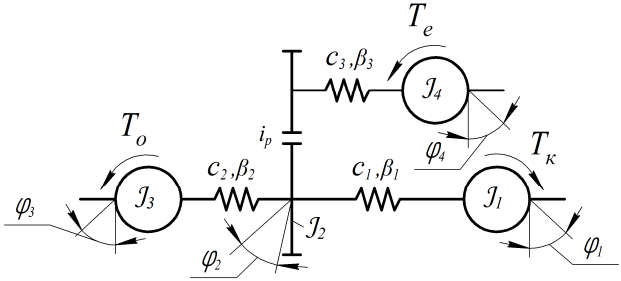


Рис. 1 Модель приводу кермового керування електробуса з електромеханічним підсилювачем

На рисунку позначено: J_1 – момент інерції кермового колеса; J_2 – зведений момент інерції частини кермового вала до зубчастого колеса редуктора; J_3 – зведений момент інерції керованих коліс до черв'яка на кінці кермового вала; J_4 – момент інерції ротора електричного двигуна; $\varphi_1,\ldots,\varphi_4$ – кути повороту ланок зведення; $c_1,\ldots,c_3$ – зведені крутильні жорсткості відповідних ланок приводу; $\beta_1,\ldots,\beta_3$ – коефіцієнти розсіювання енергії у ланках приводу; $T_к$ – крутний момент на кермовому колесі; T_O – зведений момент опору повороту керованого колеса до кермового вала; T_e – крутний момент електричного мотора підсилювача.

Система диференціальних рівнянь руху елементів приводу кермового керування з ЕМП має вигляд:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm05_05.pdf

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 = T_к - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - \beta_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2); \\ J_2\ddot{\varphi}_2 = c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - c_3 i_p^2(\varphi_2 - \varphi_4/i_p) - \\ -\beta_3 i_p^2(\varphi_2 - \dot{\varphi}_4/i_p) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) - \beta_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3); \\ J_3\ddot{\varphi}_3 = c_3(\varphi_2 - \varphi_3) + \beta_3(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - T_o; \\ J_4\ddot{\varphi}_4 = c_3(i_p\varphi_2 - \varphi_4) + \beta_3(i_p\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4) + T_e. \end{cases} \quad (1)$$

Момент T_O опору повороту колеса від кута його повороту в горизонтальній площині задаємо співвідношеннями

$$T_O = \begin{cases} c_\omega\theta \ , \ \theta \le 5°; \\ M_{\varphi\max} - (M_{\varphi\max} - c_\omega\theta)\left(\dfrac{\theta_B - \theta}{\theta_B - \theta_A}\right)^2, \ 5^o \le \theta \le 13°, \end{cases} \quad (2)$$

де θ – кут повороту колеса електробуса, $M_{\phi\max}$ дається виразом

$$M_{\varphi\max} = f(G_{wh}, \mu, a, b, y, l_0), \quad (3)$$

де G_{wh}, μ, a і b, y, l_0 – відповідно навантаження на кероване колесо, коефіцієнт зчеплення шини з контактною поверхнею, сторони зведеного рівновеликого прямокутника контактного відбитка шини з контактною поверхнею, плече стабілізації, плече обкочування [1].

Система рівнянь (1)–(3) є математичною моделлю приводу керма електробуса з ЕМП, яка описує коливальні процеси в приводі під час повороту керованих коліс електробуса. На основі розробленої математичної моделі побудовано симуляційну модель у середовищі MathLab Simulink, за допомогою якої досліджено вплив конструктивних параметрів приводу на динамічні навантаження на його ланки, обґрунтовано значення основних параметрів приводу.

1. *Клімов Е.С.* Щодо визначення моменту опору повороту шини керованого колеса на місці // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – Луцьк, 2014.– Вип. 46. – С. 246–251.

SIMULATION OF OSCILLATORY PROCESSES IN THE POWER STEERING DRIVE OF ELECTRIC BUS

A mathematical and simulation model of the steering drive of an electric bus with an electromechanical amplifier has been developed. The impact of the design parameters of the drive on the amount of dynamic loads in its links during the rotation of the driven wheel on the machine was studied. The values of the main drive parameters are substantiated.

МІЦНІСТЬ І ВТОМА МАТЕРІАЛІВ

УДК 539.3

ОЦІНКА МІЦНОСТІ РІЗЬБОВОГО З'ЄДНАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ З РІЗНОРІДНИХ ЗА ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ МАТЕРІАЛІВ

Володимир Бабуров, Дмитро Клименко, Тетяна Дяченко

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

literator11@i.ua, klymenko_dv@hotmail.com

Під час проектування конструкцій часто виникають задачі з'єднання конструктивних елементів, виконаних з різнорідних за фізико-механічними характеристиками матеріалів. Існують різні конструктивні рішення таких задач: склеювання, різьбове з'єднання через впресовану у тіло елемента втулку тощо. Кожен з таких варіантів має свої переваги та недоліки. Наприклад, впресована втулка, незважаючи на свої очевидні переваги, потребує наявності досить складної технології виробництва та виробничої бази.

У цій роботі розглянуто різьбове з'єднання як найпростіше конструктивне рішення. Кріпильний елемент – сталеву шпильку – впресовано у композитний матеріал малої жорсткості типу прес-матеріалу ДСВ. Під час розрахунку міцності різьбового з'єднання за відомим аналітичним розв'язком [1] потрібно знати коефіцієнт k_m нерівномірності розподілу зусиль уздовж витків різьби, залежний від використовуваної пари матеріалів (наприклад, для пари матеріалів «сталь-сталь» $k_m = 0{,}56$; для пари «сталь-алюміній» (сталевий болт та алюмінієва гайка) $k_m = 0{,}75$). Тому питання вирішення поставленої задачі полягає у визначенні коефіцієнту k_m за різної жорсткості використовуваних матеріалів – композитного матеріалу з модулем пружності $E = 2\times10^5$ кГс / см^2 та сталі з $E = 2\times10^6$ кГс / см^2.

Наведено результати оцінювання коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль уздовж витків різьби, напружено-деформований стан (НДС) елементів конструкції в зоні різьбового з'єднання та їх міцність.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_03.pdf

Розрахунки виконували методом скінченних елементів з використанням програмного комплексу MSC.NASTRAN [1] та інженерних методик розрахунків [2].

Побудовано скінченно-елементну модель з'єднання. Під час розрахунків конструктивний елемент «шпилька» навантажували розтягувальною силою N. Крайові умови закріплення реалізовували на конструктивному елементі, виконаному з матеріалу типу ДСВ.

Розрахунки НДС виконували у пружній постановці з вибором типу аналізу Static. Для скінченно-елементного моделювання елементів конструкції вибирали скінченні елементи типу Hexa Solid.

За отриманими результатами параметрів НДС визначено значення коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль та руйнівне навантаження різьбового з'єднання конструктивних елементів.

1. *Рычков С.П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
2. *Лизин В.Т, Пяткин В.А.* Проектирование тонкостенных конструкций. Москва: Машиностроение, 1976. – 408 с.

ESTIMATION OF THE STRENGTH OF THE THREADED CONNECTION OF STRUCTURAL ELEMENTS MADE OF MATERIALS OF DIFFERENT PHYSICAL AND MECHANICAL CHARACTERISTICS

The results of the assessment of the coefficient of the nonuniformity of the distribution of forces along the turns of the thread, the stress-strain state of the structural elements in the zone of the threaded connection, and their strength are presented. Calculations were performed using the finite element method based on the use of MSC.NASTRAN software complex and engineering calculation methods.

УДК 539.3

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕТИКИ ВТОМНИХ КОРОТКИХ ТРІЩИН І ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРІОДУ ЇХ ДОКРИТИЧНОГО РОСТУ

Олександр Андрейків, Ірина Долінська, Нікіта Звягін, Святослав Настасяк, Орест Свірчевський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

oleksandr.andreykiv@gmail.com; ira_dolinska@ukr.net; zvyagin-nikita@ukr.net; svyatikna@gmail.com; orest.sv@gmail.com

Проблемою поширення коротких тріщин у металевих матеріалах дослідники теоретики та експериментатори займаються десятиліттями, проте вона досі залишається актуальною для подальшого вивчення. На сьогодні недостатньо розроблені універсальні математичні моделі для оцінки поширення втомних тріщин у широкому діапазоні їх довжин, включаючи як короткі, так і довгі тріщини. Цей факт можна пояснити різною природою поширення коротких і довгих тріщин, а також складними механізмами, що лежать в основі процесу поширення коротких тріщин. Крім того, зважаючи на різницю у механізмах та характері росту коротких та довгих тріщин, часто математичні моделі втомного руйнування, побудовані на основі експериментальних даних довгих тріщин навіть після введення певних поправок, які мали б враховувати особливості коротких тріщин, недостатньо точно прогнозують ріст втомних тріщин, починаючи від їх виникнення як коротких тріщин і до кінцевого критичного розміру [1].

У даній роботі зроблена спроба на основі фізичних законів створити розрахункові моделі та методи визначення періоду докритичного росту коротких тріщин (залишкової довговічності) елементів конструкцій, які зазнають дії циклічного навантаження. В основу моделей покладено раніше розроблений авторами енергетичний підхід [2], який базується на першому законі термодинаміки про баланс енергетичних складових і роботи зовнішніх сил і, відповідно, баланс швидкостей змін цих складових в елементі конструкції, який послаблений короткою тріщиною l і розтягується циклічними зусиллями інтенсивності p. Вважаємо, що ріст тріщини в тілі проходить стрибками і, відповідно, енергетичний баланс записуємо для одного стрибка тріщини, як елементарного акту руйнування. У даному випадку враховуємо дві енергетичні складові: енергію руйнування та енергію деформування, яку знаходимо

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_02.pdf

наближено за допомогою відомого підходу Леонова-Панасюка-Дагдейла. Швидкість росту тріщини можна представити усереднено як відношення довжини її стрибка Δl до часу інкубаційного періоду ΔN. На основі цього і рівняння балансу швидкостей зміни енергій отримуємо диференціальне рівняння для визначення швидкості росту тріщини від початкового до її критичного розміру в елементі конструкції за довготривалого циклічного навантаження. Це рівняння разом з відповідними початковою і кінцевою умовами становить математичну модель для визначення періоду докритичного росту втомної тріщини (залишкової довговічності):

$$\frac{dl}{dN}=\frac{\alpha\left[(\delta_{\mathrm{I}t\max}-\delta_{\mathrm{I}t\min})^2-(\delta_{\mathrm{I}th\max}-\delta_{\mathrm{I}th\min})^2\right]}{\delta_{\mathrm{I}fC}-\delta_{\mathrm{I}t\min}} \tag{1}$$

$$N=0\,,\ l(0)=l_{\mathrm{I}0}\ ;\quad N=N_*\,,\ l(N_*)=l_{\mathrm{I}*}\,. \tag{2}$$

Тут α – експериментально встановлена константа; N – кількість циклів навантаження; $\delta_{\mathrm{I}t\max}$, $\delta_{\mathrm{I}t\min}$ – максимальне і мінімальне протягом періоду циклу розкриття у вершині тріщини $\delta_{\mathrm{I}t}$; $\delta_{\mathrm{I}th\max}$, $\delta_{\mathrm{I}th\min}$ – нижні порогові значення $\delta_{\mathrm{I}t\max}$, $\delta_{\mathrm{I}t\min}$, за яких не відбувається руйнування нормального відриву; $l_{\mathrm{I}0}$, $l_{\mathrm{I}*}$ – початкова і критична довжина тріщини; N_* – період докритичного росту тріщини.

Модель (1), (2) побудована в деформаційних параметрах – розкриття у вершині тріщини, а тому вона є коректною для дослідження як коротких, так і довгих втомних тріщин. Запропоновано формулу для визначення розкриття у вершині тріщини, яка враховує відносний рівень навантаження. На основі математичної моделі і формули визначено період докритичного росту (залишкову довговічність) втомної тріщини в елементі конструкції. Побудовано розрахункові моделі в деформаційних параметрах розкриття тріщини для визначення періоду докритичного росту тріщин в елементах конструкцій за дії різних силових параметрів, а також агресивних середовищ з урахуванням деградації їх матеріалів.

1. *Main B., Jones M., Barter S.* The practical need for short fatigue crack growth rate models // International Journal of Fatigue. – 2021. – **142**. – P. 105980.
2. *Андрейків О.Є., Скальський В.Р., Долінська І.Я.* Заповільнене руйнування матеріалів за локальної повзучості. – Львів: ЛНУ Франка, 2017. –400 с.

METHODS OF INVESTIGATING THE KINETICS OF FATIGUE SHORT CRACKS AND DETERMINING THE PERIOD OF THEIR SUBCRITICAL GROWTH

Using the energy approach, mathematical models were developed to determine the period of subcritical growth of short fatigue cracks in the deformation parameters. A formula for the approximate determination of deformation parameters in bodies with cracks is constructed.

УДК 539. 434

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ДЕГРАДУЮЧОГО ЗА ТЕРМОЦИКЛІЧНОЇ ДІЇ ГАЗОВОГО ПОТОКУ ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ

Костянтин Буйських, Євгеній Задворний, Леонід Кравчук, Микола Феофентов

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

bkp@ipp.kiev.ua, eaz@bigmir.net, lvk@ipp.kiev.ua

Питання розвитку та вдосконалення методів визначення напружено-деформованого стану (НДС) елементів конструкцій і його залежності від умов експлуатації та ступеня деградації матеріалу, розробки методів аналізу кінетики пошкодження матеріалів в процесі експлуатації, впровадження ремонтних технологій з урахуванням зазначених чинників для подовження ресурсу залишаються особливо актуальними.

Результати досліджень щодо умов експлуатації газотурбінних двигунів (ГТД) та впливу різних чинників на НДС їх елементів показують, що в найбільш складних умовах перебувають деталі проточної частини турбіни, які зазнають значного впливу нестаціонарних температур, а відповідно термічних напружень. Дослідження деградації поверхневого шару матеріалу найбільш навантажених елементів конструкцій ГТД при термоциклічному навантаженні [1–3] показали суттєві зміни структури й елементного складу матеріалу цього деградованого шару, що свідчить про необхідність їх урахування під час розрахунків теплового та напружено-деформованого стану (ТНДС) високотемпературних елементів конструкцій газотурбінних двигунів.

Чисельне моделювання впливу деградуючого поверхневого шару на високонавантажені елементи ГТД ґрунтується на результатах термовтомних випробувань клиновидних зразків, які моделюють стан матеріалу кромки лопатки за реальних експлуатаційних умов. Розрахункова оцінка ТНДС ґрунтувалася на експериментальних даних про кінетику теплового стану моделей лопаток ГТД та металографічних дослідженнях кінетики структурного стану матеріалу, що забезпечило можливість проведення масштабних розрахунків з урахуванням значущості впливу деградованих шарів.

Усі розрахунки виконували з використанням методу скінченних елементів для нестаціонарних режимів теплового навантаження клиновидних зраз-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_04.pdf

ків різної геометрії. Деградований шар моделювали двома шарами – зовнішнім оксидним та внутрішнім проміжним шаром. Відповідно до відпрацьованої раніше методики за модельний матеріал проміжного шару обрано сплав ХН60ВТ, який за хімічним складом наближений до складу проміжного шару. Розглядали варіанти оксидного шару з властивостями, що відповідають оксидам NiO, Al_2O_3 та Cr_2O_3, а також їх суміші NiO (63%) + Al_2O_3 (22%) + Cr_2O_3 (15%). Вміст кожного із компонентів розраховували відповідно до результатів аналізу елементного складу в деградованих шарах.

Отримані числові результати свідчать про суттєвий вплив деградованого шару, його фізико-механічних характеристик та температурних режимів утворення на НДС основного матеріалу елементів конструкцій. Результати розрахунків моделей з різним співвідношенням товщини зовнішнього оксидного та внутрішнього шарів показали, що наявність або товщина внутрішнього шару майже не впливає на напружений стан моделі з деградованим шаром. Дослідження реальних параметрів зовнішнього оксидного шару має значний вплив на достовірність оцінки стану елементів газотурбінних двигунів, визначення їх реальної довговічності і ресурсу.

1. *Bensch M., Sato A., Warnken N., Affeldt E., Reed R.C., Glatzel U.* Modelling of high temperature oxidation of alumina-forming single-cristal nickel-base superalloys // Acta Materialia. – 2012. – **60**, No. 15. – P. 5468–5480.
2. *Buiskikh K.P., Kiselevskaya S.G., Kravchuk L.V., Zadvornyi E.A., Feofentov N.N.* Kinetics and mechanisms of degradation of the surface layers of gas-turbine engine structural components under cyclic thermal loading during initiation and propagation of thermal fatigue crack // Strength of Materials. – 2016. – **48**, No. 6. – P. 64–72.
3. *Кравчук Л.В., Буйських К.П., Киселевська С.Г., Задворний Є.О., Лебедин А.Ю.* Дослідження пошкодження поверхневого шару елементів конструкцій ГТД при термоциклічному навантаженні до і після появи тріщин термічної втоми // IV Міжнародна науково-технічна конференція "Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування та прогнозування" та XIV Польсько-українсько-німецька літня школа з механіки руйнування, Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 21-24 вересня 2015. – С. 202–204.

NUMERICAL SIMULATION OF THE INFLUENCE ON THE STRESS-STRAIN STATE OF STRUCTURAL ELEMENTS OF THE SURFACE LAYER DEGRADING DURING THE THERMOCYCLIC ACTION OF A GAS FLOW

Using the methods of physical and mathematical modeling, the effect of non-stationary thermocyclic loading and degradation of the surface layer of the material on the stress-strain state of structural elements is shown. The influence of the process of changing the structure and properties of the material, its thermal and stress-strain state on determining the possibility of safely extending the service life of equipment and ensuring the economy and reliability of new energy systems is studied.

УДК 539.3: 536.21

ОЦІНКА ЕКСПЛУАТАЦІЙНОГО РЕСУРСУ БАРАБАНА КОТЛОАГРЕГАТА ЕНЕРГОБЛОКУ ТЕС, ПОШКОДЖЕНОГО ПРИ ЙОГО ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Богдан Дробенко, Степан Будз

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

drobenko@ukr.net

Барабан котлоагрегату енергоблоку ТЕС, як джерело теплової енергії, продукує пару високої температури і є одним із головних елементів енергоблоку ТЕС (див. рис. 1). Барабан працює за умов високого тиску, підвищеної температури, повторно змінних циклічних навантажень, впливу корозійно-активного середовища, водно-парової суміші.

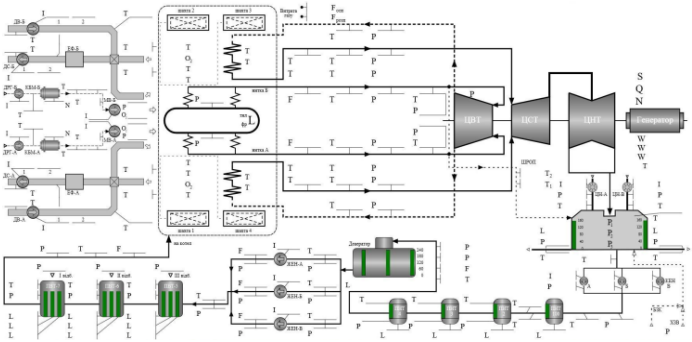


Рис. 1 Принципова схема енергоблоку

Оцінку залишкового ресурсу барабана виконують шляхом визначення його стану за рівнем накопиченої пошкоджуваності металу. Під час обчислення накопиченої пошкоджуваності барабана розглядають різні режими його промислової експлуатації. В даному випадку це стаціонарний режим з повільним коливанням температури робочого середовища навколо температури експлуатації (т.зв. термоциклування); режим планових пусків-зупинок; гідравлічних випробувань та аварійних зупинок.

Точність оцінки залишкового ресурсу барабана істотно залежить від достовірних даних щодо максимальних напружень в металі барабана за різних режимів його експлуатації.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_05.pdf

Для оцінювання складного об'ємного напружено-деформованого стану барабану і залишкового експлуатаційного ресурсу загалом будуємо методику комп'ютерного моделювання процесів деформування барабана за різних режимів його експлуатації з використанням методу скінченних елементів [1] . Для кожного із вищезгаданих режимів роботи барабана проводимо оцінку його напружено-деформованого стану, отримуємо амплітуду зміни напружень $\sigma_a = 0,5\left|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\right|$ у кожній точці барабана і в кожен момент часу зі співвідношення [2]

$$\sigma_a = \frac{aE_T}{n(4N)^{m_1}} + \frac{b}{n(4N)^{m_2} + \dfrac{1+r}{1-r}}, \qquad (1)$$

визначаємо максимально допустиму кількість циклів N з максимальною амплітудою σ_a зміни напружень в барабані протягом циклу розглядуваного режиму роботи. Тут $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ – коефіцієнт асиметрії навантаження; $\sigma_{\min}$ та $\sigma_{\max}$ – відповідно мінімальні і максимальні напруження розглядуваного циклу навантаження; E_T – модуль пружності за температури розглядуваного режиму експлуатації барабана; n – коефіцієнт запасу; m_1, m_2, a і b – характеристики матеріалу, які визначаються через межу тимчасового опору руйнуванню металу σ_B^T та відносне звуження металу Ψ_T при температурі експлуатації.

Сумарну величину накопиченої пошкоджуваності металу барабана визначаємо за співвідношенням

$$A = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N_i},$$

де n_i – фактична кількість циклів i – го режиму роботи барабана за весь час експлуатації; N_i – допустима кількість циклів для i – го режиму, отримана з рівняння (1) відповідно до обчисленої амплітуди максимальних напружень σ_a; k – кількість нестаціонарних режимів експлуатації.

1. *Дробенко Б.Д., Будз С.Ф.* Оцінка міцності та експлуатаційного ресурсу елементів енергообладнання з урахуванням деградації матеріалу, пошкоджень та технології ремонту. – Львів: Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021. – 368 с.
2. Порядок продовження терміну експлуатації барабанів котлів високого тиску. Інструкція СОУ 40.1-21677681-02:2009.

ASSESSMENT OF THE OPERATIONAL RESOURCE OF THE DRUM OF THE BOILER UNIT OF THE TPP POWER UNIT DAMAGED DURING ITS OPERATION

A methodology to estimate the service life of the drum of the boiler unit of a power plant with operational damages is considered. It was developed based on three-dimensional thermoelastic plasticity and the finite element method.

УДК 539.3

ДО ВПЛИВУ ШОРСТКОСТІ НА МІЦНІСТЬ ПРУЖНИХ ПЛІВОК

Костянтин Червінка, Тарас Нагірний

Львівський національний університет імені Івана Франка,
University of Zielona Góra (Poland)

kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua, t.nahirny@iim.uz.zgora.pl

Морфологія поверхні суттєво впливає на експлуатаційні властивості елементів конструкцій та приладів. З нею пов'язують зокрема трибологічні властивості та виникнення і поширення тріщин. Додаткова обробка поверхні, яка підвищує її чистоту, є відомим способом покращення механічних властивостей тіл в інженерній практиці. До математичних моделей, які за континуального підходу враховують приповерхневу неоднорідність густини матеріалу під час опису зв'язаних процесів (шорсткість реальної поверхні тіла), належать моделі, побудовані у термомеханіці локально неоднорідного твердого тіла [1]. За цього підходу густину матеріалу ρ розглядають як базовий параметр стану, для якого справджується рівняння

$$\nabla^2\rho - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m},$$

де ξ – параметр, який характеризує структуру матеріалу тіла, $d_{\sigma m}$ – функція, що враховує спосіб формування поверхні, ρ_* – густина матеріалу у від-ліковому стані.

Зазвичай дослідження проводили для експоненційної функції $d_{\sigma m}$. Для більш точного опису закономірностей приповерхневої неоднорідності необхідно ускладнити вигляд цієї функції. З цією метою доцільно використати поняття кривої опорної поверхні (крива Аббота-Файрстоуна), котру часто використовують у трибології. Ця крива визначає відсоткову частину простору, зайняту матеріалом, на висоті біжучого профілю реальної поверхні (рис. 1), а її параметри описано в стандартах ISO та ASME. Зазначимо, що узагальненню функції $d_{\sigma m}$ присвячена робота [2].

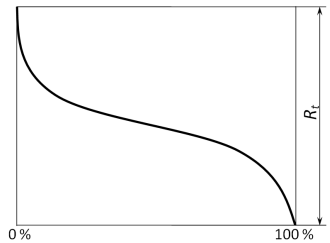


Рис. 1

Надалі вважатимемо, що на зовнішніх поверхнях розглядуваного шару (область $x \le l$) значення густини матеріалу дорівнює нулю, а для функції $d_{\sigma m}$ приймаємо

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_06.pdf

$$d_{\sigma m} = -\rho_* \{\exp[-(\zeta(x+l))^2] + \exp[-(\zeta(l-x))^2]\},$$

де ζ, k – сталі, що дозволяють узгодити розподіл густини матеріалу у приповерхневій області шару з кривою Аббота-Файрстоуна.

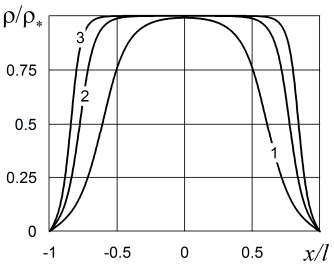


Рис. 2

Розподіл густини ρ/ρ_* у шарі для $k=6$, $\xi l = 8,14,20$ (криві 1-3), $\varsigma/\xi = 0.3$ показано на рис. 2. У вузькій приповерхневій області видно закономірності, притаманні області піків профілю кривої Аббота-Файрстоуна.

Для критерію першої теорії міцності, на основі розв'язку крайової задачі, отримано вираз для значення розтягувального силового навантаження σ_c, що спричиняє крихке руйнування шару

$$\sigma_c = \sigma_+ - \sigma_0 \left(\frac{\operatorname{th}\xi l}{\xi l} - \frac{1}{\rho_* l} \int_0^l d_{\sigma m}(t) \left[\operatorname{ch}\xi(t-l) + \operatorname{th}\xi l \operatorname{sh}\xi(t-l) - 1 \right] dt \right).$$

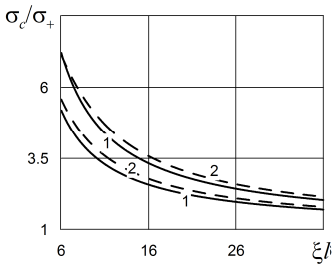


Рис. 3

Тут σ_+ – інтенсивність навантаження, що призводить до руйнування товстого шару, σ_0 – стала.

Проведено дослідження впливу параметрів, які характеризують приповерхневу неоднорідність густини матеріалу на σ_c і розмірний ефект міцності шару. Результати числового дослідження залежності σ_c/σ_+ від параметра ξl для $\sigma_c/\sigma_+ = 8$, $\varsigma/\xi = 0.2, 0.3$ (суцільна та штрихова лінії), $k = 6,1$ (криві 1, 2) показано на рис. 3.

1. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.
2. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Приповерхнева неоднорідність густини та шорсткість поверхні у моделі локально неоднорідного пружного тіла. В: *Мартиняк Р.* (ред.). Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь. – Львів, 2022. – С. 354–369.

ON THE EFFECT OF ROUGHNESS ON THE STRENGTH OF ELASTIC FILMS

The strength of the locally inhomogeneous elastic layer and its size effect were investigated for the distribution of material density in the near-surface region consistent with the Abbott-Firestone curve.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ БАЛКИ–СМУГИ З КРАЙОВОЮ ТРІЩИНОЮ

**Володимир Шваб'юк, Віктор Захарчук,
Роман Казмірчук, Дмитро Ткачук**

Луцький національний технічний університет

v.shvabyuk@gmail.com, viktor_zakharchuklntu@gmail.com

Розглянуто згин ортотропної балки–смуги довжини $2L$ за розподіленого навантаження q, яку послаблено короткою крайовою тріщиною довжини l у розтягнутій зоні. Потрібно знайти граничне значення q^* розподіленого навантаження для балки та його залежність від характеристик ортотропії. Для розрахунку використано уточнену модель згину коротких ортотропних балок–смуг [3] та силовий критерій руйнування Дж. Ірвіна [1, 2]. Згідно з такою моделлю, нормальне напруження σ_x у шарнірно закріпленій на краях $x=\pm L$ балці описується співвідношенням [3]:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z + \frac{z}{I}\left(\frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{5}\right)\left(\alpha^2 q - \varepsilon_2 h^2 \frac{5}{4}\frac{E_x}{E'} q''\right).$$

Тут $\varepsilon_1 = 0{,}1(8\alpha^2 + 5\nu'')$, $\varepsilon_2 = 0.2(1-\nu'' G'/E_x)$, $\alpha^2 = E_x/2G' - \nu''$, $M_x = t\int\limits_{-h}^{h} z\sigma_x\, dz =$ $= -E_x I\, w'' - \varepsilon_1 h^2 q$ – згинальний момент; $I = 2th^3/3$ – момент інерції прямокутного поперечного перерізу балки розмірами $2h\times t$, E_x, E', G', ν'' – модулі Юнга, модуль зсуву і Пуассонів коефіцієнт матеріалу балки відповідно у напрямках осей Ox і Oz.

Для балки прямокутного перерізу максимальне значення зведеного максимального напруження $\sigma_x(\pm h)$ описується залежністю:

$$\bar{\sigma}_x^{max} = \frac{\sigma_x}{\tilde{q}} = \pm\left(\frac{3}{4}\frac{l^2}{h^2} + \frac{1}{5}\alpha^2\right) = \frac{3}{4}\frac{l^2}{h^2} k_\sigma,\ \ k_\sigma = 1 + \frac{4\alpha^2}{15}\frac{h^2}{l^2},\ \ \tilde{q} = q/t. \tag{1}$$

Для коротких тріщин ($l \ll h, t$) з використанням розв'язків [1, 2] задача визначення граничного навантаження $q^* = \tilde{q}$ зводиться до розв'язання рівняння, отриманого зі силового критерію Дж. Ірвіна [1, 2]:

$$K_I^* = K_{IC}, \quad \text{або} \quad \sigma_x^*(q^*, h)\sqrt{\pi l}\, Y(l/2h) = K_{IC}, \tag{2}$$

де K_{IC} – критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень (в'язкість

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_07.pdf

руйнування) – стала матеріалу; $\sigma_x^*(q^*,h)$ – нормальне напруження у волокні бруса $(x=0,\ z=h)$, через яке проходить тріщина; $Y(l/2h)$ – функція форми та розмірів об'єкта.

У першому наближенні [1, 2] приймаємо $Y(l/2h)=1.12$. Тоді з використанням (1), (2) визначаємо граничне значення $q_{K_C}^*$ розподіленого навантаження для балки, послабленої тріщиною $q_{K_C}^* = 4h^2K_{IC}/(3.26L^2k_\sigma\sqrt{\pi l})$.

Для перевірки достовірності отриманих аналітично результатів Я.М. Пастернаком методом скінченних елементів розв'язано задачу для ізотропної смуги з одночасним підбором функції форми та розмірів об'єкта у вигляді кубічної параболи:

$$Y(\varsigma)=1.102-0.645\varsigma+0.909\varsigma^2+3.859\varsigma^3\ ,\ \varsigma=l/2h. \qquad (3)$$

Для $\varsigma\le 0.2$ відмінність між значеннями $Y(\varsigma)$ з формул (3) та 1.12 знаходиться в межах $4\%\div 5\%$. Для відношень $\varsigma=0.4\div 0.5$ величина $Y(\varsigma)=1.2\div 1.5$, тобто значно перевищує значення 1.12. Знайдено величини граничного навантаження $q_{K_C}^*$ для ізотропного матеріалу – сталі СТ3 ($\alpha^2=1$) з в'язкістю руйнування $K_{IC}=22$ МПа$\sqrt{\text{м}}$ і композитного склопластику 27-63С ($\alpha^2=4$) з $K_{IC}=27{,}1$ МПа$\sqrt{\text{м}}$. Обчислення виконано для тріщини завдовжки $l=1$ см при $L=1$ *м*, $L/h=3;5$. Величину $q_{K_C}^*$ пораховано також і для $l=0$ (відсутності тріщини). Аналіз отриманих результатів показує, що граничні навантаження $q_{K_C}^*$ для ізотропної балки–смуги з тріщиною приблизно удвічі, а для ортотропної – у 3.5 рази менші своїх аналогів для балок без тріщин.

1. *Механика* разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4-х т. / Под общей ред. Панасюка В.В. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т. 1: Основы механики разрушения / *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* – 1988. – 488 с.; Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – 1988. – 620 с.
2. *Справочник* по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.
3. *Шваб'юк В.І., Ротко С.В., Шваб'юк В.В.* Математичні моделі деформування композитних плит і балок: контактна взаємодія із штампами та основами. Вплив тріщин: Монографія. Луцьк: Вежа-Друк, 2022. – 804 с.

DETERMINTION OF THE CRITICAL LOAD FOR AN ORTHOTROPIC BEAM–STRIP WITH AN EDGE CRACK

The bending of an orthotropic beam–strip, which is weakened by a short edge crack in the stretched zone, is considered under a distributed load. The refined bending model of short orthotropic beams–strips and a strength fracture criterion were used for the construction a solution to the considered problem.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ ПІД ДІЄЮ НАДЛИШКОВОГО ТИСКУ ТА ПОРІВНЯННЯ З РЕЗУЛЬТАТАМИ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Дмитро Акімов, Дмитро Клименко

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

akimoff2017@gmail.com, klymenko_dv@hotmail.com

Під час проектування конструкцій космічної техніки виникають задачі проектування багатошарових елементів з композитних матеріалів, здатних витримувати наперед заданий рівень навантажень.

У цій роботі розглянуто двошарову конструкцію зі склопластику та композитного матеріалу типу теплоізоляційної плити під дією заданого навантаження. Розрахунки виконано методом скінченних елементів на основі MSC.NASTRAN [1] та інженерних методик [2]. Дослідження показали недостатню міцність конструкції. За результатами розрахунків розроблено рекомендації стосовно доробки конструкції додаванням третього армуючого шару з пакувального паперу. Побудовано скінченно-елементну модель конструкції, навантаженої змінним надлишковим тиском P та закріпленої вздовж її периметру. Розрахунки НДС проводили з урахуванням геометричної нелінійності (тип аналізу Nonlinear Static). Під час скінченно-елементного моделювання багатошарової конструкції враховано рекомендації [1, 3] та використано оболонкові елементи типу LAMINATE PLATE і PLATE. За аналізом результатів параметрів НДС визначено необхідну для забезпечення міцності конструкції кількість шарів. Отримані числові результати розрахунків добре узгоджені з експериментальними даними. На підставі отриманих результатів визначено величину руйнівного навантаження конструкцій без доробки та з доробками.

1. *Рычков С.П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
2. *Лизин В.Т, Пяткин В.А.* Проектирование тонкостенных конструкций. Москва: Машиностроение, 1976. – 408 с.
3. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. Москва: ДМК Пресс, 2003. – 448 с.

DETERMINATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A MULTI-LAYER STRUCTURE UNDER THE ACTION OF EXCESSIVE PRESSURE AND COMPARISON WITH EXPERIMENTAL RESULTS

Using the finite element method, a two-layer structure is analyzed regarding its durability. Based on the analysis of the results, the number of layers required to ensure the strength of the structure was determined.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me06_01.pdf

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

УДК 519.62

АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДРОБОВОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ ДИСПЕРСІЇ

Віктор Вербіцький, Вікторія Крачилова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

v.verbitskyi@onu.edu.ua, victoria.krachilova@stud.onu.edu.ua

Дробове рівняння адвекції дисперсії стаціонарного стану має вигляд:

$$-Da(pD_{0,x}^{-\beta}+qD_{x,1}^{-\beta})Du+b(x)Du+c(x)u=f, \qquad (1)$$

де D – просторова похідна, $D_{0,x}^{-\beta}$, $D_{x,1}^{-\beta}$ – лівосторонній та правосторонній дробовий інтеграл [1], відповідно, порядку $0\le\beta<1$, $0\le p,q\le 1$ та $p+q=1$.

Для крайової задачі рівняння (1) розглянуто скінченно-елементну апроксимацію з використанням лінійних неперервних сплайнів [2 – 4]. Побудовано апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку за технікою усереднення [5].

1. *Podlubny I.* Fractional differential equations. – San Diego: Academic Press, 1999. – 366 p.
2. *Ervin V.J., Roop J.P.* Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2005. – **22**, No. 3. – P. 558–578.
3. *Li Ch., Zeng F.* Numerical methods for fractional calculus. – CRC Press, 2015. – 294 p.
4. *Szabó B., Babuška I.* Finite element analysis. Method, verification and validation. 2nd Ed. – John Wiley & Sons, Inc., 2021. – 387 p.
5. *Carstensen C., Bartels S.* Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I. Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM // Math. Comp. – 2002. – **71**, No. 239. – P. 945–969.

A POSTERIORI ESTIMATOR OF THE FINITE ELEMENT APPROXIMATION OF THE FRACTIONAL ADVECTION DISPERSION EQUATION

Using the averaging technique, an a posteriori estimator was constructed for a finite element approximation of the boundary value problem of the steady state fractional advection dispersion equation.

УДК 519.836

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ГЕОПОЛІТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Петро Жук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

cipt@litech.net

Події у світі відбуваються відповідно до об'єктивних закономірностей розвитку суспільних систем, що відображають їх вдосконалення, накопичення суперечностей та усунення цих суперечностей. Результати подій в окремих країнах залежать від їх місця в геополітичних поцесах. Динаміку цих процесів можна описати математикними моделями зміни стану суспільних систем і світу загалом відповідно до дії чинників процесів й обставин їх перебігу. Розрізняють чотири основні геополітичні процеси.

1. Процес глобалізаційно-локалізаційного переходу. Зміст процесу – це перехід від переваги глобальних впливів на суспільні спільноти та події суспільного життя до переваги локальних впливів. Динаміку процесу можна описати через зміну стану базових геополітичних об'єктів, якими є країни, а в узагальненому описі – групи країн. Основний параметр стану – поточний рівень загального соціального розвитку країни. Зміна стану спричинює внутрішній потік суспільної енергії та ресурсів і відповідний зовнішній потік. Частини цих потоків йдуть на розвиток, дисипацію, а внутрішнього – на зовнішні дії. Рівняння стану для країни чи групи країн, як зміну стану вгаслідок різниці між потоками розвитку і потоками дисипації, можна подати у вигляді диференціального рівняння з поліномами четвертого степеня, коефіцієнти яких визначаються характеристиками країни, що задають сприй-няття нею потоків і реагування на дисипацію, а також середньосвітовим рівнем розвитку та загальним параметром стимуляції розвитку. Параметром глобалізації є однакова для всіх частина інтенсивності зовнішнього потоку, що визначається з варіаційної задачі максимізації середнього рівня розвитку.

2. Процес боротьби між геополітичними блоками. Основний зміст процесу – зміна можливостей впливу основних учасників блоків та блоків загалом на події, що відбуваються в світі, відповідно до їхніх інтересів, що протилежні для різних блоків. Відбувається внаслідок цілеспрямованих дій аж до відмови одного з блоків від своїх інтересів. Параметрами, що задають процес, є величина зони переважного впливу блоку та потенціал цілеспрямованих дій, що накопичується з швидкістю, пропорційною до загального стану, і витрачається на дії, які ведуть до розширення й освоєння території впливу, а

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_33.pdf

також на пряме ослаблення і нейтралізацію дій протилежного блоку та дії на підтримання стану. Модель описується рівняннями зміни параметрів вгаслідок дій блоків.

3. Процес переходу основної частини працюючого населення від матеріального виробництва та його обслуговування до інтелектуального виробництва. Підставами процесу є великий ріст продуктивності матеріального виробництва та більша обмеженість можливостей матеріального споживання, ніж інтелектуального. Але зворотний перехід стимулює більша необхідність матеріального споживання. Сповільнює процес страх суспільства від можливості матеріальної недостачі, а також бажання матеріальних виробників зберігати контроль над світом. Засобом сповільнення є втягнення населення в непотрібні дії матеріального виробництва та його обслуговування. Параметри процесу – частки працездатного населення, зайняті в матеріальному z_{m} та інтелектуальному z_{i} виробництві. Продуктивність матеріального виробництва v_{m}, матеріального споживання – s_{m}. Інтелектуальне виробництво збільшує матеріальну продуктивність. Базовим співвідношенням є баланс виробництва і споживання: $v_{\mathrm{m}} z_{\mathrm{m}} = s_{\mathrm{m}}(z_{\mathrm{m}} + z_{\mathrm{i}} + z_{\mathrm{e}})$, де z_{e} – непрацююча частина населення. Після диференціювання рівняння балансу виробництва з урахуванням балансу населення одержуємо систему рівнянь відносно змінних z_{m}, z_{i}, коефіцієнти якої є комбінаціями кофіцієнтів співвідношень, що відображають закономірності змін зайнятості.

4. Процес формування світу національних держав. Зміст процесу: розпад імперій, об'єднання роз'єднаних частин національних територій, переформування штучно створених держав у національні, об'єднання протонаціональних спільнот в нації. Параметр процесу – частка в світі національних держав з врахуванням рівня відповідності реальних держав критерію національних держав. Чинники процесу: дозрівання націй до державності, поширення ідеології національних держав, деградація імперій, потреби та можливості інтелектуального розвитку та різноманітності. Стримуючі чинники: спротив старих структур, культурна асиміляція та деградація, колаборанство еліт, опір метрополій і денаціоналізованого населення. Процес відбувається внаслідок природного зростання діючих чинників при незмінності стримуючих. Характеристики змін чинників різні для різних геополітичних регіонів. Модель процесу для геополітичного регіону задається диференціальним рівнянням зміни параметра процесу внаслідок дії його чинників.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF GEOPOLITICAL PROCESSES

A mathematical description of four main current geopolitical processes is proposed: the globalization-localization transition; struggle between geopolitical blocks; transition of the main part of the working population from material production and its maintenance to intelectual production; the formation of the world of nation states. The theory of purposeful systems is demonstrated.

УДК 621.396

МОДЕЛЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПРОМІНЮВАННЯ СЕРЕДОВИЩ З НЕРІВНОМІРНО РОЗМІЩЕНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ МАЛОГО РОЗМІРУ

Михайло Андрійчук, Борис Євстигнеєв

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

andr@iapmm.lviv.ua, molnerats@gmail.com

Асимптотичний метод є одним із ефективних підходів при розв'язуванні задач розсіювання на сукупності малих тіл, оскільки він усуває сингулярну частину оператора інтегрального рівняння і дає можливість отримати добре обумовлену систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Це пояснюється тим, що сингулярний член у введеному асимптотичному (ефективному) полі можна опустити, в результаті чого отримуємо інтегральне рівняння другого роду з неособливим ядром; при цьому відповідна СЛАР має скінченну розмірність. У цій доповіді узагальнено запропонований в [1] підхід для випадку одного тіла з імпедансними граничними умовами на випадок багатьох тіл.

Поверхневий імпеданс малих частинок задається формулою

$$\xi_m(x_m) = h(x_m)/a^{\nu}, \tag{1}$$

де $x_m \in D_m$ – фіксована точка на поверхні m-ої частинки, а функція $h(x_m)$ є неперервною і дорівнює нулю поза D_m. Таке подання поверхневого імпедансу є фізично обґрунтованим, оскільки його абсолютна величина може бути довільно великою і виконується умова $\mathrm{Re}(h(x_m)) \geq 0$; $\nu \in (0,1]$ – число, яке дозволяє змінювати значення ξ_m у певному діапазоні. Параметр a визначає радіус або максимальний характерний розмір частинок, тобто

$$a = 0.5 \max_{1\leq m\leq M} (\mathrm{diam} D_m). \tag{2}$$

Малість підобласті D_m розуміється в сенсі $ka \ll 1$, k – хвильове число.

Ми припускаємо, що крайові умови на поверхні S_m частинки D_m мають вигляд

$$\mathbf{E}_t = -\xi_m(\mathbf{H}_t \times \mathbf{N}), \tag{3}$$

де «$\times$» позначає векторний добуток двох векторів.

Задача розсіювання ЕМ хвиль зводиться до визначення векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$, які задовольняють систему рівнянь Максвелла

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_34.pdf

$$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H},\ \nabla\times\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon_0\mathbf{E} \tag{4}$$

в області $D=\mathrm{R}^3\setminus\bigcup_{m=1}^{M}D_m$.

Подамо вектори ЕМ поля як

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_{sc},\ \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_{sc}, \tag{5}$$

де вектори $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ – падаючі поля, які задовольняють рівняння (4) у просторі $\mathrm{R}^3\setminus D$; $\mathbf{E}_{sc}$ і $\mathbf{H}_{sc}$ – розсіяні поля.

Вектор $\mathbf{E}(x)$ шукатимемо у формі

$$\mathbf{E}(x)=\mathbf{E}_0(x)+\sum_{m=1}^{M}\nabla\times\int_{S_m}\mathbf{U}_m(t)g(x,t)dt, \tag{6}$$

де $\mathbf{U}_m(t)\in T_m$, T_m – множина тангенціальних до S_m неперервних векторних полів, $t\in S_m$, dt – елемент площі поверхні S_m,

$$g(x,t)=\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tag{7}$$

– функція Ґріна простору.

Функція $\mathbf{U}_m(t)$ може бути подана в термінах шуканого вектора $\mathbf{E}(x)$, що дозволяє задачу визначення даного вектора звести до розв'язання відповідної СЛАР. Розвязання цієї системи відбувається аналогічно випадку рівномірного розміщення включень. Перевагою запропонованого підходу є те, що не потрібно розв'язувати системи інтегральних рівнянь для визначення значень поля на поверхні включень. Результати числового моделювання ілюструють ефективність запропонованого підходу.

1. *Ramm A.G., Andriychuk M.I.* Calculation of electromagnetic wave scattering by a small impedance particle of an arbitrary shape // Math. Model. Nat. Phenom. – 2014. – **9**, No. 5. – P. 254–269.

MODELING THE RADIATION CHARACTERISTICS OF MEDIA WITH THE NONREGULAR INCLUSIONS OF SMALL SIZE

The solution to the problem of electromagnetic wave scattering on a set of small-size impedance particles is derived by the asymptotic approach. Particles are located in a homogeneous domain with constant material parameters ε_0 and μ_0. The solution is derived under the condition $a\to 0$, where a is the characteristic size of the particle; further, the number $M(a)$ of particles tends to infinity at a specific rate. The procedure consists of derivation of the explicit form of a solution that excludes the necessity to solve the respective boundary integral equation for determination of the fields at the surface of particles and thus avoids integrating the Green function derivatives, which are in the kernel of this equation.

УДК 517.9:539.3

ПРО ДЕЯКІ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ СТЕФФЕНСЕНА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Михайло Бартіш, Наталія Огородник, Ольга Ковальчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

mykhailo.bartish@gmail.com, ogorodnyk.nataly@gmail.com, olyak2005@gmail.com

Нехай задано рівняння

$$\mathrm{F}(x) = 0, \tag{1}$$

де F – нелінійний оператор у просторі Банаха.

Для розв'язування рівняння (1) використаємо алгоритм

$$u_k = \Phi(x_k), \quad x_{k+1} = x_k - [F(x_k, u_k)]^{-1} F(x_k), \tag{2}$$

де $k = 0,1,\ldots$, $F(x,y)$ – поділена різниця першого порядку для $F(x)$, $\Phi(x)$ – оператор, який задовольняє умову

$$\| \Phi(x) - x_* \| \le K \| x - x_* \|^{\tau},$$

де $K > 0$, $\tau \in [1,2]$, x_* – розв'язок рівняння (1).

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) для $x, y \in X$: $\| F(x,y) \|^{-1} \le B$;

2) для $x, y, z \in X$: $\| F(x,y,z) \| \le M$;

3) початкове наближення x_0 *$ $ вибрано таким, що виконується умова*

$$q^{\tau} = BMK \| x_0 - x_* \|^{\tau} < 1.$$

Тоді алгоритм (2) є коректно визначеним і має місце оцінка:

$$\| x_k - x_* \| \le q^{(\tau+1)^k - 1} \| x_0 - x_* \| .$$

Цікавими є конкретні варіанти алгоритму (2).

Нехай $F(x) = x - \phi(x) = 0$ і виконується умова $\| \phi'(x) \| \le q < 1$. Розглянемо алгоритм

$$x_{k+1} = x_k - [F(x_k, \phi(x_k)]^{-1} F(x_k), \tag{3}$$

де $k = 0,1,\ldots$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

1) *для* $x, y \in X$: $\|F(x,y)^{-1}\| \le B$;

2) *для* $x, y, z \in X$: $\|F(x,y,z)\| \le M$;

3) *для* $x \in X$: $\|\phi'(x)\| \le q_1 < 1$;

4) *початкове наближення* x_0 *вибрано таким, що виконується умова*

$$q = BMq_1 \|x_0 - x_*\| < 1.$$

Тоді алгоритм (3) є коректно визначеним і має місце оцінка

$$\|x_k - x_*\| \le q^{2^k - 1} \|x_0 - x_*\| .$$

У порівнянні з класичним методом Стеффенсена

$$x_{k+1} = x_k - [F(x_k, x_k - \alpha_k F(x_k)]^{-1} F(x_k),$$

в (3) знаменник збіжності q є менший.

ON SOME MODIFICATIONS OF THE STEFFENSEN METHOD FOR SOLVING THE NONLINEAR OPERATOR'S EQUATION

Some methods for solving nonlinear operator's equations are presented. Theorems of convergence are formulated. The rate of convergence is defined. The presented methods use the divided differences method and the Steffensen method.

УДК 517.929

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ НА ОСНОВІ SIR МОДЕЛЕЙ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ігор Черевко, Тетяна Щур

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

i.cherevko@chnu.edu.ua, tetiana.lunyk@chnu.edu.ua

Періодичні спалахи інфекційних захворювань стимулювали активні наукові дослідження їх поширення. Важливим інструментом для розуміння механізмів поширення хвороб є математичне та імітаційне моделювання. Математичні моделі динаміки інфекційних захворювань детально проаналізовані в наукових дослідженнях [1 – 3]. Як правило, це компартментні SIR моделі: системи диференціальних рівнянь, що описують поширення захворювання в популяції розміру N, які мають три «компартменти». Кожен компартмент є функцією часу t: $S(t)$ – кількість сприйнятливих осіб, які ще не інфіковані хворобою, $I(t)$ – кількість інфікованих осіб, а $R(t)$ – кількість осіб, які одужали від захворювання та мають імунітет.

Вважаємо, що інкубаційний період вірусу хвороби $\tau_1 > 0$ (орієнтовно 3 дні), а період відновлення $\tau_2 > 0$ (орієнтовно 1 – 3 тижні). Інкубаційний період є часом від контакту до розвитку симптомів вірусу, а період відновлення – час від зараження до отримання повного імунітету та переміщення в групу осіб, які одужали.

Динаміку моделі такого процесу можна описати так [4]:

$$\frac{dS}{dt} = -bS(t-t_1)I(t-t_1),$$

$$\frac{dI}{dt} = bS(t-t_1)I(t-t_1) - gI(t-t_2) - aI(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = gI(t-t_2).$$

У роботі для автоматизації моделювання систем із запізненням розроблено прикладне програмне забезпечення. Для числового моделювання задач Коші для диференціальних рівнянь із запізненням використовуються наближені алгоритми, які є узагальненням різницевих схем для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь [5]. Розроблений додаток є набором структурованих сторінок для розв'язання диференціально-різницевих рівнянь

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_02.pdf

та побудови графіків розв'язків.

На рисунку наведено наближений розв’язок розглянутої SIR моделі із запізненнями за допомогою модифікованого ітераційного методу Ейлера [5] з початковими умовами $y_1(0)=5,\ y_2(0)=1,\ y_3(x)=0$ при $t\ge 0$ та параметрами $h=0.1, \tau_1=1, \tau_2=10.$

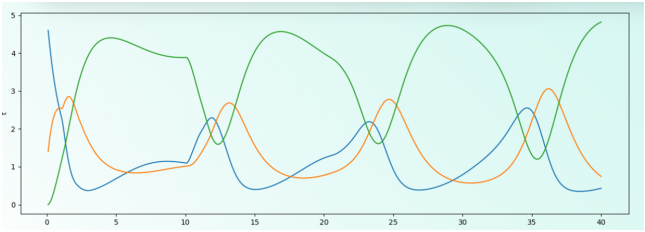


Рис. 1 Розв’язок SIR моделі

Із отриманих числових експериментів можемо зробити висновок, що періодичні спалахи інфекції (при інкубаційному періоді $\tau_1=1$) виникають, якщо імунітет втрачається за час $\tau_2\ge 7$. Епідемія стабілізується, якщо $\tau_2\le 6$.

Аналіз математичних моделей біології, екології, медицини показав, що введення в них запізнення дозволяє адекватно описувати реальні процеси. Для числового моделювання початкових задач із запізненням ефективними виявилися побудовані різницеві схеми, які є узагальненнями класичних різницевих схем. Числові експерименти дозволили при моделюванні SIR моделі із запізненням виявити можливі спалахи епідемії при достатньо великому інкубаційному періоді хвороби.

2. *Rihan F.A.* Delay differential equations and applications to biology. – Singapore: Springer, 2021. – 303 p.
3. *Bacaër N.* McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927) / In: A Short History of Mathematical Population Dynamics. – London: Springer, 2011. – P. 89–96.
4. *Blackwood J.C., Childs L.M.* An introduction to compartmental modeling for the budding infectious disease modeler // Letters in Biomathematics. – 2018. – No. 5. – P. 195–221.
5. *Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E.* Delayed dynamics of SIR model for COVID-19 // Open Journal of Modelling and Simulation. – 2021. – № 9. – P. 146–158.
6. *Луник Т.В., Черевко І.М.* Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням // Буковинський матем. журнал. – 2021. – **8**, № 2. – С. 92–98.

SIMULATION OF INFECTIOUS DISEASES SPREAD BASED ON SIR MODELS WITH DELAYS

The SIR model, which describes the dynamics of infectious disease COVID-19 spread, is considered. Algorithms for finding its approximate solution is proposed. An applied application for automating the simulation of infectious disease spread has been developed on this basis.

УДК 517.925

СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Світлана Іліка, Олександр Матвій, Лариса Піддубна, Ігор Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

s.ilika@chnu.edu.ua, o.matvij@chnu.edu.ua,
l.piddubna@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua

Математичними моделями багатьох фізичних і технічних процесів є диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння [1 – 2]. Отримати точний розв'язок таких рівнянь вдається тільки у найпростіших випадках, тому побудова їх наближених розв'язків має важливе значення. У цій роботі розглядаються схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь спеціальними системами звичайних диференціаль-них рівнянь, які виявилися ефективними для прикладних застосувань [3 – 4].

Розглянемо початкову задачу для рівняння із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t-\tau)), \quad x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, \tau > 0, t_0 \in \mathbb{R}, F(t,u,v)$ – неперервна функція.

Згідно з методикою [3 – 4] початковій задачі (1) поставимо у відповідність апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dt_0}{dt} = F(t, z_0, z_m), \quad \frac{dz_j}{dt} = \frac{m}{\tau}(t_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1,m}, \\ &z_j(t_0) = \varphi\left(t_0 - \frac{j\tau}{m}\right), j = \overline{0,m}. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема [3 – 5]. *Якщо розв'язок задачі (1) задовольняє умову Ліпшиця на* $[t_0 - \tau, T]$, *тоді* $\left|x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t)\right| \le \frac{K\tau}{\sqrt{m}}$, $t_0 \in [t_0, T]$, $K > 0$. *Якщо розв'язок* $x(t)$ *задачі (1) є неперервним на відрізку* $[t_0 - \tau, T]$, *тоді* $\left|x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t)\right| \le \beta\left(\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)\right), j = \overline{0,m}, t \in [t_0, T]$, *де* $\beta(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, $\omega(x, \tau/m)$ – *модуль неперервності функції* $x(t)$ *на* $[t_0 - \tau, T]$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_04.pdf

Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій здійснено у працях [5 – 7].

Побудова та обгрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботі І.М. Черевка та С.А. Іліки [8]. Вивчення зв'язків між диференціально-різницевими рівняннями і відповідними апроксимуючими системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання низки прикладних задач. У роботах [5 – 7] запропоновано схеми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь, а методика дослідження стійкості розв'язків таких рівнянь наведена в роботах [5, 9]. Конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями одержані в [10].

1. *Schiesser W.E.* Time delay ODE/PDE models. Applications in biomedical science and engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.
2. *Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M.* Functional differential equations: advances and applications. – John Wiley & Sons, 2016. – 368 p.
3. *Repin Y.M.* About approximation replacement system with delay by ordinary differential equations // APM. – 1965. – **29**, No. 2. – P. 226–245.
4. *Halanay A.* Approximations of delays by ordinary differential equations // Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155–197.
5. *Cherevko I.M., Piddubna L.A.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – **28**, No. 1. – P. 15–21.
6. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, No. 1. – С. 42–50.
7. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 2. – С. 208–216.
8. *Іліка С.А., Черевко І.М.* Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, №. 1. – С. 39–48.
9. *Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A.* Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability // 11th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15–17 September 2021. – P. 49–52.
10. *Tuzyk I., Cherevko I.* Algorithms for studying the stability of linear systems with delay // 12th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies (ACIT'2022, 26–28 September 2022, Slovakia). – P. 164–167.

SCHEMES OF APPROXIMATION OF DIFFERENTIAL FUNCTIONAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATION

The schemes of approximation of differential-difference equations by systems of ordinary differential equations are considered and the connections between their solutions are investigated. Numerical algorithms for studying the stability of linear systems with delay are constructed and their coefficient regions of stability are modeled.

УДК 531.39

СПОСТЕРІГАЧ ЛУЕНБЕРГЕРА ДЛЯ МОДЕЛІ ПРУЖНОЇ БАЛКИ У ГАМІЛЬТОНОВІЙ ФОРМІ

Юлія Калоша, Олександр Зуєв

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

julykucher@gmail.com, alexander.zuyev@gmail.com

Запропоновано схему побудови динамічного спостерігача для класу пружних осцилюючих систем. Спостерігач дозволяє оцінити стан системи, використовуючи обмежену інформацію виходу.

Розглядається модель пружної балки з розподіленими приводами керування, сенсорами та приєднаним твердим тілом. Припускається, що сенсори забезпечують вимірювання напружень в окремих точках балки. Математичну модель руху подано у вигляді лінійної динамічної системи в гамільтоновій формі

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad z \in H = \ell^2 \times \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^{k+1}, \tag{1}$$

$$y = Cz, \quad y \in \mathbb{R}^r, \quad k, r \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Тут $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ – вектор стану, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)^T \in \ell^2$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)^T \in \ell^2$, $u = (u_0, u_1, \ldots, u_k)^T$ – керування, $y = (y_1, \ldots, y_r)^T$ – вихід,

$$A : z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in D(A) \mapsto Az = \begin{pmatrix} \Omega\eta \\ -\Omega\xi \end{pmatrix} \in H,$$

де $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \ldots)$, ω_j^2 – модальні частоти коливань балки,

$$D(A) = \left\{ z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 (\xi_j^2 + \eta_j^2) < \infty \right\}.$$

Рівняння (1) можна вважати координатним зображенням моделі коливань пружної балки Ейлера – Бернуллі з приєднаним твердим тілом. Елементи

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_05.pdf

відображень $B : \mathbb{R}^{k+1} \to H$ та $C : H \to \mathbb{R}^r$ задаються через власні функції $W_j(x)$ коливань балки [1].

Спостерігач Луенбергера побудовано у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\overline{z}}(t) = (A - FC)\overline{z}(t) + Bu(t) + Fy(t), \tag{3}$$

таким чином, що для будь-яких початкових умов $z(0), \overline{z}(0) \in H$ та довільного допустимого керування $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{k+1}$, відповідні розв'язки $z(t)$ та $\overline{z}(t)$ системи (1) – (2) та рівняння (3) задовольняють умову

$$\| z(t) - \overline{z}(t) \| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Розглянуто рівняння на похибку спостережень $e(t) = z(t) - \overline{z}(t)$:

$$\dot{e}(t) = (A - FC)e(t). \tag{4}$$

Відображення F обрано з умови асимптотичної стійкості тривіального розв'язку системи (4):

$$F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, f, g : \mathbb{R}^r \to \ell^2,$$

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1r} \\ f_{21} & \cdots & f_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1r} \\ g_{21} & \cdots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

де

$$f_{js} = \gamma_s c_{sj}, \quad g_{js} = 0, \quad s = \overline{1, r}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

c_{sj} – коефіцієнти вихідного сигналу, $\gamma_s > 0$ – параметри підсилення спостерігача.

1. *Zuyev A., KaloshaJ.* A dynamic observer for a class of infinite-dimensional vibrating flexible structures // arXiv Preprint. – 2022. – doi:10.48550/arXiv.2211.01918.

LUENBERGER OBSERVER FOR A FLEXIBLE BEAM MODEL IN HAMILTONIAN FORM

A Luenberger-type observer is derived for a linear dynamical system with output. The considered system is obtained as an infinite-dimensional model of a flexible structure with rigid body. The state is measured by a finite number of distributed sensors. The proposed observer allows to asymptotically reconstruct the full state of the original system, operating by a limited output information.

УДК 539.21

СТРУКТУРА ТА ЕЛЕКТРОННІ ВЛАСТИВОСТІ НАНОКЛАСТЕРІВ ОКСИДУ ЦИНКУ $(ZnO)_n$, (n=96, 120), ЛЕГОВАНИХ РІЗНИМИ МЕТАЛАМИ

Ростислав Бовгира

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

bovhyra@gmail.com

Розраховано з перших принципів методом теорії функціонала електронної густини енергетичного спектру та параметрів основного стану нанокластерів $(ZnO)_n$ (n = 96, 120), легованих різними металами. Розрахунки виконано у базисі плоских хвиль з використанням ультрам'яких псевдопотенціалів на основі попередніх досліджень [1]. Для обчислення обмінно-кореляційної енергії використано функціонал у наближенні узагальненого градієнта із поправками Габбарда (GGA+U) в параметризації Пердью, Бурке, Ернценхофа (PBE). Оптимізація структури нанокластерів проводилась методом спряжених градієнтів, в процесі оптимізації структури не використовувалося обмеження симетрії.

Вплив легування металічними домішками на властивості визначався для найбільш стабільної структури нанокластерів – содаліт-подібних «магічних» нанокластерів $(ZnO)_{96}$ і $(ZnO)_{120}$. Під час розрахунків розглядалися дві конфігурації: а) легуючий атом металу M = Co, Cu, Ni заміщає атом Zn у структурі; б) легуючий атом металу M = Co, Cu, Ni заміщає атом O в структурі. Заміщення одного атома Zn або O одним атомом легуючого металу еквівалентно концентрації домішок 1,04 ат.% для нанокластера $(ZnO)_{96}$ і 0,83 ат.% для нанокластера $(ZnO)_{120}$. На рис. 1 наведено оптимізовані структури обох нанокластерних систем з легованими атомами.

Для визначення впливу легування на електронні та оптичні властивості оксиду цинку розраховано зміну зонної структури нанокластерів $(ZnO)_n$, (n = 96, 120) з домішками атомів Co, Cu, Ni. Встановлено, що для всіх легованих систем, фундаментальна ширина забороненої зони зменшується зі збільшенням концентрації легуючої домішки. У випадку наносистем, легованих кобальтом, виявлено, що леговані стани створюють енергетичний бар'єр всередині зони провідності (3,2–3,6 еВ), який може сприяти синьому зсуву енергетичної щілини. Для нанокластерів ZnO, легованих Cu, легування збільшило кількість основних носіїв заряду поблизу дна зони провідності.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_06.pdf

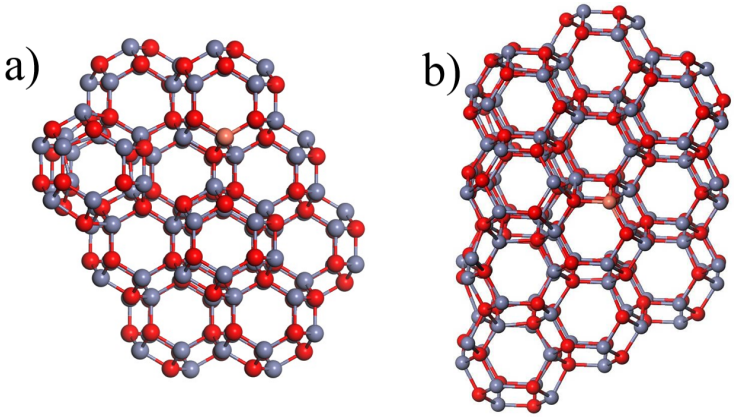


Рис. 1 Оптимізовані структури нанокластерів $(ZnO)_{96}$ (a) та $(ZnO)_{120}$ (b). Сірі кулі – атоми цинку, червоні –атоми кисню, світло-коричневі – атоми легуючої домішки

Нанокластери ZnO, леговані Ni, мають тенденцію до консолідації в областях вищої енергії, що може сприяти покращенню оптичних властивостей наноструктур ZnO. Усі легуючі атоми збільшують кількість основних носіїв заряду в системі, що може бути корисним для підвищення газочутливих властивостей наноструктур ZnO.

1. *Bovgyra R.V., Popovych D.I., Bovhyra O.V., Serednytski A.S.* Ab initio study of structural and electronic properties of $(ZnO)_n$“magical” nanoclusters, $n = (34, 60)$ // Nanoscale Research Letters. – 2017. – **12**. – A. 76.

STRUCTURE AND ELECTRONIC PROPERTIES OF ZINC OXIDE $(ZNO)_N$ (N= 96, 120) NANOCLUSTERS DOPED WITH DIFFERENT METALS

We investigated the structural and electronic properties of (ZnO)n (n = 96, 120) nanoclusters doped with different metals in various configurations using the density functional theory method. Structure geometry optimizations (relaxation) and band structure research were carried out. We discovered that the fundamental band gap decreases with increasing doping concentration in all doped systems. In the case of Co-doped nanosystems, we discovered that the doping states create an energy barrier inside the conduction band (3,2 to 3,6 eV), which can contribute to the energy gap's blue shift. Doping increased the number of conductive carriers near the bottom of the conduction band in Cu-doped ZnO nanoclusters. Ni-doped ZnO nanoclusters tend to congregate in higher energy regions, which can help to improve the optical properties of ZnO nanostructures. All of the doping atoms increase the number of charge carriers in the system, which can improve the ZnO nanostructure’s gas-sensing properties.

УДК 539.3

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ B-СПЛАЙНІВ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО ЗГИНУ ПЛАСТИНИ-СМУГИ, ПОДАТЛИВОЇ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

Михайло Марчук, Володимир Харченко, Микола Хом'як, Віра Пакош

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»,
Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»,
Львівський національний університет імені Івана Франка

mv_marchuk@ukr.net, volodymyrmx@gmail.com,
khomnick98@gmail.com, v.pakosh@ukr.net

Дослідження напружено-деформованого стану видовжених пластин-смуг в рамках теорії пружності, класичної чи багатьох варіантів уточнених теорій пластин широко висвітлено в літературі [6–8]. У працях [1, 3, 5] запропоновано варіант уточненої теорії мінімального порядку вирішальної системи рівнянь, що враховує трансверсальні деформації трансверсального зсуву та стиснення. У випадку постійного поперечного навантаження для умов шарнірного опирання на серединній (класичний варіант) або нижній лицьовій (некласичний варіант) поверхнях отримано аналітичні розв'язки для композитної пластини-смуги з приведеними фізико-механічними характеристиками [2, 3].

Пластина-смуга є зручним об'єктом для апробації як аналітичних, так і числових підходів завдяки простоті розв'язувальних співвідношень у прямокутній системі координат, на противагу громіздкості постановки в просторовій криволінійній системі координат. З іншого боку, вона містить головні особливості підходу до моделювання і може бути основою для узагальнення, а також слугувати тестовою задачею для двовимірних задач теорії пластин.

Стандартні схеми методу скінченних елементів будують з використанням поліномів Лагранжа на кожному скінченному елементі, що має наслідком розривні похідні на стиках елементів. Це вимагає на етапі пост-процесора додаткових процедур усереднення або використання внутрішніх точок

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_07.pdf

інтегрування для елементів з метою підвищення точності визначення деформацій та напружень. Навпаки, використання b-сплайнів [4], як базисних функцій методу скінченних елементів, дає неперервні переміщення і напруження при переході з одного елемента на інший. Найчастіше використовують квадратичні або кубічні b-сплайни.

Мета даної роботи – розвинути метод скінченних елементів з використанням b-сплайнів для пластин-смуг в рамках уточненої теорії мінімального порядку, а також верифікувати його на тестових і нових задачах, зокрема, для некласичних крайових умов закріплення, що не зводяться до серединної поверхні [2].

1. *Осадчук В.А., Марчук М.В.* Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. –2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
2. *Пакош В.С., Харченко В.М., Хом'як М.М., Лесик О.Ф.* Вплив податливості до трансверсального стиснення на деформативність шарнірно закріпленої пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 140–144.
3. *Харченко В.М., Марчук М.В., Пакош В.С.* Варіант уточненої теорії мінімального порядку податливих до зсуву та стиснення пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 107–112.
4. *De Boor C.* A Practical Guide to Splines. Revised Edition. – Springer, 2001. – 346 p.
5. *Marchuk M.V., Pakosh V.S.* The Influence Pliability to Shear and Compression on the Deformability Uniformly Heated of Composite Plate-Strip // Sci. and Education a New Dimension, Natural and Techn. Sci. – 2015. – III (8). Issue 73. – P. 79–81.
6. *Pagano N.J.* Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending // Journal of Composite Materials. – 1969. – **3**, No. 3. – P. 398–411.
7. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells: 2nd Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 547 p.
8. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells: 2nd Edition. – McGraw-Hill, 1959. – 580 p.

FINITE ELEMENT METHOD ON THE BASIS B-SPLINES FOR CYLINDRICAL BENDING OF A STRIP PLATE COMPLIANT TO TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION

The bending of a strip plate under a constant transverse load is considered a test problem for the finite element method using b-splines. Differential equations, boundary conditions, and equivalent variational formulations are given for a strip within the framework of the refined plate theory of the minimum order, considering transverse shear and compression. Contributions to the stiffness matrix in the case of the single-step mesh are calculated. The assembling procedure to form a global system of linear algebraic equations is demonstrated. Results are compared with known analytical solutions.

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНІЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ РАКЕТ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ

**Євген Сторожук, Володимир Максимюк,
Іван Чернишенко, Світлана Харенко**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

stevan@ukr.net, desc@inmech.kiev.ua, chernish23@ukr.net, svetlana_borisovna@ua.fm

У сучасному ракетобудуванні, як основні несучі елементи конструкцій, широко використовуються оболонки і пластини. Часто тонкостінні елементи ракетної техніки виготовляють з композитних матеріалів у вигляді сферичних, циліндричних та конічних оболонок (днище паливного бака, корпус (обтікач) ракети, міжступеневий і хвостовий відсіки ракети тощо). З конструктивних або технологічних міркувань зазначені елементи часто мають вирізи-люки та отвори найрізноманітнішої форми. Порушення суцільності викликають концентрацію напружень. При підвищених рівнях навантажень це може призвести до руйнування або появи неприпустимих деформацій. Тому дослідження концентрації напружень біля отворів та вирізів у таких елементах конструкцій з урахуванням нелінійних властивостей матеріалів має особливо важливе значення.

У даній роботі розроблено чисельну методику розв'язання фізично нелінійних задач для тонкостінних елементів ракет конічної форми, виготовлених з нелінійно-пружних композитних матеріалів і ослаблених прямокутними отворами. Запропонована методика базується на використанні методу початкових напружень, методу Ньютона для обернення нелінійних фізичних співвідношень [1] і методу скінченних елементів з апроксимацією шуканих функцій бікубічними сплайнами.

Основні рівняння подамо в криволінійній ортогональній системі координат (l,ϑ,γ), лінії l,ϑ якої збігаються з лініями головних кривин. Вважаємо, що процес навантаження оболонки відбувається за постійної температури та є активним і простим. За певних навантажень в оболонці проявляються нелінійні властивості матеріалу, але прогини й деформації залишаються малими. Зазначені передумови дозволяють скористатися геометрично лінійною теорією тонких оболонок [2] і деформаційною теорією пластичності анізотропних середовищ [1].

Геометричні співвідношення запишемо у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, в якій виконуються гіпотези Кірхгофа–Лява:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_08.pdf

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial\vec{u}}{A_l\partial l}\cdot\vec{e}_l;\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial\vec{u}}{A_\vartheta\partial\vartheta}\cdot\vec{e}_\vartheta;\quad \varepsilon_{12}=\frac{\partial\vec{u}}{A_l\partial l}\cdot\vec{e}_\vartheta+\frac{\partial\vec{u}}{A_\vartheta\partial\vartheta}\cdot\vec{e}_l;$$

$$\mu_{11}=-\frac{\partial\vec{\varphi}}{A_l\partial l}\cdot\vec{e}_l;\quad \mu_{22}=-\frac{\partial\vec{\varphi}}{A_\vartheta\partial\vartheta}\cdot\vec{e}_\vartheta;\quad 2\mu_{12}=-\frac{\partial\vec{\varphi}}{A_l\partial l}\cdot\vec{e}_\vartheta-\frac{\partial\vec{\varphi}}{A_\vartheta\partial\vartheta}\cdot\vec{e}_l;\qquad (1)$$

$$e_{11}=\varepsilon_{11}+\gamma\mu_{11};\quad e_{22}=\varepsilon_{22}+\gamma\mu_{22};\quad e_{12}=\varepsilon_{12}+2\gamma\mu_{12},$$

де A_l, A_ϑ – параметри Ламе; $\vec{u}=u\vec{e}_l+v\vec{e}_\vartheta+w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_l,\vec{e}_\vartheta,\vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат (l,ϑ,γ); $\vec{\varphi}=\varphi_l\vec{e}_l+\varphi_\vartheta\vec{e}_\vartheta$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній.

Фізичні співвідношення при плоскому напруженому стані у випадку збігу напрямків ортотропії матеріалу з напрямками осей координат (l,ϑ,γ) мають вигляд [1]:

$$e_{11}=\left(\frac{1}{E_{11}}+\Psi q_{1111}\right)\sigma_{11}+\left(-\frac{\nu_{12}}{E_{22}}+\Psi q_{1122}\right)\sigma_{22};\qquad (2)$$

$$e_{22}=\left(-\frac{\nu_{21}}{E_{11}}+\Psi q_{2211}\right)\sigma_{11}+\left(\frac{1}{E_{22}}+\Psi q_{2222}\right)\sigma_{22};\quad e_{12}=\left(\frac{1}{G_{12}}+4\Psi q_{1212}\right)\sigma_{12},$$

де $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$ – пружні сталі композитного матеріалу; $\Psi(f)$ – функція, яка описує нелінійне деформування матеріалу; q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212} – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей композитного матеріалу.

З використанням розробленої методики і створеного програмного забезпечення досліджено концентрацію напружень у зрізаній конічній оболонці, яка виготовлена з ортотропного нелінійно-пружного 8-шарового органопластику, ослаблена двома прямокутними отворами, за дії осьового навантаження.

1. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П.* Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений. – Киев: “А.С.К.”, 1998. – 387 с.
2. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вал.Н., Шнеренко К.И.* Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.

NUMERICAL SOLUTION OF PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEMS FOR CONICAL ROCKETRY STRUCTURES WITH RECTANGULAR HOLES

Using the developed numerical technique the influence of the nonlinear elasticity of the material and geometrical parameters on the stress concentration in thin-walled conical members of rockets with two rectangular holes is investigated.

УДК 517.929

МОДЕЛЮВАННЯ НАВЧАННЯ З ПІДКРІПЛЕННЯМ ДЛЯ СОЦІАЛЬНОГО ДИСТАНЦІЮВАННЯ ПІД ЧАС COVID-19

Ігор Косович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

kosovych.ihor@chnu.edu.ua

При моделюванні інфекційних захворювань популярними є класичні SIR-моделі [1]. Недоліками цих моделей є неможливість належно змоделювати індивідуальну поведінку агента. Щоб подолати ці недоліки розглядають моделювання поширення інфекції за допомогою методу клітинних автоматів. Важливим аспектом цього підходу є використання локалізації, що дозволяє враховувати ймовірність і близькість контакту між інфікованими і моделювати процеси із врахуванням різних обмежень. У роботі [2] розглянуто сценарії моделювання з карантинними обмеженнями. Найкращу ситуацію показало моделювання з комбінацією самоізоляції, маскового режиму і вакцинації. Тут не має стрімкого піку кількості інфікованих агентів і можна розвантажити медичну систему.

Розглядається моделювання поширення вірусу за допомогою компенсаторного вивчення [3]. Розглядається метод “Multi-agent reinforcement learning” для моделювання взаємодії в динамічному середовищі.

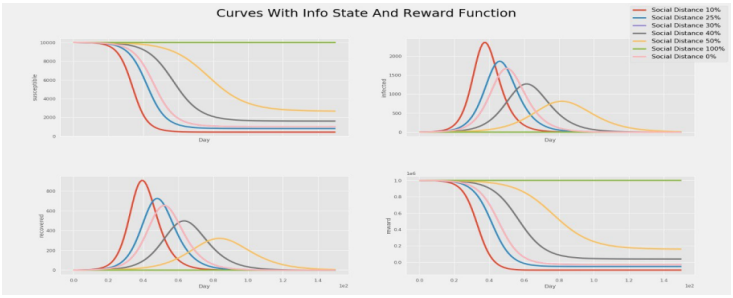


Рис. 1 Динаміка різних обмежень соціальної дистанції на різні криві

На рис. 1, 2 наведено розглянуті стратегії на різні криві захворювань, щоб побачити, як вони вирівнюються і в якому форматі фактор дистанції дає найкращий результат в рамках розглядуваної моделі.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_10.pdf

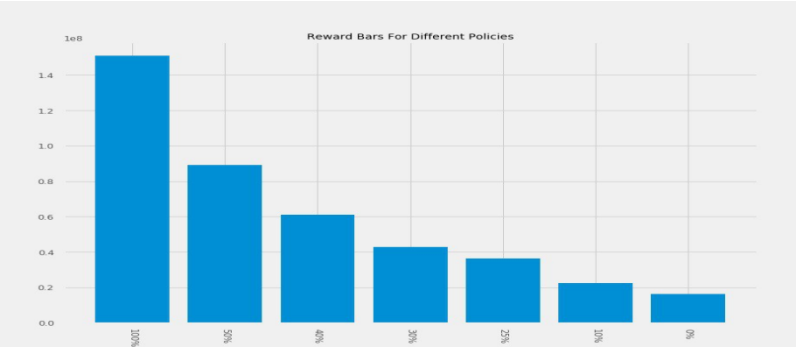


Рис. 2 Функція винагороди різних обмежень соціальної дистанції

Без жодних витрат на впровадження соціального дистанціювання найкращим варіантом є виконання 100% соціального дистанціювання. Кількість інфікованих є незмінною (0) – відсутні носії хвороби і неможлива передача вірусу. Варіант нереальний, бо відсутня будь-яка взаємодія в місті.

При зменшенні соціального дистанціювання до 50% крива не має високого піку і є досить згладженою. Також функція винагороди тільки в 1.5 рази менше за найкращий результат, що дозволяє, послаблюючи обмеження, зберігати високі значення функції винагороди, зменшити кількість інфікованого населення та підтримувати економічну складову при даному режимі.

Для практичної стратегії потрібно розглядати 10%, 25% та 30% соціального дистанціювання. Це значно згладжує криву, дає можливість зменшити кількість інфікованих і не сильно впливатиме на «доповідне» життя.

1. *Bacaër N., McKendrick and Kermack* on epidemic modelling (1926–1927). In: A Short History of Mathematical Population Dynamics. Springer, London. 2011. – P. 89–96.
2. *Kosovych I., Cherevko I., Vyklyuk Ya., Nevinskyi D.* Simulation of Various Distribution Restrictions of COVID-19 using Cellular Automata (ACIT'2022, 26–28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia). – P. 58–61.
3. *Gupta T. and Sycara K.* A brief survey of deep multi-agent reinforcement learning. Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Autonomous Systems and Networks (IASN). – 2020. – 1-6.

SIMULATION OF REINFORCEMENT LEARNING FOR SOCIAL DISTANCE DURING COVID-19

In this research, we used the method of causal RL with deviation handling for finding the best strategy for social distancing in preventing COVID-19. A number of distancing policies were taken into account and are considered and compared. The simulation results revealed the best strategy for social distancing.

УДК 539.37

ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ У НЕСКІНЧЕННОМУ В'ЯЗКОПРУЖНОМУ ШАРІ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ ЦИКЛІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Ігор Скородинський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

skorodynski@ukr.net

Циклічні навантаження є досить розповсюдженими у природі та в техніці. Тому актуальним є дослідження їхньої дії на непружні середовища і елементи конструкцій, коли непружні властивості матеріалів проявляються у досить широкому діапазоні. Розв'язки задач при циклічних навантаженнях бувають досить громіздкими, і виникають певні труднощі при їх чисельній реалізації. В даній доповіді запропоновано простий прийом, який дозволяє значно прискорити обчислення вертикальних переміщень навантаженої поверхні нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії періодичних циклічних навантажень.

Розглянемо механічну поведінку нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії нормального циклічного, періодичного в часі навантаження в межах узагальненої двопараметричної моделі Кельвіна–Фойгта та плоскої деформації [1]. Розподіл зовнішнього навантаження за координатою x приймемо сталим на ділянці $x\in[-a,a]$. Інші випадки, наприклад зосереджена сила, розглядаються аналогічно. Таким чином, інтенсивність зовнішнього навантаження має вигляд:

$$p(x,t)=p_0H_-\left(a-|x|\right)\sum_{i=1}^{N}f_i(t),\ \ \mathrm{supp}f_i(t)\subseteq\left[(i-1)T_c,iT_c\right]\ \ (i=\overline{1,N})\ .(1)$$

У формулі (1) $H_-(x)$ – асиметрична функція Хевісайда; N – кількість циклів; T_c – період циклу.

Використовуючи результати роботи [1], для вертикального переміщення середини області навантаження отримаємо:

$$v(0,t)=-\frac{p_0}{\pi t_\eta}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}G(t-\tau)f_j(\tau)d\tau+\int_{t_i}^{t}G(t-\tau)f_i(\tau)d\tau\right]\ \ (i=\overline{1,N})\ ,\ (2)$$

де $t_i = (i-1)T_c$ $(i = \overline{1,N})$, $t_j = (j-1)T_c$ $(j = \overline{1,i})$, а

$$G(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K}\frac{u^2+\alpha_e^2}{u^2+h^{-2}}\right)\frac{\sin au}{u(u^2+h^{-2})}du\,. \qquad (3)$$

У формулах (2), (3) $2h$ – товщина шару; решту позначень розшифровано в [1].

Обчислення вертикального переміщення безпосередньо за формулою (2) є не дуже ефективним, оскільки вимагає багато часу. Тому для прискорення табуляції функції (2) з урахуванням періодичності отримано наступні формули:

$$v(0,t) = -\frac{p_0}{\pi t_\eta}\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\,, \quad 0 \le t < T_c\,;$$

$$v(0,t) = v(0,t-T_c) - \frac{p_0}{\pi t_\eta}\int_0^{T_c} G(t-\tau)f(\tau)d\tau\,, \quad t \ge T_c\,, \qquad (4)$$

де $f(t) \equiv f_1(t)$. Співвідношення (4) є набагато ефективнішими, оскільки використовують інформацію з попереднього циклу.

Як конкретний приклад, отримано та проаналізовано часові залежності вертикального переміщення точки з координатами $(0,h)$ для випадку прямокутного відносно часу навантаження. Побудовано графіки для трьох матеріалів шару та трьох значень приведеної товщини $\lambda = h/a$. Час розрахунку за формулами (4) в даному конкретному випадку був приблизно в 60 разів меншим, ніж при використанні формул типу (2). При цьому точність обчислень становить 10^{-8}.

Таким чином, запропоновано підхід, який дозволяє значно прискорити обчислення (табуляцію) вертикальних переміщень навантаженої поверхні нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі при періодичних циклічних навантаженнях.

1. *Скородинський І.С., Максимук О.В.* Узагальнена модель в'язкопружного проміжного шару або покриття, що враховує деформацію поперечного зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 1. – С. 62–70.

PECULARITIES OF COMPUTING VERTICAL DISPLACEMENTS IN THE INFINITE VISCOELASTIC LAYER ON THE RIGID FOUNDATION AT PERIODIC CYCLIC LOADS

An approach that significantly accelerates the computation of vertical displacements of the loaded surface in the infinite viscoelastic layer on the rigid foundation at periodic cyclic loads is suggested. The example is considered.

УДК 519.25

НОВИЙ ПІДХІД ДО СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИРОДНИЧИХ ЯВИЩ

Іван Крикун

Інститут прикладної математики та механіки НАН України

iwanko@i.ua

Природничі процеси часто є суттєво залежними від випадкових факторів, які доцільно розглядати як нормально розподілені випадкові величини. На прикладі виборчих процесів, результати яких залежать не лише від випадкової підтримки різних кандидатів, а й від явки виборців, яка інколи може стати вирішальною, запропоновано новий метод статистичного аналізу подібних природничих процесів.

До основних підходів статистичного аналізу виборчих результатів відносять аналіз дільничних (або окружних) результатів щодо відхилень від нормального закону розподілу показників явки або результатів окремих кандидатів, аналіз частоти потрапляння підсумкових результатів у «цілі» числа, закон Бенфорда [1, 6 – 8]. Проте згадані статистичні підходи наражаються на закономірну критику, адже відхилення емпіричного розподілу частот від теоретичного нормального закону розподілу може бути викликане об'єктивними причинами (наприклад, регіональними відмінностями в активності виборців чи в підтримці певних кандидатів), а не махінаціями з результатами.

Пропонований у цій роботі новий метод статистичного аналізу ґрунтується на добре відомому результаті [2], що відношення двох стандартних нормальних випадкових величин (з параметрами 0 та 1) є випадковою величиною, яка має розподіл Коші з параметрами 0 та 1. Нагадаємо, що випадкова величина має розподіл Коші з параметрами a і $\gamma > 0$, якщо її функція розподілу дорівнює

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{\gamma}\right). \qquad (1)$$

Відомо [2], що розподіл Коші не має моментів жодного порядку та належить до розподілів з «важкими хвостами», для яких не виконується закон великих чисел. Через такі властивості розподілу Коші оцінити його параметри стандартними методами математичної статистики не вдається. Тож були запропоновані й інші способи для оцінки його параметрів. Зокрема,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_12.pdf

в роботах [3, 4] автором було запропоновано простий підхід до оцінки невідомих параметрів розподілу Коші. Головна ідея полягає у побудові, після певної обробки емпіричних даних, арктангенс-регресії отриманих даних та оцінці методом найменших квадратів параметрів цієї арктангенс-регресії, як параметрів розподілу Коші.

Згідно з цим підходом було сформульовано наступну пропозицію щодо нового методу статистичного аналізу природничих процесів.

Після центрування та нормування обраних показників природничих процесів (які є підстави вважати нормально розподіленими) складемо відношення двох з них. Далі виконаємо статистичну обробку отриманих даних згідно з процедурою, описаною в [3, 4] та отримаємо емпіричні оцінки параметрів розподілу. Тоді порівняємо отримані оцінки з теоретичними значеннями параметрів розподілу Коші (тобто зі значеннями 0 та 1) і в разі значних відмінностей оцінимо ймовірність такого відхилення та зробимо статистичні висновки щодо розглянутих природничих процесів.

Запропонований метод було використано для статистичного аналізу виборчих результатів І туру виборів Президента України 2004 року в округах Донецької та Луганської областей [5].

1. *Kobak D., Shpilkin S., Pshenichnikov M.* Integer percentages as electoral falsification fingerprints // The Annals of Applied Statistics. – 2016. – **10**, No. 1. – P. 54–73.
2. *Krishnamoorthy K.* Handbook of statistical distributions with applications. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2006. – 346 p.
3. *Крикун І.Г.* Арктангенс-регресія та оцінювання параметрів розподілу Коші // Український математичний вісник. – 2020. – **17**, № 2. – С. 196–214.
4. *Krykun I.* The arctangent regression and the estimation of parameters of the Cauchy distribution // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – **249**, No. 5. – P. 739–753.
5. *Krykun I.* New approach to statistical analysis of election results // International Journal of Mathematical, Engineering, Biological and Applied Computing – 2022. – **1**, No. 2. – P. 68–76.
6. *Myagkov M.* The forensics of election fraud: Russia and Ukraine. – New York: Cambridge University Press, 2009. – 289 p.
7. *Nigrini M.J.* Benford's law: applications for forensic accounting, auditing, and fraud detection. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012. – 330 p.
8. *Rozenas A.* Detecting election fraud from irregularities in vote-share distributions // Political Analysis. – 2017. – **25**, № 1. – P. 41–56.

A NEW APPROACH TO THE STATISTICAL ANALYSIS OF NATURAL PHENOMENA

A new method of statistical analysis of natural phenomena is proposed. This method is based on the calculation of the ratio of two standard normal random variables and estimation of parameters of obtained sample and comparison of these estimates with known theoretical values of parameters.

УДК 531.381

EVOLUTION OF MOTIONS IN A RESISTIVE MEDIUM OF A GYROSTAT SUBJECTED TO CONSTANT BODY-FIXED TORQUES

Dmytro Leshchenko, Tetiana Kozachenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

leshchenko_d@ukr.net, kushpil.t.a@gmail.com

A satellite or a spacecraft in its motion about the center of mass is affected by the torques of forces of various physical natures. It is influenced by the gravitational, aerodynamic torques, the torques due to the light pressure, and the torques due to the motions of masses inside the body. These motions may have various causes, for example, the presence of fluid in the cavities in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in the tanks of a rocket). Therefore, there is a necessity to study the problems of the dynamics of bodies with cavities containing a viscous fluid, to calculate the motion of spacecrafts about the center of mass, as well as their orientation and stabilization. The mentioned torques, acting on the body, are often relatively small and can be considered as perturbations. It is natural to use the methods of small parameter to analyze the dynamics of rigid bodies under the action of applied torques. We apply the Krylov – Bogolubov asymptotic averaging method.

The problems of rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid are significantly more difficult than in the case of an ideal fluid. An important contribution to the solution of these problems has been made in [1]. These studies showed that solving the problems of the dynamics of the rigid body with viscous fluid in the cavity can be separated into two parts: the hydrodynamic and dynamic ones, which represents a considerable simplification of the original problem. An asymptotic solution was obtained describing the evolution of the motion of a body having a cavity with a fluid of high viscosity over a long time interval.

The motion of a close to the dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid at a low Reynolds number was investigated in [2]. Qualitative and quantitative results of motion in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity containing fluid of high viscosity were studied in [3]. In paper [4], the motion about the center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a fluid of high viscosity and subjected to constant body-fixed torques was considered.

We investigated the motion about its center of mass in a resistive medium of

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_13.pdf

a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid at small Reynolds numbers, subjected to constant body-fixed torque which is described by the system of differential equations, considering the asymptotic approximation of the torquess of the viscous fluid in the cavity. The determination of the motions of forces acting on the body from the side of the viscous fluid in the cavity was proposed in [1]. We obtained the system of equations of motion in the standard form which was refined in square approximation by a small parameter. The Cauchy problem for a system determined after averaging was analyzed. The evolution of the motion of a rigid body under the action of small internal and external torques of forces is described by the solutions obtained as a result of asymptotic, analytical, and numerical calculations over an infinite time interval.

These results made it possible to analyze the motions of artificial satellites and celestial bodies under the influence of small internal and external torques.

1. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of motions of a rigid body about its center of mass. – Cham: Springer International Publishing, 2017. – 241 p.
2. *Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Paly K.S.* Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid // Proc. IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2021. – **235**, No. 20. – P. 4833–4837.
3. *Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T.* Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2022. – **142**, No. 3. – 103980.
4. *Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T.* Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – **148**, No. 3. – 104284.

ЕВОЛЮЦІЯ РУХІВ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСТАТА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНИХ МОМЕНТІВ В ЗВ'ЯЗАНИХ З ТІЛОМ ОСЯХ

На супутник або космічний апарат у русі відносно центра мас діють моменти сил різної фізичної природи. Це гравітаційні, аеродинамічні моменти, а також моменти, обумовлені рухом деяких мас в тілі. Ці моменти є відносно малими і можуть розглядатися як збурення. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, складають більші труднощі, ніж у випадку ідеальної рідини. Розглядається рух відносно центра мас в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях, який описується системою диференційних рівнянь з урахуванням в асимптотичному наближенні моментів сил в'язкої рідини в порожнині тіла. Отримано систему рівнянь руху в стандартній формі, уточнену в квадратичному наближенні за малим параметром. Проаналізовано задачу Коші для системи, визначеної після усереднення. Еволюція руху твердого тіла під дією таких внутрішніх і зовнішніх моментів сил описується розв'язками, одержаними в результаті асимптотичних, аналітичних і чисельних розрахунків на нескінченному інтервалі часу.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНФОРМАТИВНИХ ПАРАМЕТРІВ ОПТИЧНОГО МЕТОДУ НЕРУЙНІВНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У СКІНЧЕННОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Леся Постолакі

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

lesya.postolaki@gmail.com

Розглянуто осесиметричну задачу для скінченного порожнистого циліндра $\{r_{\text{in}} \le \xi \le r_{out}, 0 \le \theta \le 2\pi, -b \le \zeta < b\}$, де ξ, θ та ζ – радіальна, колова та осьова координати, r_{out} і r_{in} – зовнішній та внутрішній радіуси, $2b$ – довжина твірної циліндра. Торцеві поверхні $\zeta = \pm b$ є вільними від навантажень:

$$\sigma_{zz}\big|_{\zeta=\pm b} = 0, \quad \sigma_{rz}\big|_{\zeta=\pm b} = 0, \tag{1}$$

а на внутрішній та зовнішній циліндричних поверхнях задано нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma_{rr}\big|_{\xi=r_{\text{in}}} = \sigma_{\text{in}}(\zeta), \quad \sigma_{rz}\big|_{\xi=r_{\text{in}}} = \tau_{\text{in}}(\zeta),$$
$$\sigma_{rr}\big|_{\xi=r_{\text{out}}} = \sigma_{\text{out}}(\zeta), \quad \sigma_{rz}\big|_{\xi=r_{\text{out}}} = \tau_{\text{out}}(\zeta). \tag{2}$$

Для знаходження розв'язку задачі (1), (2) використано метод функції Лява χ, яка задовольняє бігармонічне рівняння [1]:

$$\nabla^2\nabla^2\chi = 0, \tag{3}$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Розроблено варіаційний метод однорідних розв'язків [2] розв'язування задачі (1) – (3). Розв'язок подано у вигляді розвинення за повними системами функцій – однорідними розв'язками.

Реалізація варіаційного методу приводить до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Такий підхід з використанням методу редукції дає

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_14.pdf

змогу побудови достатньо точних числових розв'язків задачі для обмежених тіл з кутовими точками, зокрема – поставленої осесиметричної задачі для скінченного порожнистого циліндра. Виконані числові експерименти показали, що зі збільшенням кількості врахованих доданків у часткових сумах рядів, у які розвинуто компоненти тензора напружень та вектора переміщень, точність задоволення умов, заданих на поверхні циліндра, покращується.

На основі отриманого розв'язку задачі досліджено параметри, які можна визначати емпірично оптичним методом і використовувати як вхідні дані для обернених задач неруйнівного визначення напружено-деформованого стану.

На рис. 1 та 2 наведено значення компонент переміщень u_r та u_z як функцій осьової координати ζ для різних значень радіальної координати $\xi \in \{0.4, 0.55, 0.75, 1\}$ (криві $1-4$ відповідно). Задачу розв'язано за таких вхідних даних: $\sigma_{in}(\zeta) = -\sigma_0 \exp\left(-\zeta^2 / d_1^2\right)$, $\tau_{in}(\zeta) = 0$, $\sigma_{out}(\zeta) = 0$, $\tau_{out}(\zeta) = 0$, $d_1 = 0.15b$, $\sigma_0 = 1$, $r_{in} = 0.4$, $b = 2$.

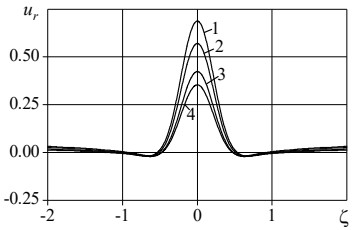


Рис. 1

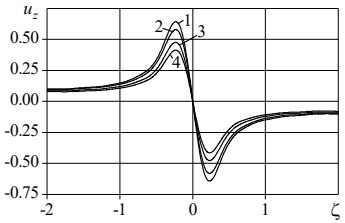


Рис. 2

1. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
2. *Chekurin V.F., Postolaki L.I.* Axially symmetric elasticity problems for the hollow cylinder with the stress-free ends. Analytical solving via a variational method of homogeneous solutions // Mathematical Modeling and Computing. – 2020. – **7**, No. 1. – P. 48-63.

ANALYSIS OF INFORMATIVE PARAMETERS OF AN OPTICAL METHOD FOR THE NON-DESTRUCTIVE DETERMINATION OF DISPLACEMENTS IN A FINITE HOLLOW CYLINDER

A problem on determining the stress-strain state of a hollow finite cylinder is solved using the variational method of homogeneous solutions. The method is used for theoretical analysis of displacements that can be determined empirically by the optical method and used as input data for inverse problems of non-destructive determination of the stress-strain state.

УДК 519.6

РОЗВИТОК СТРУКТУРНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Ігор Баранов, Олег Кравченко, Ірина Суворова

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

igbaranov.84@gmail.com, krav@ipmach.kharkov.ua, suvirina@gmail.com

Структурні методи розв'язання крайових задач математичної фізики ґрунтуються на використанні математичних засобів теорії R-функцій та полягають у побудові координатних базисних функцій, які задовольняють крайові умови задачі. Застосування структурних методів дає змогу точно враховувати геометричну інформацію про форму області, різні граничні умови та додаткову інформацію про симетрію області. Базисні функції, які побудовано з використанням стандартних систем R-операцій, є універсальними, що дає змогу розв'язувати широкий клас задач геометричного проектування, механіки, електродинаміки, гідродинаміки, теорії пластин, теорії пружності та пластичності та ін.

Цю роботу присвячено розвитку конструктивних засобів структурних методів для точнішого врахування поведінки розв'язків крайових задач в околах кутових точок межі області.

Важливою властивістю R-операцій є збереження нормалізованості [2], яке використовується для багатьох структур. Всі відомі R-операції, що зберігають нормалізованість, не є гладкими в точці (0,0). В [1] показано, що ця властивість є загальною для всіх R-операцій, які зберігають нормалізованість. Доведено, що властивість нормалізованості для гладких R-операцій можна зберегти асимптотично та запропоновано нову систему гладких R-операцій R_{nk}, функції з якої належать класу $C^{k-1}(\mathbb{R}^2)$, $k = 0,1,2,\ldots$, та мають вигляд:

$$x \underset{\wedge}{k\alpha n} y = \frac{(x+y)\left(\left(|x|^k + |y|^k + \alpha^k\right)^{1/k} - \alpha\right)}{\left(|x|^k + |y|^k\right)^{1/k}} - \left(|x|^k + |y|^k + \alpha^k\right)^{1/k} + \alpha;$$

$$x \underset{\vee}{k\alpha n} y = \frac{(x+y)\left(\left(|x|^k + |y|^k + \alpha^k\right)^{1/k} - \alpha\right)}{\left(|x|^k + |y|^k\right)^{1/k}} - \left(|x|^k + |y|^k + \alpha^k\right)^{1/k} + \alpha;$$

$\overline{x} = -x.$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_15.pdf

Запропоновано нову систему R-операцій, функції з якої є нормалізовані $k-1$ разів. Ця система має вигляд:

$$x \wedge_{nk} y = x + y - \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)|x|\right)^k + \left(\cos\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)|y|\right)^k\right)^{\frac{1}{k}} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right),$$

$$x \vee_{nk} y = x + y + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)|x|\right)^k + \left(\cos\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)|y|\right)^k\right)^{\frac{1}{k}} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right),$$

$\overline{x} = -x.$

Показано, що при $n \to \infty$ кривизна цих функцій зменшується, а самі функції поточково прямують до функцій з системи R_0.

Для розв’язання крайової задачі Діріхле з розривними граничними умовами побудовано вагові розривні функції, лапсасіан яких є обмеженою функцією в області розв’язання крайової задачі. При розв'язанні крайових задач в областях з негладкою межею для рівняння Пуассона побудовано вагові гармонічні знаковизначені функції для апроксимації узагальнених розв’язків крайової задачі Діріхле. Показано, що зазначені функції можуть бути використані для задач прогину мембрани, кручення стрижнів та теплових задач.

Розроблені конструктивні засоби розширюють можливості структурних методів та дозволяють більш точного врахування поведінки розв’язків крайових задач в околах кутових точок межі області.

1. *Баранов И.А.* Новые R-операции различного класса гладкости для построения базисов краевых задач // Вісник Запорізького нац. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки. – 2011. – № 2. – С. 13–28.
2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. − Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.

DEVELOPMENT OF STRUCTURAL METHODS FOR SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN DOMAINS OF A COMPLEX SHAPE

Structural methods for solving boundary-value problems in domains of complex shapes are developed to enhance calculation accuracy in the vicinity of corner points. It is shown that the property of normalization for smooth R-operations can be applied asymptotically, and a new system of asymptotically normalized smooth R-operations is developed. It is also developed the new system of R-operations, the functions of which are normalized a given number of times. In order to solve the Dirichlet boundary value problem under discontinuous boundary conditions, the solution structures were constructed to accurately take into account the behavior of the solutions in the vicinity of the break points. To solve boundary-value problems in domains with a non-smooth boundary for the Poisson equation, weighted harmonic functions of definite sign are constructed to approximate the generalized solutions of the Dirichlet boundary-value problem. It is shown that the proposed approaches can be effectively used for problems of membrane deflection, rod torsion, and thermal problems.

УДК 532.5

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ТОЧОК ТЕЧІЇ СТОКСА В ПРЯМОКУТНІЙ ПОРОЖНИНІ

Руслана Мороз, Олександр Курилко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ivankamoros08@gmail.com, alexandr.kurylko@knu.ua

Упродовж останніх десятиліть спостерігається посилюється інтерес науковців до вивчення якісного та ефективного перемішування в'язких рідин у двовимірних прямокутних порожнинах без участі фізичних змішувачів в самому процесі. Це стає можливим, наприклад, при збудженні течії нестисливої в'язкої рідини у прямокутній порожнині за допомогою дотичних швидкостей, прикладених на її стінках. Результати, одержані в цьому напрямку, стосуються задач, в яких бічні стінки в прямокутній порожнині є вільними від навантажень.

Метою даної роботи є дослідження моделі для задачі про рух нестисливої в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини із закріпленими нерухомими бічними стінками при складному розподілі дотичних швидкостей, прикладених на верхній та нижніх стінках. Також на меті є знаходження спеціальних періодичних точок третього порядку та встановлення їх типу.

Двовимірна повільна Стоксова течія нестисливої в'язкої рідини може бути описана в рамках бігармонічної задачі. Якщо такий рух є настільки повільним, що інерційними силами, які містять квадрати швидкостей, можна знехтувати, порівняно з в'язкими членами, то функція течії ψ задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta\psi = 0\,.$$

У декартових координатах ейлерові компоненти вектора швидкості u і v визначаються як

$$u = \frac{d\psi}{dy}, v = -\frac{d\psi}{dx}\,.$$

Постановка задачі, геометрія порожнини та методика побудови аналітичного розв'язку, в основі якого лежить метод суперпозиції, детально описані в роботі [1]. При цьому рух верхньої та нижньої стінок порожнини задавався періодичним чином згідно зі співвідношенням [2]

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_16.pdf

$$U(x) = U_{top}(x) = -U_{bot}(x) = U_1^{(1)} \cos\frac{\pi x}{2a} - U_1^{(2)} \sin\frac{\pi x}{a}. \qquad (1)$$

Для розв’язання задачі використовувався аналітичний метод суперпозиції та був реалізований в програмному пакеті Wolfram Mathematica – системі ком’ютерної алгебри, що містить багато функцій як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків.

Встановлено існування періодичних точок течії, які мають наступні координати: $A_L = (-2.11, 0)$, $A_C = (0, 0)$, $A_R = (2.11, 0)$.

Координати періодичних точок, та параметри $U_1^{(1)}$ та $U_1^{(2)}$ в (1) підбиралися згідно з таким алгоритмом: 1) періодичні точки A_L та A_C мають належати одній лінії течії; 2) точки A_L та A_R знаходяться на однакових відстанях від центральної точки A_C. При таких значеннях $U_1^{(1)}$ та $U_1^{(2)}$ періодичні точки A_L та A_C за півперіод $\tau = T/2$ ($T = 2$, змінюється від 0 до $T/2$ переходять одна в одну, обмінюються положеннями (перехід відбувається за годинниковою стрілкою), а права A_R – залишається нерухомою. В період часу від $T/2$ до T задана швидкість на границях змінює значення на протилежне, починає діяти в зворотному напрямку. В такому випадку ліва періодична точка залишається нерухомою, а центральна і права переходять одна в одну, змінюючи при цьому положення (перехід відбувається проти годинникової стрілки). За 3 повних періоди T точки повернуться на свої початкові положення.

Таким чином, знайдені точки є періодичними точками третього порядку еліптичного типу. Тип цих точок встановлювався чисельно-аналітично на основі розв’язання рівнянь адвекції та побудови Якобіана лінеаризованої системи. Ці точки відіграють важливу роль в теорії змішувань рідин і входять до складу так званих “уявних стержнів”.

1. *Курилко О.Б.* Топологічний хаос у течії в двовимірній прямокутній порожнині // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка, серія: фіз-мат. науки. – 2010. – № 2. – С. 61–64.
2. *Kumar P., Chen J., Stremler M.* Stirring with ghost rods in a lid–driven cavity // Bulletin of the APS. – 2009. – **63**, No. 19. – LB.005.

INVESTIGATION OF SPECIAL PERIODIC POINTS OF THE STOKES FLOW IN A RECTANGULAR CAVITY

A two-dimensional biharmonic problem for a rectangular cavity is considered. The method of superposition is used for solving mechanical problems concerning Stokes flows inside a rectangular cavity set up by tangential velocities applied on its walls. The existence of the third order eliptic periodic points inside a rectangular cavity is demonstrated. An appropriate choice of boundary velocity on the top and bottom walls guaranties the existence of such special periodic points that are belong to the structure of “ghost rods”.

УДК 534

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСНОГО СТАНУ ТА ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ В ДВОХ НЕІДЕАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Яна Лебеденко, Юрій Міхлін

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Yana.Lebedenko@infiz.khpi.edu.ua, yuri.mikhlin@gmail.com

У цій роботі досліджуємо резонансну поведінку та перехідний процес двох систем з обмеженим джерелом живленням (або неідеальних систем) з трьома степенями свободи кожна (рис.1). Перша система містить пружну підсистему та маятниковий поглинач коливань; друга система містить портальну раму з валом, що підтримується двома підшипниками, де два сталевих дроти мають істотно нелінійні характеристики.

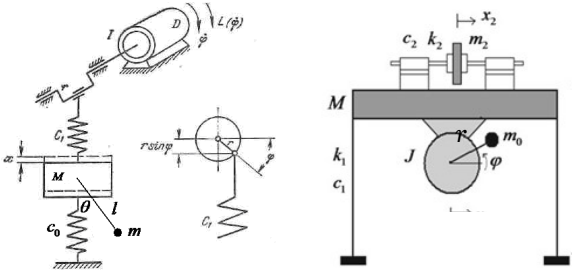


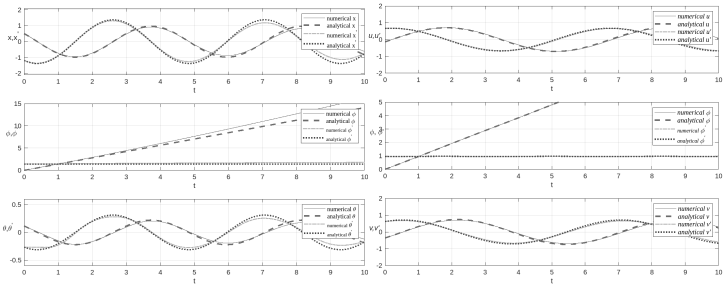
Рис. 1 Дві моделі, що описують неідеальні системи

Для опису резонансної поведінки систем в області резонансу 1:1 використовується метод багатьох масштабів, де малий параметр характеризує малість маси гасника по відношенню до маси пружної частини системи, малість складових коливань при змінності в часі кута повороту двигуна по відношенню до основної постійної складової, малість дисипації та відносно невелика нелінійність в силах пружності. Припускається, що в області резонансу зовнішнє збудження є малою величиною. При дослідженні перехідного процесу використовуються дрібно-раціональні наближення Паде, що містять експоненти.

Аналітичні результати порівнюються з чисельними розрахунками, які виконаними за допомогою процедури Рунге – Кутти 4-го порядку. Чисельне моделювання демонструє як хорошу точність побудованого стаціонарного стану, так і наближення отриманого перехідного процесу до резонансного

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_18.pdf

стаціонарного стану зі збільшенням часу. На рис. 2 наведено порівняння аналітичного стаціонарного розв’язку з чисельним моделюванням. Графічні подання вже на проміжку часу $T \in (0;10)$ дають гарне наближення розв’язків розглянутих систем.



а) б)

Рис. 2 а) Порівняння аналітичного стаціонарного розв’язку з чисельним моделюванням першої системи для змінних x, φ та θ;

б) Порівняння аналітичного стаціонарного розв’язку з чисельним моделюванням другої системи для змінних u, φ та v

Показано, що вибір параметрів дає змогу суттєво зменшити амплітуди резонансних коливань. А саме, в першій системі значне зменшення амплітуди резонансних коливань можемо спостерігати при збільшенні параметра нелінійності в силі пружності і маси маятника; в другій системі це досягається зміною параметру нелінійності в силі пружності. Також показано наближення перехідного процесу, як в аналітичному представленні, так і при чисельному розрахунку, до стаціонарного розв’язку розглянутих систем.

1. *Balthazar J.M., Tusset A.M., Brasil R.M.L.R.F. et al.* An overview on the appearance of the Sommerfeld effect and saturation phenomenon in non-ideal vibrating systems (NIS) in macro and MEMS scales // Nonlinear Dyn. – 2018. – **93**. – P. 19–40.
2. *Lebedenko Y.O., Mikhlin Y.V., Pinsky M.A.* Resonance dynamics of the non-ideal system having the pendulum as absorber of elastic vibrations / In: Balthazar J.M. (ed.) // Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources. Mechanisms and Machine Science. – Cham: Springer, 2022. – **116**. – P. 139–149.

ANALYSIS OF RESONANCE STATE AND TRANSIENT PROCESS IN TWO NON-IDEAL SYSTEMS

A resonance behavior of two 3-DOF systems with a limited power supply is considered. Resonance steady states are constructed by the multiple scales method. Transient is described by the rational Padé approximants. Obtained analytical results are compared with the numerical simulation. It is shown that amplitudes of the resonance vibrations of the elastic sub-system can be essentially decreased by change of the system parameters.

УДК 539.3

НЕЛІНІЙНІ МОДИ КОЛИВАНЬ І СКЛАДНА ПОВЕДІНКА МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Юлія Сурганова, Юрій Міхлін

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

yuliia.surhanova@khpi.edu.ua, yuri.mikhlin@gmail.com

В [1, 2] досліджено маятникову систему під дією електромагнітної сили. Ця ж робота присвячена дослідженню динаміки системи пов'язаних маятників з істотно відмінними інерційними характеристиками у магнітному полі, з урахуванням демпфування в системі. Методом багатьох масштабів побудовано нелінійні нормальні моди коливань [3, 4]. Використано апроксимацію Паде магнітного впливу, щоб найбільшою мірою задовольнити експериментальним даним.

Математична модель системи (рис. 1) подана безрозмірною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon\mu\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon\gamma M^*_{mag}(\varphi_1) + \varepsilon M^*_{D_1}(\varphi_1,\varphi_2) + \varepsilon\mu M^{(g)*}(\varphi_1) + M^{(k)*}(\varphi_1,\varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon\gamma M^*_{mag}(\varphi_2) + \varepsilon M^*_{D_2}(\varphi_1,\varphi_2) + M^{(g)*}(\varphi_2) + M^{(k)*}(\varphi_1,\varphi_2), \end{cases} \quad (1)$$

де M^*_{mag} – магнітна сила; λ – інтенсивність магнітного впливу; $M^*_{D_1}$ – демпфуючі моменти, $M^*_{D_1} = -\left(\frac{C_1}{I}\dot{\varphi}_1 + \frac{C_e}{I}\left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\right)\right)$, де $C_1\dot{\varphi}_1, C_2\dot{\varphi}_2$ – моменти опору довкілля; $C_e\left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\right), C_e\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right)$ – демпфуючі моменти, створювані пружним елементом; $M^{(g)*}, M^{(k)*}$ – моменти, що створені силами тяжіння та пружними силами відповідно; де $M^{(g)*} = -\frac{r}{I}\sin\varphi_{1,2}$, $r = mgs$, s – відстань між центром мас маятника і віссю обертання, m – маса найбільшого маятника; $M^{(k)*} = \frac{-k_l}{I}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$, k_l – жорсткість сполучного пружного елемента; μ – коефіцієнт, що характеризує співвідношення мас двох маятників; I – момент інерції, $I = 4ms^2$; ε – умовний малий параметр, що виділяє відносно малі складові в рівняннях руху.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_19.pdf

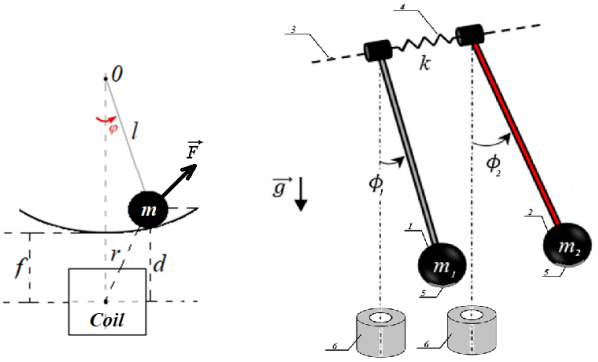


Рис. 1 Система пов’язаних маятників

Отримано як синфазну, так і локалізовану моди коливань. Аналітичний розв’язок порявняно з результатами чисельного моделювання, на основі методу Рунге – Кутти 4–го порядку, де для розрахунку мод коливань використовіються початкові значеннях змінних, визначених в аналітичному розв’язку. Чисельне моделювання, що включає також розрахунок частотного спектра і аналіз стійкості нелінійної нормальної моди при зміні параметрів системи і початкових кутів, дозволяє виявити як регулярну, так і нерегулярну поведінку системи.

1. *Polczyński K.*, *Wijata A.*, *Awrejcewicz J.*, *Wasilewski G.* Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field // P. I. Mech. Enf I-J Sys. – 2019. – **233**. – P. 441–453.
2. *Wijata A.*, *Polczyński K.*, *Awrejcewicz J.* Theoretical and numerical analysis of regular one–side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field // Mech. Syst. Signal Process. – 2021. – **150**. – 107229.
3. *Avramov K.V.*, *Mikhlin Yu.V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // Appl. Mech. Rev. – 2013. – **65**, No. 2. – 020801.
4. *Mikhlin Yu.V.*, *Avramov K.V.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // Appl. Mech. Rev. – 2010. – **63**, No. 6. – 060802.

NONLINEAR VIBRATION MODES AND COMPLEX BEHAVIOR OF A PENDULUM SYSTEM UNDER A MAGNETIC FIELD

The paper is dedicated to investigations of local and coupled vibration modes of the damped system consisting of two connected pendulums having significantly different masses under the action of a magnetic force and a damper. Such modes are constructed using the multiple scales method; the stability of the modes is also analysed. Analytical results are compared with numerical simulation when the Runge-Kutta method and the spectrum presentation are used. An appearance of the complex behaviour when the system parameters change is found and investigated.

УДК 539.3

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКИХ ПЛАСТИН, ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ ТА СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Етері Гарт, Олексій Семенча

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

hart@ua.fm, semencha.aleksey@gmail.com

Пластинчато-оболонкові конструкції мають широкий спектр застосування у різноманітних галузях техніки і промисловості, зокрема, у аерокосмічній, нафтогазовій, енергетиці, машинобудуванні, будівництві та багатьох інших. З конструктивних чи технологічних причин суцільність таких конструкцій часто порушується різного роду отворами, в околі яких виникають локальні напруження. Пошук шляхів зменшення концентрації напружень навколо отворів є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла [1, 2].

У цій роботі проведено комп'ютерне моделювання і скінченно-елементний аналіз поведінки тонких пластин, циліндричних і зрізаних конічних оболонок з центрально розташованими круговими отворами за наявності навколо них стрічкових включень з іншого матеріалу. Пластини і оболонки знаходяться під дією одновісних рівномірних розтягувальних врівноважувальних зусиль. Здійснено порівняльний аналіз напружено-деформованого стану (НДС) досліджуваних пластинчато-оболонкових елементів конструкцій із відомими аналітичними розв'язками у випадку великих і малих отворів.

За допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) проведено дослідження впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН). Вважається, що стрічкове включення розташоване у серединних площині пластини та поверхні оболонки. Матеріал включення має інші, ніж основний матеріал, властивості ($E_{вкл} = E_0 / 3;\ E_0 / 2{,}5;\quad E_0 / 2;\ E_0 / 1{,}5$, де E_0 – модуль пружності пластини/оболонки, $E_{вкл}$ – модуль пружності включення). На границі матриці і включення задано умови жорсткого зчеплення. Ширина включень $h_{вкл}$ змінюється ($h_{вкл} = r_0 / 2;\quad r_0 / 4;\ r_0 / 8$, де r_0 – радіус кругового отвору).

Результати порівняльного аналізу отриманих ККН для пластин і циліндричних оболонок з малими круговими отворами ($r_0 / \sqrt{R_0 h} = 0{,}5$, де h – товщина пластини/оболонки; R_0 – радіус кривини циліндричної оболонки) для різних варіантів «жорсткості» матеріалу включень та їх ширини наведено у табл. 1.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_20.pdf

Таблиця 1

Коефіцієнт концентрації напружень в пластині і циліндричній оболонці з круговим отвором і різними стрічковими включеннями

Задача	**Ширина включення $h_{вкл}$**	**Модуль пружності включення $E_{вкл}$**			
		$E_0/3$	$E_0/2{,}5$	$E_0/2$	$E_0/1{,}5$
Пластина	$r_0/2$	1,80	1,69	1,70	2,09
	$r_0/4$	2,01	1,93	1,81	2,06
	$r_0/8$	2,20	2,15	2,07	2,00
Оболонка	$r_0/2$	2,45	2,31	2,13	2,53
	$r_0/4$	2,64	2,54	2,41	2,45
	$r_0/8$	2,82	2,76	2,68	2,55

З табл. 1 випливає, що за наявності стрічкового включення з більш «м'якого» матеріалу, ніж основний матеріал пластини/оболонки, вдається зменшити ККН на ~13 – 34%, як для пластини, так і для оболонки, у порівнянні із відповідним варіантом без включення. Найбільш доцільним із розглянутих варіантів виявляється застосування включення ширини $h_{вкл} = r_0/2$ з модулем пружності $E_{вкл} = E_0/1{,}5$. У разі інших випадків (більш «м'яких» та тонких включень) має місце механічний ефект переміщення (зсуву) зони концентрації напружень від краю отвору до межі поділу між матеріалами включення та пластини/оболонки.

У разі конічних оболонок спостерігається аналогічна картина розподілу інтенсивності напружень навколо отвору за наявності включення.

У результаті проведеного комп'ютерного моделювання і скінченно-елементного аналізу концентрації напружень навколо отворів в тонкостінних однорідних ізотропних пластинах, циліндричних і зрізаних конічних оболонках з круговими (малими і немалими) отворами за наявності навколо них стрічкових включень з іншого матеріалу здійснено порівняльний аналіз коефіцієнтів концентрації напружень для різних випадків механічних і геометричних параметрів включень. Виявлено механічний ефект, пов'язаний із зсувом зони концентрації напружень.

1. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
2. *Гарт Е.Л., Семенча О.О.* Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 43–54.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THIN PLATES, CYLINDRICAL AND CONICAL SHELLS WITH HOLES AND TAPE INCLUSIONS

The stress-strain state of elastic plates, cylindrical and truncated conical shells with circular holes located in the center of the body has been studied. The finite element method is used to determine the influence of the geometric and mechanical parameters of the tape inclusion surrounding the hole on the stress concentration factor. A comparative analysis of the results was carried out with a change in the width and rigidity of the inclusion material. The conditions for reducing the stress concentration around the hole are analyzed.

УДК 539.3

ПРО РАЦІОНАЛЬНІ ПАРАМЕТРИ КІЛЬЦЕВИХ ВКЛЮЧЕНЬ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПОВЕДІНКИ ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ОТВОРАМИ

Етері Гарт, Богдан Терьохін

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

hart@ua.fm, bogdan.teryokhin@gmail.com

Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), які відносять до новітніх матеріалів, що характеризуються поступовою зміною своїх властивостей в об'ємі (жорсткість, пружність, теплопровідність та ін.), успішно використовуються в багатьох галузях техніки, включаючи машинобудування, авіацію, космічну техніку, медицину, електроніку та ін. Застосування ФГМ у тонкостінних конструкціях з отворами дає змогу впливати на коефіцієнт концентрації напружень (ККН) в їх околі [1–4]. Пошук раціональних параметрів ФГМ-включень навколо отворів з погляду зменшення локальних напружень, підвищення міцності та надійності конструкції у цілому, є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла.

Дана робота полягає в дослідженні впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих ФГМ-включень навколо кругових отворів в пластинчато-оболонкових елементах конструкцій, що знаходяться під дією зовнішнього механічного навантаження. Розглянуто напружено-деформований стан (НДС) тонких прямокутних однорідних ізотропних пластин і тонкостінних циліндричних оболонок з центрально розташованим круговим отвором та кільцевим ФГМ-включенням. Вважається, що включення знаходиться у серединних площині пластини та поверхні оболонки, а на його межі з матрицею задано умови жорсткого зчеплення. Ширина включення варіюється. На бокові грані пластин та торці оболонок діє рівномірне одновісне розтягувальне навантаження, що не призводить до появи пластичних деформацій.

У числових розрахунках на основі методу скінченних елементів (МСЕ) вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu_0 = 0,25$ та змінним модулем пружності ФГМ-включення. Закон змінення модуля пружності ФГМ-включення має три характерні зони: 1) зона зростання ширини h_1; 2) зона незмінного (фіксованого) значення ширини h_2; 3) зона зменшення модуля пружності ширини h_3. Модуль пружності пластини та оболонки $E_0 = 100\ МПа$.

У [3] встановлено, що найбільший вплив на величину ККН має ширина центральної зони ФГМ-включення (h_2). Пошук раціональних параметрів

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_21.pdf

кільцевого ФГМ-включення здійснено для різних варіантів його ширини при фіксованих значеннях $h_1 = h_3 = R$ та змінній величині h_2 ($h_2 = R, 2R, ...7R$; R – радіус кругового отвору).

Наявність радіально-неоднорідного включення із обраним законом змінення модуля пружності дає змогу зменшити величину ККН, а також відповідні максимальні деформації у пластині на ~21%–38%. Для оболонок спостерігається аналогічна картина. Найкращім із розглянутих варіантів з точки зору зменшення ККН як для пластин, так і для оболонок виявилось ФГМ-включення 6 ($h_1 = h_3 = R$, $h_2 = 6R$) (рис. 1).

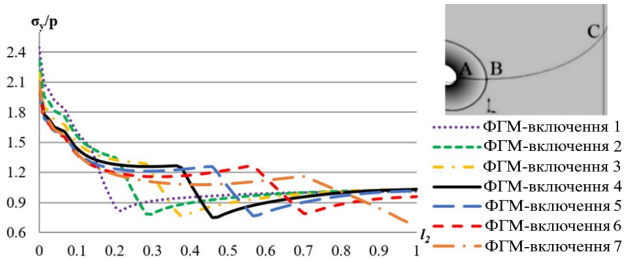


Рис. 1 – Розподіл відносних напружень σ_y / p в оболонці з ФГМ-включенням у перерізі AC у разі $h_2 = R,\ 2R, ..., 7R$

Проведене комп’ютерне моделювання на основі МСЕ показало, що за допомогою ФГМ-включень з певними механічними властивостями і геометричними параметрами можна зменшити ККН в пластині та оболонці на понад 35%, а також пропорційно знизити інтенсивність деформацій в околі отвору. Використання ФГМ-включень дозволяє не лише впливати на величину ККН в околі локальних концентраторів напружень, але і на розподіл напружень по поверхні пластини та оболонки в цілому.

1. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
2. *Савин Г.Н.* Концентрация напряжений около отверстий. – Київ.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. *Гарт Е.Л., Гудрамович В.С., Терьохін Б.І.* Вплив включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень в тонких пластинах та циліндричних оболонках з круговим отвором // Техн. механіка. – 2022. – № 4. – С. 67–78.
4. *Yang Q.Q., Gao C.F., Chen W.T.* Stress concentration in a finite functionally graded material plate // Sci. China Phys. Mech. Astron. – 2012. – **55**. – P. 1263–1271.

ON RATIONAL PARAMETERS OF RING INCLUSIONS FROM FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL IN COMPUTER SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF PLATE-SHELL STRUCTURAL ELEMENTS WITH HOLES

Computer simulation of the behavior of thin plates and cylindrical shells with a round hole and an annular inclusion made of a functionally graded material (FGM) has been carried out. Rational parameters of a radially inhomogeneous FGM-inclusion are established, at which the stress concentration factor decreases by 35%. The results showed that the law of change in the elastic modulus of the FGM-inclusion and the width of the inclusion also affect the distribution of stresses on the surface of the plate and shell.

УДК 517.958: 532.72

МОДЕЛЬ ОЧИЩЕННЯ ЗАБРУДНЕНОГО РОЗЧИНУ У ВОДНОМУ ФІЛЬТРІ З ПОМ'ЯКШЕННЯМ ЖОРСТКОЇ ВОДИ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ НА МЕЖІ

Ольга Чернуха, Юрій Білущак, Анастасія Чучвара

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

cher@cmm.lviv.ua, byixx13@gmail.com, davydoka@gmail.com

Для очищення природної та забрудненої води до стану питної використовують різні типи фільтрів: механічні, хімічні, фізико-хімічні, електричні, біологічні тощо [1]. Кожен з них є ефективним для певного виду забруднення. Наприклад, такі домішки як органічні речовини, іони металів з низькими степенями окислення і бактерії можна ефективно знешкоджуються методами хімічної очистки води.

Для кількісного опису процесів масоперенесення частинок забруднення з водним розчином через засипний фільтр з урахуванням пом'якшення води за допомогою хімічної реакції побудована математична модель на основі балансових співвідношення маси компонент системи. За компоненти термодинамічної системи прийнято взаємодіючі дискретні сукупності матеріальних частинок, які утворюють скелет фільтра, водного розчину та домішкові частинки, які сорбуються, у двох виділених станах – у водному розчині та сорбовані на скелеті фільтра, сполуку одного з основних катіонів (яка спричинює надмірну твердість води), реагент, частинки нерозчинної речовини, які утворилися в наслідок хімічної реакції та молекули газу, які миттєво випаровуються. Дифузійний потік визначається градієнтами хімічних потенціалів, які лінійно залежать від концентрацій. Прийнято, що джерелом (стоком) маси компонент типу важких металів є процеси сорбції-десорбції частинок, а компонент, які приймають участь в хімічній реакції – хімічна реакція. Потужності виробництва маси компонент, які приймають участь в процесах сорбції-десорбції, є пропорційними до локальної різниці хімічних потенціалів і, як наслідок, різниці концентрацій. У результаті, після врахування умови нормування отримана система 6 диференціальних рівнянь.

Крайова задача сформульована для шару, в якому фільтрується водний розчин і на його поверхню рівномірно подається реагент. Крайові умови враховують, що в початковий момент часу механічний фільтр є чистим, його поровий простір заповнений водою, проте цей водний розчин характеризується сталою підвищеною твердістю; реагент у тіло ще не поступив, відповідно хімічна реакція ще не відбулась і нема продуктів цієї реакції. В подальшому на

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_22.pdf

верхню поверхню пористого шару подається водний розчин підвищеної твердості та однакова кількість реагенту і на цій поверхні речовина, що випадає в осад, не утворюється. Прийнято, що на нижній границі фільтра відомо або можна виміряти значення функції концентрації важких металів у водному розчині в певні моменти часу. Такі експериментальні дані апроксимуються поліномом заданої степені.

Запропоновано модельний опис хімічної реакції пом’якшення води.

Розроблено пакет програм WodFil (рис. 1) та проведено числовий аналіз концентрації забруднюючих частинок, які мігрують у водному розчині, та концентрації частинок, сорбованих на скелеті фільтра. Розрахунки проведені

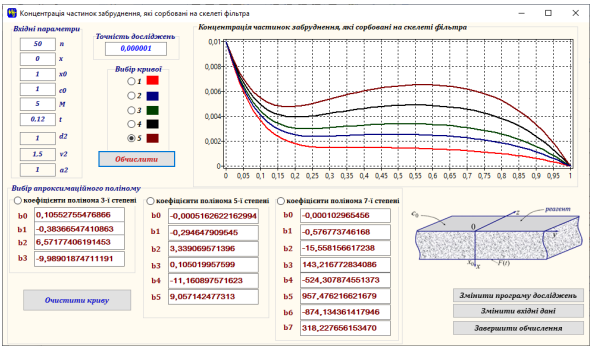


Рис. 1 Робота одного з модулів пакету WodFil

для двох наборів експериментальних даних – для якісного очищення води та менш якісного. На їх основі побудовані апроксимаційні поліноми 5-ї степені, які використані як гранична умова для функції концентрації частинок забруднення у водному розчині на нижній поверхні фільтра. Визначено закономірності зазначених процесів, встановлено вплив коефіцієнта швидкості конвективного перенесення та товщини фільтра на концентрацію частинок забруднення, що мігрують з розчином, і концентрації сорбованої речовини.

1. *Jabbar-Lopez Z.K., Ung C.Y., et. al.* The effect of water hardness on atopic eczema, skin barrier function: A systematic review, meta-analysis // Clinical & Experimental Allergy. – 2021. – **51**, No. 3. – P. 430–451.
2. *Чернуха О., Білущак Ю.* Математичне моделювання процесів конвективної дифузії і сорбції у тришаровому пористому тілі. І. Масоперенесення домішкових частинок з поровим розчином // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 4. – С. 107–116.

MODEL OF PURIFICATION OF CONTAMINATED SOLUTION IN A WATER FILTER WITH HARD WATER SOFTENING UNDER EXPERIMENTAL DATA AT THE BOUNDARY

A mathematical model was constructed for the quantitative description of the mass transfer of pollution in aqueous solution through a backfill water filter, taking into account chemical reaction of the water softening.

УДК 622.691.24

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЯКОСТІ РОЗКРИТТЯ ГАЗОНОСНИХ ПЛАСТІВ НА РЕЖИМИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ ПІДЗЕМНИХ СХОВИЩ ГАЗУ

Мирослав Притула, Назар Притула, Ярослав П'янило, Зоя Притула, Ольга Химко

Філія «Науково-дослідний інститут транспорту газу» АТ «Укртрансгаз»,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»

myroslav.prytula@gmail.com, nazar.prytula1@gmail.com, danylo794@gmail.com, zoya777b@gmail.com, olgakhymko@ukr.net

Аналіз результатів дослідження процесу фільтрації газу у вибійних зонах свердловин показав, що існує багато слабо визначених факторів впливу на вибійний тиск їх дебіту – проникність ближньої зони, вихровий опір, скін-фактор тощо. Слід очікувати, що характер впливу існуючих факторів на динаміку зміни тиску в околі свердловин є значно складнішим, ніж це спостерігається для свердловин на родовищах газу. Зокрема, зміна проникності за результатами досліджень свердловин вказує на наявність анізотропії пласту в безпосередній близькості від свердловини, присутності багатьох факторів, які породжують скін-фактор. Для дослідження фільтраційних процесів у неоднорідних пористих середовищах використовують як чисельні, так і аналітичні методи, кожен із яких має свої переваги та недоліки. Дослідження свердловин проводять в основному аналітичними методами. Числові методи для цього є мало придатними. Вони передбачають подання вибійної зони у вигляді простих областей різної розмірності – елементів. Малість елементів та швидка зміна тисків за часом призводить до нестійкості чисельного методу. Слабкістю аналітичних методів є проблема врахування змінних крайових умов та дебіту свердловин за часом. Поєднання чисельних та аналітичних методів для моделювання фільтраційних процесів у пластах-колекторах підземних сховищ газу (ПСГ) та у вибійних зонах свердловин забезпечує стійкість обчислювальних процедур. У пластах-колекторах фільтраційні процеси в одних областях пласта описують за лінійним законом (виконується закон Дарсі), а в інших (у вибійних зонах свердловин) – приймається нелінійна залежність тиску від обсягів відбирання газу.

Розроблено математичне та програмне забезпечення, яке враховує наявне метрологічне забезпечення, включає такі основні програмні модулі: моде-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_23.pdf

лювання фільтраційних процесів у неоднорідних багатопластових системах; розрахунок параметрів потоків газу в системі мережного типу, яка включає вибійні зони свердловин, свердловини та систему збору газу; розрахунок системи підготовки газу, багатоцехових компресорних станцій (КС) та газопроводу-відводу. Технологічні схеми (ТС) ПСГ інтегровані із ТС газотранспортної системи, і утворюють єдину термогідравлічну систему. Експлуатація ПСГ у режимі компримування газу на етапах відбирання та закачування газу забезпечується КС із різнотипними газоперекачуючими агрегатами (ГПА). Саме режими роботи КС забезпечують роботу ПСГ у заданих оптимальних, чи в необхідних пікових режимах. І тому, для формування режимів роботи КС на його вході та виході необхідні крайові умови з достатньою точністю. Однією із вхідних умов на вході КС у режимі відбирання газу є тиск газу, за умови відбирання заданого обсягу газу, на газозбірному пункті (ГЗП). Для його розрахунку слід забезпечити моделювання технологічного ланцюжка: пласт-колектор – ГЗП. Складність такого розрахунку полягає у тому, що на характер зв'язку між багатьма експлуатаційними параметрами ПСГ впливають слабо визначені фактори – макрошорсткість пласта, вихрові опори, які часто породжують турбулентні фільтраційні процеси. Всі ці фактори впливають на величину зміни тиску (депресії / репресії) в околі свердловини за часом. Депресію / репресію слід розділити на два доданки: перший (умовно постійний) формується за долі секунди (стрибкоподібно), а другий – за змінного дебіту газу протягом всього часу експлуатації свердловин. Розрахунок другого доданку депресії / репресії ускладнює розрахунок тиску на ГЗП. У роботі запропоновано нестаціонарну модель, яка дозволяє розрахувати інтегральний вплив змінної депресії / репресії усіх свердловин на величину тиску на ГЗП. Це забезпечило швидкий розрахунок режимів експлуатації ПСГ протягом усього прогнозного часу.

1. *Iwaszczuk N., Prytula M., Prytula N., Pyanylo Ya., Iwaszczuk A.* Modeling of Gas Flows in Underground Gas Storage Facilities // Energies. – 2022. – **15**. – 7216. https://doi.org/10.3390/en15197216
2. *Prytula M., Prytula N., Pyanylo Ya., Prytula Z., Khymko O.* Planning optimal operating modes of underground gas storage facilities as part of the gas transmission system // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2022. – **3**, No. 2. – P. 76–91. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.258953

STUDY OF THE INFLUENCE OF THE QUALITY OF THE OPENING OF GAS-BEARING LAYERS ON THE UNDERGROUND GAS STORAGE OPERATION MODES

The problem of analyzing the operation of wells on underground gas storages (UGS) in non-stationary modes of their operation is considered. Factors affecting the parameters of gas flows in the wells during the time of gas withdrawal / injection are variable. Due to the existing complexity of researching working wells on the UGS, the work proposes a method of integral consideration of the influence of the parameters of all the bottomhole zones of the wells on the mode of operation of the UGS. As expected, the integral consideration of the impact on the parameters of the bottomhole zones of the wells ensured a sufficient speed of calculation of the UGS operating modes.

УДК 51-7:519.87

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОТУЖНОСТІ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА НА ФІЛЬТРАЦІЮ ГАЗУ В ОКОЛІ СВЕРДЛОВИНИ

Ярослав П'янило, Ганна Лянце, Галина П'янило

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

danylo794@gmail.com, anna.lyantse@gmail.com, danylo794@gmail.com

Фільтрація газу в пласті підземного сховища в нестаціонарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних з розподіленими параметрами. В літературі, як правило, при математичному моделювання використовують постійну усереднену товщину пласту [3]. В природі товщина пласту може бути різною і неврахування її зміни може привести як до неточного визначення дебету свердловини, так і неточного визначення балансових параметрів. Урахування товщини пласту слід враховувати і при великих тисках. Тому актуальною є задача дослідження впливу товщини пласту на параметри роботи підземного сховища [2, 3]. В такому випадку доцільно область порового середовища, в якому міститься свердловина, описувати наступним лінеаризованим диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} \right) .$$

Тут $\kappa = p_{00} / D$, $D = m\mu / k$, p_{00} – початкове значення тиску, k – усереднене значення проникності. Лінеаризацію здійснено на основі наступного спів відношення [1, 2]:

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_n^2}{2 m \mu} .$$

Метою роботи є дослідження впливу параметрів пористого середовища, особливо товщини, на розподіл тиску та швидкості в циліндричній області зі свердловиною в центрі.

Формулювання задачі. Будемо вважати, що на торцевих поверхнях немає стоку та надходження газу, а на зовнішній поверхні циліндра тиск газу вважається сталими, рівним деякому значенню p_{00}. Тиск на внутрішній поверхні вважається заданим з врахуванням барометричного перепаду і визначається за значенням тиску на газозбірному пункті.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_24.pdf

Розв’язок рівняння знайдено у вигляді

$$p(r,x_3,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(r,t)\cos\frac{n\pi x_3}{l}.$$

Обчислювальний експеримент. Метою обчислювального експерименту було дослідження впливу параметрів пористого середовища, зокрема його висоти, пористості та коефіцієнта проникності, на розподіл тиску.

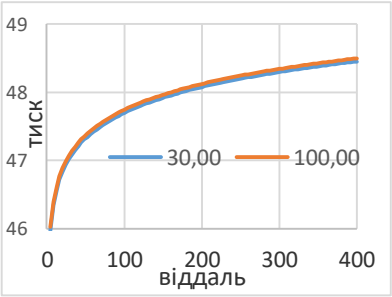


Рис. 1 Залежність тиску від радіуса для різних значень висоти пористого середовища (синя лінія – 30 м, червона лінія – 100 м)

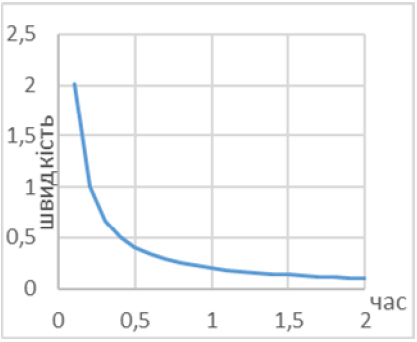


Рис. 2 Залежність швидкості від радіуса

Висновки. Отримані результати дають можливість оцінювати розподіл тиску в складному пористому середовищі, що має форму пустотілого циліндра в залежності від радіуса та висоти циліндра. При цьому вважається, що розподіл тиску не залежить від кутової координати. З аналізу результатів слідує, що починаючи з деякої товщини середовища при моделюванні процесів масопереносу необхідно враховувати і залежність тиску від висоти (рис. 1, 2). Результати досліджень можуть бути використані для моделювання процесу фільтрації вуглеводнів в околах свердловин.

1. *Притула Н.М., Пянило Я.Д., Притула М.Г.* Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: Ви-во “Растр-7”, 2015. – 266 с.
2. *П’янило Я.Д.* Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 178–184.
3. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. – Москва: Наука, 1963. – 397 с.

STUDY OF THE INFLUENCE OF THE POWER OF THE POROUS MEDIUM ON GAS FILTRATION IN THE VICINITY OF THE WELL

The effect of the thickness of the layer of the porous medium on the pressure distribution in the vicinity of the blowout zone of the underground gas storage well was studied. The obtained results are tested on experimental data.

УДК 539.3

ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВНОГО ПРОЦЕСУ ПОРИСТОГО ШАРУ ПІД ДІЄЮ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

Софія Твардовська, Ярослав П'янило

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

sofi.lviv@gmail.com, danylo794@gmail.com

Взаємодія механічних та електромагнітних процесів в реальних тілах з урахуванням їх складної внутрішньої структури важлива для багатьох природних (грунти, гірські породи, дерево тощо) та штучних (бетон, цегла, композити, кераміка тощо) матеріалів. Цей напрям досліджень стимулюється необхідністю вирішення технологічних проблем, які виникають при виявленні підземних родовищ корисних копалин, осушуванні дерева, кераміки, грунтів, тощо, з використанням постійного чи періодичного електромагнітного поля; розробці нових, більш інформативних геофізичних поверхневих та свердловинних методах досліджень, які базуються на використанні ефектів взаємодії механічних та електромагнітних полів.

Метою роботи є дослідження поширення механоелектромагнітних хвиль у пористих структурах, насичених водним розчином електроліту.

Розглядаємо безмежний пористий насичений розчином електроліту шар ($-l \le x \le l$). До поверхонь $x = \pm l$ шару прикладено змінну різницю електричних потенціалів $U = \pm U_a \cos \omega t$, де U_a – амплітуда, ω – циклічна частота. Повна система макроскопічних співвідношень для опису взаємозв'язаних механічних та електромагнітних процесів у тілі (система рівнянь електромагнітної механіки) включає рівняння балансу маси, руху, електромагнітного поля, визначальні та геометричні співвідношення і приведена в роботах [1, 2, 3].

Механічні поля визначаються із рівнянь, ключова форма яких в лінеаризованому наближенні наведена у роботі [1, 4]. Поверхні шару защемлені. В цьому випадку переміщення і скелету, і рідини на поверхнях $x = \pm l$ дорівнюють нулеві ($u(x,t) = 0$, $v(x,t) = 0$, $x = \pm l$).

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_5 \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + a_6 E = 0,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_26.pdf

$$a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a_4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b_4\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a_5\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+b_6E=0\,. \qquad (1)$$

Якщо до системи (1) застосувати перетворення Лапласа – Карсона і розв'язки подати у вигляді рядів Фур´є за синусами

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix}\sin\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad (2)$$

то для невідомих коефіцієнтів отримується система лінійних рівнянь в зображеннях Лапласа – Карсона. Знайшовши оригінали розв'язків цієї системи і підставляючи їх в рівність (2), отримуємо рішення сформульованої задачі.

Висновки. Характерною для розглянутих задач є нелінійна залежність амплітуди коливань і фази від параметрів проникності, пористості та звивистості. При збільшенні пористості у вказаному діапазоні амплітуда коливань спочатку зменшується, а потім збільшується. Це ж стосується і залежності амплітуди від коефіцієнта проникності. Збільшення звивистості приводить до збільшення амплітуди коливань скелету. Характер залежності може бути відмінним для інших діапазонів зміни вказаних параметрів. Дослідження електросейсмічних коливань пористих насичених тіл можуть бути корисними для вивчення їх характеристик.

1. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – **28**, No. 2. – P. 168–178.
2. *Фізико*-математичне моделювання складних систем / *Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін*., під. ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
3. *Pride S.R.* Electroseismic wave properties / S.R. Pride, M.W. Haartsen // Journal of the Acoustic Society of America. – 1996. – No. 100. – P. 1301–1315.
4. *Tvardovska S.* Influence of external electric field on parameters of mechanical waves in saturated porous medium // Task Quarterly. – 2013. – **17**, No. 3–4. – P. 215–222. [In Ukrainian].

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS OF STUDYING THE OSCILLATORY PROCESS OF A POROUS LAYER UNDER THE A CTION OF AN ELECTRIC FIELD

The paper examines the oscillations of a porous layer under the action of an external electric field. Time dependences of pore fluid and skeleton movements are given.

УДК 539.3

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЗАДАЧ ПОРОПРУЖНОСТІ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Дмитро Бобилєв

Криворізький державний педагогічний університет

dmytrobobyliev@gmail.com

Пористі матеріали можна охарактеризувати як тверді матеріали, що містять велику кількість з'єднаних між собою пор. Взаємне з'єднання пор забезпечує протікання рідини через матеріал. Гірські породи та глини є типовими прикладами пористих матеріалів. Також існують біологічні тканини та піноматеріали, які належать до цієї категорії.

Внутрішня структура або мікроструктура є ключовим фактором у розумінні та контролі макроскопічної поведінки цих матеріалів [1]. Мікромеханіка, яка базується на мікроскопічній структурі середовища та розробляє математичні моделі та інструменти для прогнозування загальної макрореакції, відіграє важливу роль в дослідженні пористих тіл. Отримані моделі та теорії перевіряються порівнянням з експериментально отриманими значеннями.

Моделювання поропружності вимагає поєднання двох законів. Першим із них є закон Дарсі, який описує зв'язок між рухом рідини та тиском у пористому середовищі. Відповідно до цього закону швидкість рідини прямо пропорційна різниці тисків на заданій відстані, в'язким властивостям рідини та здатності пористого матеріалу порушувати потік. Другий закон – структурне переміщення пористої матриці. Поропружність Біо визначає ці взаємозалежні співвідношення. Також розглядається метод апроксимації на дрібній сітці для моделювання в'язкопоропружності. Формулюванні ущільнення відбувається за рахунок повзучості твердих частинок скелета структури і залежить від тривалості дій навантаження.

Розглядаються задачі поропружності в тріщинуватих і неоднорідних середовищах. Для розв'язання задач використовується метод граничних елементів. Розглянемо спочатку задачу поропружності в обмеженій області Ω. Математична модель містить систему рівнянь для переміщення та тиску. Сили, прикладені до насиченого пористого середовища, частково розподіляються по твердому скелету, а частково – по наповненим порам. Перші напру-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_27.pdf

ження викликають деформації скелета, тому їх називають ефективними. Враховуючи, що напруження додатні, коли вони розтягуються, і тиск додатній, коли відбувається стискання, принцип ефективної напруги представлений такими рівняннями [2]:

$$-div\boldsymbol{\sigma}_T(u,p)=0, \qquad \boldsymbol{\sigma}_T(u,p)=\boldsymbol{\sigma}(u)-\alpha pI, \qquad x\in\Omega,$$

де u – вектор переміщення, p – поровий тиск рідини, α – коефіцієнт Біо, $\boldsymbol{\sigma}_T$ – тензор напруження, $\boldsymbol{\sigma}$ – лінійні напруження. Рівняння класичної теорії пружності можна повністю визначити за допомогою двох матеріальних констант. Такою парою констант пружності може бути модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν. Іншими фундаментальними константами, які можуть використовуватися, є модуль об'ємного стиску K, модуль зсуву та стала Ламе, які пов'язані з коефіцієнтом Пуассона та модулем Юнга класичними співвідношеннями.

Співвідношення між тензором напружень і тензором деформацій визначається так:

$$\boldsymbol{\sigma}(u)=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_V I+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(u), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(u)=\frac{1}{2}\left(\nabla u+(\nabla u)^T\right),$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}(u)$ – об'ємна деформація, λ і μ – коефіцієнти Ламе.

Розв'язано низку задач, що засвідчили високу швидкість методу граничних елементів і точність отриманих числових результатів.

1. *D'Angelo C., Scotti A.* A mixed finite element method for darcy flow in fractured porous media with non-matching grids // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2012. – **46**, No. 2. – P. 465–489.
2. *Battiato I., Tartakovsky D., Tartakovsky A., Scheibe T.* Hybrid models of reactive transport in porous and fractured media // Advances in Water Resources. – 2011. – **34**, No. 9. – P. 1140–1150.

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF POROELASTICITY PROBLEMS IN HETEROGENEOUS MEDIA

Problems of poroelasticity in fractured and heterogeneous media are considered. The boundary element method is used to solve problems. The work focuses on the study of poroelasticity in a limited area.

УДК 512.548.7

CIP-КВАЗІГРУПИ 4-ГО ПОРЯДКУ З ОБОРОТНИМ ЕЛЕМЕНТОМ x^2 СЕРЕД ІЗОТОПІВ ГРУПИ КЛЕЙНА

Галина Крайнічук, Ігор Пилявець, Євгеній Радченко

Вінницький національний технічний університет

krainichuk@ukr.net, igormorozov920@gmail.com, jenya.radchenko@gmail.com

Найпоширенішим способом для збереження конфіденційності інформації є її шифрування, принцип якого грунтується на перетворенні даних. Одним з різновидів алгоритмів шифрування є алгоритм, побудований на квазігрупах та їх парастрофних перетвореннях [1]. Власне квазігрупи, а точніше вхідні дані, за якими будується квазігрупа, використовуються як секретний ключ, а сам алгоритм шифрування описаний на парастрофних перетвореннях квазігрупи, згідно з тотожністю, яку вона задовольняє. Результат таблички Келі квазігрупи – латинський квадрат, тобто масив $n \times n$, де кожний елемент зустрічається в кожному рядку та кожному стовпчику лише один раз.

Квазігрупою називається групоїд $(Q;\cdot)$ такий, що для довільних $a, b \in Q$ система рівнянь $a \cdot x = b$, $y \cdot a = b$ має єдиний розв'язок. Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається: *середньою, лівою та правою CIP-квазігрупою*, якщо відповідно існують відображення ψ, υ, γ такі, що для всіх x, y виконуються рівності $\psi(x) \cdot yx = y$; $yx \cdot y = \upsilon(x)$; $y \cdot xy = \gamma(x)$, де ψ, υ, γ називаються *лівою, правою* та *середньою функцією оборотності* [2]. Як приклад з [3], результати описані над ізотопами групи Клейна ($\overline{x} \oplus \overline{x} = \overline{0}$) для CIP-квазігруп 4-го порядку з оборотним елементом x^2, що задовольняють тотожності:

$$x \cdot yx^2 = y\,,\ xy \cdot x^2 = y\,,\ x^2 y \cdot x = y\,,\ x^2 \cdot yx = y\,. \qquad (1)$$

Твердження 1. *Квазігрупа* $(Q;\cdot)$ *задовольняє тотожності (1) над ізотопами групи Клейна* $\left(\mathbb{Z}_2^2;\oplus,\overline{0}\right)$ *тоді і тільки тоді, коли вона має канонічний розклад* $x \cdot y = \overline{x}A \oplus \overline{y}A^{-1} \oplus \overline{a}$, *де матриця* $A \in \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$, *довільний векторний елемент* $\overline{a} \in \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\}$.

Наслідок 1. *Кількість квазігруп 4-го порядку, що визначаються* (1) *над ізотопами групи Клейна є 8, латинські квадрати яких подано в таблиці* 1.

Твердження 2. *Многовид* $\mathfrak{I}$ *середніх CIP-квазігруп з оборотним елементом* x^2 *визначається однією із тотожностей* (1).

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_29.pdf

Таблиця 1. Таблиці Келі CIP-квазігруп над ізотопами групи Клейна

00				
·	0	1	2	3
0	0	3	1	2
1	2	1	3	0
2	3	0	2	1
3	1	2	0	3

01				
1)	0	1	2	3
0	1	2	0	3
1	3	0	2	1
2	2	1	3	0
3	0	3	1	2

10				
3)	0	1	2	3
0	2	1	3	0
1	0	3	1	2
2	1	2	0	3
3	3	0	2	1

11				
5)	0	1	2	3
0	3	0	2	1
1	1	2	0	3
2	0	3	1	2
3	2	1	3	0

•	0	1	2	3
0	0	2	3	1
1	3	1	0	2
2	1	3	2	0
3	2	0	1	3

2)	0	1	2	3
0	1	3	2	0
1	2	0	1	3
2	0	2	3	1
3	3	1	0	2

4)	0	1	2	3
0	2	0	1	3
1	1	3	2	0
2	3	1	0	2
3	0	2	3	1

6)	0	1	2	3
0	3	1	0	2
1	0	2	3	1
2	2	0	1	3
3	1	3	2	0

Наслідок 2. *Тотожності* (1) *рівносильні і виконуються в квазігрупах, заданих табличками Келі 1) та 2).*

Твердження 3. *Многовид* ${}^{\ell}\mathfrak{I}$ *правих CIP-квазігруп з оборотним елементом* x^2 *визначається однією із тотожностей:*

$$x(yx\cdot x)=yx\cdot y\,,\ (y\cdot xy)x=y\cdot yx\,,\ y\left(\overset{\ell}{x\cdot x}\right)\cdot y=x\,,\ y\cdot\left(\overset{r}{x\cdot x}\right)y=x\,. \tag{2}$$

Наслідок 3. *Тотожності* (2) *рівносильні і виконуються в квазігрупах, заданих табличками Келі 3) та 4).*

Твердження 4. *Многовид* ${}^{r}\mathfrak{I}$ *лівих CIP-квазігруп з оборотним елементом* x^2 *визначається однією із тотожностей:*

$$x(y\cdot xy)=x\,,\ (yx\cdot y)x=x\,. \tag{3}$$

Наслідок 4. *Тотожності* (3) *рівносильні і виконуються в квазігрупі, заданою табличкою Келі 5) та 6).*

1. *Dimitrova V., Bakeva V., Popovska-Mitrovik A., Krapez A.* Cryptographic properties of parastrophic quasigroup transformation / In: Markovski S., Gusev M. (eds) ICT Innovations 2012. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 207. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37169-1_23
2. *Сохацький Ф.М., Луценко А.В., Фриз І.В.* Побудова квазігруп з властивістю оборотності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 4. – С. 5–17.
3. *Сохацький Ф.М.* Invertible binary functions and quasigroups of the order four // XIII Міжн. алгебр. конф. в Україні: 6–9 лип. 2021 р. – КНУ ім. Т. Шевченка, 2021. – С. 77–78.

CIP-QUASIGROUPS OF THE 4TH ORDER WITH THE INVERTIBLE ELEMENT X^2 OVER ISOTOPES OF THE KLEIN GROPE

The description of 8 CIP-quasigroups of 4th order over isotopes of the Klein group is given. They are depicted in the form of Cayley tables. The conditions for the canonical decomposition of CIP-quasigroups are established. A list of equivalent identities that define the corresponding varieties of CIP-quasigroups is given.

УДК 519.6

КВАЗІПОЛІНОМІАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ГАММЕРШТЕЙНА

Юрій Тополюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

top@iapmm.lviv.ua

Будуємо розв'язок інтегрального рівняння типу Гаммерштейна:

$$f(\zeta)=\int_{-1}^{1} F(\zeta')K(c,\zeta,\zeta')e^{i\arg f(\zeta')}d\zeta' . \qquad (1)$$

Тут функція $F(\zeta')$ і ядро $K(c,\zeta,\zeta')=\sin c(\zeta-\zeta')/\pi(\zeta-\zeta')$ є відомі, числовий параметр $c>0$. Функція $f(\zeta)\in L_2(-1,1)$ є шуканою.

Для розв'язування рівняння (1) використовували як ітераційні [1], так і аналітично-числові методи [2]. При аналітично-числовому підході використовували поліноміальне подання розв'язку. При цьому розв'язання (1) зведено до системи транценцендентних рівнянь відносно обернених величин до коренів, так званого, породжуючого полінома. Вперше такий підхід було використано в [3].

Тут для розв'язання рівняння (1) використано подання розв'язку у вигляді квазімногочлена з невідомими комплексними параметрами.

Відомо, що квазімногочлен подається у вигляді:

$$g(v)=\sum_{k=0}^{n} p_k(v)e^{\tau_k v}\ ,\ \tau_0=0\ ,$$

де $p_k(v)$ – поліном степеня k, τ_k – комплексні параметри.

Скористаємось частковим випадком розвинення Вейерштраса для квазімногочлена:

$$g(v)=\prod_{k=0}^{N}\left(1-\frac{v}{v_k}\right)e^{\frac{v}{v_k}}, \qquad (2)$$

де $v_k=v'_k+iv''_k$ – послідовність невідомих комплексних параметрів, N – на-

туральне число. Для простоти запису позначимо $\eta_k = 1/v_k$ і (2) перепишемо у вигляді:

$$g(v) = \prod_{k=0}^{N} (1-\eta_k) e^{\eta_k} . \tag{3}$$

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді:

$$f(\zeta) = |f(\zeta)| e^{i \arg g(\zeta)} . \tag{4}$$

Підставивши (4) в (1), домноживши ліву і праву частини на $e^{i \arg g(\zeta)}$ і виділивши дійсну й уявну частини, отримаємо:

$$|f(\zeta)| = \int_{-1}^{1} F(\zeta') K(c,\zeta,\zeta') \operatorname{Re}\left[e^{i[\arg g(\zeta') - \arg g(\zeta)]} \right] d\zeta' , \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} F(\zeta') K(c,\zeta,\zeta') \operatorname{Im}\left[e^{i[\arg g(\zeta') - \arg g(\zeta)]} \right] d\zeta' = 0 . \tag{6}$$

Вираз (6) можна факторизувати до системи трансцендентних рівнянь відносно невідомих комплексних параметрів η_k $(k = 1,2,...,N)$. Знайшовши ці параметри і підставивши в (3), знайдемо в (4) аргумент (фазу) шуканої функції $f(\zeta)$. Вираз (5) дає подання модуля цієї функції і остаточно розв'язує задачу в класі квазімногочленів (2).

Одним зі способів факторизації (6) є метод найменших квадратів. Якщо нев'язка при цьому буде дорівнювати нулю, одночасно вирішується й питання існування розв'язку.

1. *Bulatsyk O.O., Katsenelenbaum B.Z., Topolyuk Yu.P., Voitovich N.N.* Phase Optimization Problems. – Weinheim: WILEY-VCH, 2010. – 318 p.
2. *Voitovich N.N., Topolyuk Yu.P., Reshnyak O.O.* Approximation of compactly supported functions with free phase by functions with bounded spectrum // AMS. Fields Inst. Commun. – 2000. – **25**. – P. 531–541.
3. *Voitovich N.N., Topolyuk Yu.P.* Antenna synthesis according to prescribed amplitude radiation pattern and the phase problem // Proc. of II Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), September 26–29, 1997, Lviv, Ukraine. – 1997. – P. 90–92.

QUASIPOLINOMIAL SOLUTION OF A HAMMERSTEIN-TYPE INTEGRAL EQUATION

An integral equation of the Hammerstein type is solved in the class of quasipolynomials.

УДК 519.2

СТИСНЕНА ОЦІНКА БЕТА КОЕФІЦІЄНТА

Тарас Заболоцький, Олександр Цяпа

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua, sashatsyapa@gmail.com

Роботу присвячено побудові та дослідженню властивостей стисненої оцінки бета коефіцієнта, який часто використовується на практиці для оцінки ризику портфеля фінансових активів у порівнянні з деяким еталонним портфелем. Такий підхід можна обґрунтувати тим, що звичні для використання на практиці вибіркові оцінки для невідомих параметрів є ефективним у випадку наявності великих вибірок історичних значень у порівнянні з кількістю параметрів, які мають бути оцінені [2]. При недостатньому обсягу вибірки історичних значень властивості вибіркових оцінок є незадовільними [3]. Один з підходів до вирішення цієї проблеми ґрунтується на асимптотиці великої розмірності чи асимптотиці Колмогорова [4]. За такого підходу припускається, що і кількість спостережень для побудови вибіркових оцінок і кількість невідомих параметрів прямують до нескінченості. Ефективним рішенням в цьому випадку є використання стиснених оцінок.

Під час дослідження використовувалися наступні припущення:

1. Ваги портфелів інвестора $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ та еталонного $\mathbf{w}_b=(w_{b1}, w_{b2}, \ldots, w_{bk})'$ є сталими та містяться на відрізку $[0; 1]$.

2. Матриця спостережень $\mathbf{X}_n=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ складається з n k-вимірних векторів дохідностей активів $\mathbf{x}_i$, причому для всіх $i\in\{1,\ldots,n\}$ $\mathbf{x}_i$ нормально розподілений з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}_n$ та матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}_n$.

3. Матриця коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}_n$ є невипадкова $k\times k$ додатно визначена матриця.

4. Існує випадкова $k\times n$ матриця $\mathbf{Y}_n$, така, що $\mathbf{X}_n=\boldsymbol{\mu}_n\mathbf{1}_n'+(\boldsymbol{\Sigma}_n)^{1/2}\mathbf{Y}_n$, де $\mathbf{1}_n$ n-вимірний вектор складений з 1, причому всі елементи матриці $\mathbf{Y}_n$ мають рівномірно обмежені моменти порядку $4+\varepsilon$ для деякого $\varepsilon>0$.

5. $k/n\to c\in(0;1)$ при $n\to+\infty$.

В роботі розглядається стиснена оцінка бета коефіцієнта $\hat{\beta}_{sh}$ вигляду

$$\hat{\beta}_{sh}=\alpha\hat{\beta}+(1-\alpha)\beta_0, \qquad (1)$$

де β_0– довільна константа, $\hat{\beta}$ – вибіркова оцінка бета коефіцієнта, α – параметр стиснення. Використовуючи результати роботи [1], за виконання припущень 1-2, та мінімізуючи відносно α функцію втрат вигляду

$$L(\beta,\hat{\beta}_{sh}) = E(\beta-\hat{\beta}_{sh})^2, \tag{2}$$

де

$$\beta = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{w}_b}{\mathbf{w}_b'\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{w}_b}$$

– точне значення бета коефіцієнта, отримаємо, що функція (2) досягає мінімуму при значенні параметра стискання α

$$\alpha^* = \frac{(\beta-\beta_0)^2}{(\beta-\beta_0)^2 - \frac{1}{n-3}\left(\frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{w}}{\mathbf{w}_b'\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{w}_b} - \beta^2\right)}. \tag{3}$$

Оскільки оптимальна інтенсивність стискання (3) залежить від невідомої на практиці матриці коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}_n$, то в роботі доведено також, що

$$\left|\alpha^* - \hat{\alpha}^*\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{a.s} 0,$$

де $\hat{\alpha}^*$ – вибіркова оцінка параметра α^* (3). Отже, підставляючи в (1) замість параметра α вибіркову оцінку оптимальної інтенсивності стискання $\hat{\alpha}^*$, стиснена оцінка бета коефіцієнта може бути використана на практиці.

1. *Bodnar T., Gupta A.K., Vitlinskiy V., Zabolotskyy T.* Statistical inference for the β coefficient // Risks. – 2019. – № 7. – 56.
2. *Le Cam L., Yang G.L.* Asymptotics in statistics: Some basic concepts. – NY: Springer, 2000. – 300 p.
3. *Ledoit O., Wolf M.* Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection // Journal of empirical finance. – 2003. – **10**. – P. 603–621.
4. *Bai Z.D., Silverstein J.W.* Spectral analysis of large dimensional random matrices. – NY: Springer, 2010. – 568 p.

SHRINKAGE ESTIMATOR OF BETA COEFFICIENT

In the paper, the shrinkage estimator for beta coefficient is constructed. Using the precise probability properties of the sample estimator of the beta coefficient, the optimal shrinkage intensity is found, and it is proved that the sample estimator of this parameter converges almost surely to the true value of the optimal shrinkage intensity. It means that a constructed shrinkage estimator with a beta coefficient can be used in practice.

УДК 533.9-524.1-524.8

МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ ТА УДАРНІ ХВИЛІ В КОСМІЧНІЙ ПЛАЗМІ

Богдан Гнатик

Астрономічна обсерваторія
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

bhnatyk@knu.ua

Магнітогідродинамічні процеси та ударні хвилі в космічній плазмі є ключовими елементами високотемпературних вибухоподібних процесів, що проявляються у всехвильовому електромагнітному та гравітаційному випромінюванні разом із потоками нейтрино та космічних променів. Турбулентні течії замагніченої плазми часто супроводжуються виникненням ударних хвиль, на фронтах яких деяка початкова частка заряджених частинок ефективно прискорюється до релятивістських швидкостей з максимальними спостережуваними енергіями понад 10^{20} еВ. Взаємодіючи з космічною плазмою та полями, такі частинки – космічні промені надвисоких енергій (КПНВЕ) – генерують нетеплове електромагнітне випромінювання та космогенні нейтрино [1]. Детектування астрофізичних джерел в електромагнітному, нейтринному, гравітаційно-хвильовому та космічно-променевому каналах (а це завдання нової області – багатоканальної астрономії) відкриває нові перспективи обґрунтування стандартної теорії фундаментальних взаємодій та стандартної теорії Великого Вибуху [2]. В роботі будуть представлені нові результати дослідження фізичних процесів в астрофізичних об'єктах – прискорювачах КПНВЕ.

1. *Acharya B.S. et al. (incl. Hnatyk B.).* Science with the Cherenkov Telescope Array. – World Scientific Publishing Co., Singapore, 2019. – 364 p.
2. *Kobzar O., Hnatyk B., Marchenko V., Sushchov O.* Search for ultra high energy cosmic rays from radiogalaxy Virgo A//MNRAS. – 2019. – **484**, No. 2. – P. 1790–1799.

MAGNETOHYDRODYNAMIC PROCESSES AND SHOCK WAVES IN SPACE PLASMA

Magnetohydrodynamic processes and shock waves in space plasma are key elements of high-temperature explosive processes that manifest themselves in multiwavelength electromagnetic and gravitational emission together with neutrino and cosmic ray fluxes. Multimessenger astronomy opens up new possibilities in substantiating the standard model of fundamental interactions, the cosmological standard theory of the Big Bang and search for new physics beyond the standard model.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_09.pdf

UDC 538.9

CLASSICAL NUCLEATION THEORY AND STOCHASTIC KINETIC MEAN FIELD APPROACH

Mykola Pasichnyy

Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy

pasichnyy@ukr.net

The nucleation stage of the first-order phase transformations in alloys is crucial for the prediction of mechanical, electrical, and magnetic properties of multiphase materials. During the last decades, new experimental possibilities have been developed enabling direct observation of nuclei formation during aging and solid-state reactions. Yet many details of the nucleation stage still remain a mystery.

The two most widespread methods of nucleation kinetics investigation are the Fokker – Plank approach and Monte Carlo simulation. The Fokker – Plank approach seems a good solution but it contains a number of not very well-determined parameters and not very well-proved phenomenological assumptions. Monte Carlo is more direct and atomistic, but the level of fluctuations in this method is so high that it is very difficult to distinguish the structures in small volumes.

Recently, our team along with the team of Debrecen University developed a new method called Stochastic Kinetic Mean Field (SKMF) [1 – 3]. This method combines George Martin`s mean field atomistic approach with the noise of local atomic fluxes. SKMF approach is inherently nonlinear and therefore applicable to the early stages of solid-state reactions under a sharp concentration gradient. Within this approach, the probability of atomic exchanges is proportional to the difference of exponents of chemical potentials, instead of the difference of just chemical potentials. Moreover, noise is introduced directly into atomic jumps quantity, instead of noise of composition.

Stochastic Kinetic Mean Field modeling on nucleation in supersaturated solution demonstrates the validity of Classical Nucleation Theory. The nucleation process consists of two main steps: at first, the embryo of the new phase appears with almost optimal composition and then this embryo increases its size at almost constant composition. The logarithm of nucleation time is inversely proportional to the squared supersaturation. The logarithm of nucleation time is a linear function of the inverse squared noise amplitude.

1. *Erdelyi Z., Pasichnyy M., Bezpalchuk V., Toman J.J., Gajdics B., Gusak A.M.* Stochastic kinetic mean field model // Computer Physics Communications. – 2016. – **204**. – P. 31–37.
2. *Bezpalchuk V.M., Pasichnyy M.O., Gusak A.M.* Application of a stochastic kinetic mean field (SKMF) method to ordering substitutional atoms in macro- and nanosize F.C.C. lattices // Metallofizika i Noveishie Tekhnologii. – 2016. – **38**. – P. 1135–1144.
3. *Bezpalchuk V., Abdank-Kozubski R., Pasichnyy M., Gusak A.* Tracer diffusion and ordering in fcc structures – stochastic kinetic mean-field method vs. kinetic monte carlo // Defect and Diffusion Forum. – 2018. – **383**. – P. 59–65.

УДК 621.01

СИМЕТРИЧНЕ ПОДАННЯ МАТРИЦІ ПОВОРОТУ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ТЕОРІЇ ГІРОСКОПІЧНИХ ЯВИЩ

Костянтин Авдонін

Військовий інститут телекомунікацій і інформатизації імені Героїв Крут

avdonink13@gmail.com

У роботі запропоновано подання елементів тривимірної матриці повороту у вигляді функцій від трьох незалежних кутів, відмінних від кутів Ейлера, яке має високу ступінь симетрії, відносно осей координат. Шляхом чисельного знаходження розв'язків рівняння Ейлера здійснене математичне моделювання впливу однорідного електричного поля на механічний гіроскоп, який має відмінний від нуля електричний дипольний момент, з врахуванням сил опору, які вважаються пропорційними до кутової швидкості.

Висока ступінь симетрії запропонованого у роботі подання елементів тривимірної матриці повороту та проекцій кутової швидкості, відносно осей координат, дає нові можливості для пошуку розв'язків рівняння Ейлера у явному вигляді та спрощує створення обчислювальних програм для чисельних методів знаходження розв'язків.

В якості прикладу, на основі запропонованого подання елементів матриці повороту у середовищі Mathcad створено обчислювальну програму, яка дає змогу моделювати вплив однорідного електричного поля на обертальний рух симетричного гіроскопу.

1. *Apostolyuk V.*, *Gorbunovich I.* Mathematical model of coriolis vibratory gyroscopes motion trajectory // Mechanics of Gyroscopic Systems. – 2010. – No. 21. – P. 5–12.
2. *Павловський М.А.* Теорія гироскопів. – Київ: Вища школа, 1986. – 303 с.

SYMMETRIC REPRESENTATION OF THE ROTATION MATRIX AND ITS APPLICATION TO THE THEORY OF GYROSCOPIC PHENOMENA

The paper proposes a representation of the elements of the three-dimensional rotation matrix in the form of functions from three independent angles, different from the Euler angles, which has a high degree of symmetry with respect to the coordinate axes. By numerically finding the solutions of the Euler equation, a mathematical modeling of the effect of a uniform electric field on a mechanical gyroscope, which has a non-zero electric dipole moment, taking into account the resistance forces, which are considered proportional to the angular velocity, was carried out.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_25.pdf

УДК 532.516

ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є–СТОКСА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ АЕРОГІДРОДИНАМІКИ

Дмитро Редчиць, Олег Польовий, Світлана Моісеєнко, Володимир Заіка

Інститут транспортних систем і технологій НАН України

redchits_da@ua.fm, obp.dnepr@gmail.com, 4moiseenko@ukr.net, vladimir_zaika@ukr.net

На сьогоднішній день обчислювальна аерогідродинаміка (Computational Fluid Dynamics – CFD) є однією зі складових процесу проектування в аерокосмічній галузі, двигунобудуванні, вітроенергетиці, що обумовлено меншою вартістю чисельних експериментів у порівнянні з натурними. Основне завдання CFD є відтворення реальних фізичних процесів із максимальним ступенем достовірності. За рахунок цього вдається глибше зрозуміти процеси, що відбуваються, виробити рекомендації щодо аеродинамічних форм проектованого пристрою близьких до оптимальних. Подібні розрахунки дозволяють отримати докладні характеристики пристрою задовго до його виготовлення та впровадження, суттєво скорочуючи витрати на дорогі продувки в аеродинамічних трубах, які є при стандартних методах проектування.

Автори цієї доповіді накопичили великий досвід розробки та застосування методів обчислювальної аерогідродинаміки для вітроенергетики, високошвидкісного наземного транспорту, надзвукових літальних апаратів, турбінобудування, управління відривом потоку за допомогою плазмових актуаторів, тепломасообміну у внутрішніх та зовнішніх течіях.

Авторами розроблено спеціалізований CFD пакет, у якому досягнуто компромісу між необхідними обчислювальними ресурсами та якістю одержуваних результатів. З одного боку, реалізовано повний підхід обчислювальної гідродинаміки на основі рівнянь Нав'є–Стокса, включаючи декілька диференціальних моделей турбулентності, а також багатоблочний підхід для опису течій у багатозв'язних областях. Розроблений CFD пакет дає змогу вирішувати зв'язані задачі динаміки та аеродинаміки, що включають електродинамічні процеси, електрохімію, багатофазні середовища, процеси горіння, плазмову кінетику. Отримані результати дозволили сформулювати нові технічні ідеї, отримати нові уявлення про фізику відриву потоку та способи його керування, відтворити реальну структуру течії в широкому діапазоні швидкостей від нестисливих течій до надзвукових.

APPLICATION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS OF FLUID DYNAMICS

A specialized CFD package has been developed, in which a compromise has been reached between the necessary computing resources and the quality of the obtained results. A complete computational hydrodynamics approach based on the Navier-Stokes equations is implemented, including several differential turbulence models for multi-block regions.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_28.pdf

УДК 512.548.7

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

Андрій Латиш

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

andrii.latysh@gmail.com

Розглядається задача оптимального керування для еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь [1] в банахових просторах до моменту виходу розв'язків із деякої області в банаховому просторі:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Au + f_1\left(t, u_t\right) + f_2\left(t, u_t\right) z(t), \\ &u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$\mathcal{J}(z) = \int_0^{\tau} L\left(t, u_t, z(t)\right) dt \to \inf, \tag{2}$$

де $h > 0$, A – лінійний (необмежений) оператор в банаховому просторі $X (A : X \to X)$, $u_t = u(t + \Theta) \in C([-h, 0]; X)$ для кожного $t \in [0, T]$, D – деяка область в $[-h, T] \times C$, ∂D – її межа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, τ – момент виходу розв'язку $(t,\, u_t)$ на границю ∂D, $f_1 : D \to X$, $f_2 : D \to \mathcal{L}(X, X)$, де $\mathcal{L}(X, X)$ – простір лінійних обмежених операторів із X в X з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, $z(t) \in X$ – параметр керування.

Отримано достатні умови існування оптимальної пари для цієї задачі оптимального керування [2].

1. *Hale J.* Theory of functional differential equation. – New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1977. – 366 p.
2. *Kichmarenko O., Stanzhytskyi O.* Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differentials equations // Nonlinear Dynamics and System Theory. – 2018. – **18**, No. 2. – P. 196–211.

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SOME CLASS EVOLUTIONAL FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

This report is concerned with the optimal control problem for some class evolutional parabolic functional-differential equations in the Banach space. The main problem of optimal control is considered until the solution exits the domain. Sufficient conditions for the existence of an optimal pair have been obtained.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_30.pdf

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ І ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

УДК 517.524

CORRESPONDING CONTINUED FRACTIONS IN MANY VARIABLES

Khrystyna Kuchminska

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine

khkuchminska@gmail.com

Correspondence of a continued fraction in many variables to formal multiple power series is the basis of the talk. The correspondence principle is one of the two methods of analytic function representations by many-dimensional continued fractions. Although the main ideas of correspondence go back to Gauss (1813) and Perron (1957), the general theory is described by Jones and Thron (1975, 1979).

The concept of correspondence is also possible to use to define Padé approximants. We consider how the ideas for continued fractions may be generalized to functions of N variables. In 1976-1978 M. O'Donohoe proposed a two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions and defined them as S_2-fractions, and then this idea was used to get S_N-fractions [2]. The investigation didn't extend so far but can be a foundation for further research. In 1978 Kh. Kuchminska proposed a two-variable generalization of the C-fractions with two orders of correspondence $n+1$ and $2n+1$ [1]. Then in 1980 W. Siemaszko proposed his generalization of the C-fractions [3].

Corresponding definition is being formulated, the structure of proposed corresponding continued fractions, and algorithms of the formal multiple power series expansion into the corresponding fractions with the order of correspondence of its nth approximants $n+1$ and $2n+1$ have been constructed.

Let us consider a sequence of rational functions

$$R_k(z) = P_m(z) / Q_l(z),\ z = (z_1, z_2, ..., z_N) \in C^N,\ k = 1, 2, ...,$$

$$\deg P_m(z) = m(N), \quad \deg Q_l(z) = l(N).$$

Let us decompose the function $R_k(z)$ into the formal N-multiple power series (FNPS) at $O = (0, ..., 0)$. It is possible, when $Q_l(0) \neq 0$. We denote by $T(R_k)$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_01.pdf

the decomposition of $R_k(z)$ into the N-multiple Taylor series at $O=(0,...,0)$.

Definition 1. *The sequence* $\{R_k(z)\}$ *is corresponding to the formal* N*-multiple power series* $P(z)$

$$P(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, z=(z_1,...,z_N)\in C^N, k=(k_1,...k_N)\in Z_+^N, \quad |k|=k_1+...+k_N,\ z^k=z_1^{k_1}...z_N^{k_N} \text{ at } O=(0,...,0), \tag{1}$$

if $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(P-T(R_k(z)))=\infty,\ \lambda(P)=\begin{cases}\infty, & P=0,\\ s, & P\neq 0,\end{cases}\ s=|k|.$

Consider an N-dimensional continued fraction (NDCF) corresponding to $P(z)$ in (1)

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{D}}\frac{a_{i,i,...,i}}{\Phi_i(z)}, \tag{2}$$

where $\Phi_i(z)$ is the sum of p-dimensional continued fractions ($p=1,2,...,N-1$).

Definition 2. *The* N*-dimensional continued fraction (NDCF) is corresponding to (FNPS)* $P(z)$, *if the sequence of its approximants is correspondent to* $P(z)$ *at* $O=(0,...,0)$.

Theorem 1. *Let the* N*-dimensional regular* C*–fraction (2) converges uniformly on every compact subset of a certain bounded domain* $D\subset\mathbb{C}$ *(which contains the origin) to an analytic function* $f(z),\ z\in D$.

Then the formal N*-multiple power series (1) is correspondent to the* N*-dimensional regular* C*–fraction (2) and also converges in the domain* D *to the function* $f(z)$.

1. *Кучмінська Х.Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
2. *Murphy J.A., O'Donohoe M.R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. Appl. Math. – 1978. – **4**, № 3. – P. 181–190.
3. *Siemaszko W.* Branched continued fraction for double power series // J. Comp. Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.

ВІДПОВІДНІ НЕПЕРЕРВНІ ДРОБИ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Побудовано розвинення кратного степеневого ряду у відповідний багатовимірний неперервний дріб, використовуючи як метод Вісковатова, так і його аналоги. Запропоновано теорему про збіжність відповідного ряду.

UDC 517.5

SPECTRA OF ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONS, GENERATED BY SEQUENCES OF POLYNOMIALS ON BANACH SPACES AND OPERATIONS ON SPECTRA

Svitlana Vasylyshyn

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

sv.halushchak@gmail.com

Algebras of analytic functions on a Banach space generated by a countable number of polynomials naturally appear as algebras of invariants with respect to actions of groups of symmetry on the Banach space. Typical examples of such algebras are algebras of symmetric analytic functions on ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, with respect to the group of permutations of the basis vectors or algebras of symmetric analytic functions of bounded type on $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, with respect to the group of automorphisms of a measure space Ω. The problem of the description of spectra of such kind of algebras is non-trivial ever in the finite dimensional case. For example, the famous Hilbert's fourteenth problem on invariant theory has a negative solution due to the counterexample of Nagata.

Let $\mathbb{I} = \{I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots\}$ be the sequence of n-homogeneous complex-valued polynomials on the space ℓ_p, $1 \leq p \leq +\infty$, defined as $I_n^{(p)}(x) = x_n^n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in \ell_p$. It is easy to check that the polynomials $I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots$ are continuous and algebraically independent. In this talk, we consider the particular case of countable generated algebras - the algebras generated by the polynomials $\{I_n^{(p)}\}_{n=1}^{\infty}$. We denote by $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$ the subalgebra of the Fréchet algebra of complex-valued entire functions of bounded type $H_b(\ell_p)$, generated by the set $\mathbb{I}$. We also denote by $M_{b\mathbb{I}} = M_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$ the spectrum (the set of all continuous complex-valued linear multiplicative functionals = continuous complex-valued homomorphisms = continuous characters) of $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$.

In the first part of the talk, we recall some basic notions on the theory of analytic functions on a Banach space.

In the second part of the talk, we provide some information about the spectrum $M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ of the algebra $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$.

In the third part of the talk, we consider some shift type operations that can be performed on the set $\tau(M_{b\mathbb{I}}(\ell_p))$, where the mapping $\tau : M_{b\mathbb{I}}(\ell_p) \mapsto \mathbb{C}^{\infty}$ is defined by $\tau(\varphi) = \{\varphi(I_1^{(p)}), \varphi(I_2^{(p)}), \ldots\}$ for every character $\varphi \in M_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$.

Acknowledgements.This research was funded by the National Research Foundation of Ukraine, 2020.02/0025, 0120U103996.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_16.pdf

УДК 517.98

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГЕБР АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Андрій Загороднюк

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua

Аналітичні функції у нескінченновимірних просторах викликають інтерес у багатьох дослідників нелінійного функціонального аналізу впродовж кількох останніх десятиріч. Через відсутність локальної компактності у нескінченновимірному банаховому просторі, аналітичні функції можуть мати досить складну природу та несподівані властивості.

Алгебри всіх аналітичних функцій $H(X)$ на банаховому просторі X досліджувалися у роботах Л. Нахбіна, Х. Мухіки, М. Шатенлогера та інших. При цьому було встановлено: якщо X – нескінченновимірний, то алгебра $H(X)$ є неметризовною і в $H(X)$ завжди існує функція, яка є необмеженою на деякій обмеженій множині (фукція необмеженого типу).

В роботах Р. Арона, Б. Коула, Т. Гамеліна було виділено підалгебру $H_b(X) \subset H(X)$ функцій обмеженого типу, тобто $H_b(X)$ складається з усіх цілих аналітичних функцій на просторі X, які є обмеженими на всіх обмежених множинах простору X. Алгебра є метризованою (алгеброю Фреше) і її властивості вдалось досить повно описати у серії статей низки авторів. Так, у роботах Р. Арона, П. Бернера, А. Давіє, Т. Гамеліна було встановлено, що кожна аналітична функція f обмеженого типу може бути продовжена до аналітичної функції обмеженого типу $\widetilde{f}$ на другому спряженому просторі X'' і оператор продовження $f \longrightarrow \widetilde{f}$ є гомоморфізмом між алгебрами Фреше $H_b(X)$ і $H_b(X'')$.

При дослідженні комутативних топологічних алгебр важливо вміти описати множину комплекснозначних гомоморфізмів (спектр) цієї алгебри. У випадку алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі X природніми гомоморфізмами є функціонали, які функції f ставлять у відповідність її значення в точках $x \in X$ (функціонали значень в точках простору). Відомо, що для багатьох випадків спектр алгебри $H(X)$ обмежується множиною функціоналів значень в точках простору X. Проте, у випадку алгебри $H_b(X)$, елементами спектра є функціонали значень продовження Арона-Бернера $\widetilde{f}$ функції f у точках X''. Крім того, у роботах доповідача показано, що для повного опису спектра алгебри $H_b(X)$ слід

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_18.pdf

брати до уваги точки другого спряженого до симетричного проективного n-го тензорного степеня простору X, $n \in \mathbb{N}$.

Підалгебри алгебр $H_b(X)$, зокрема алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу, досліджувалися у роботах Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, М. Маестра, Д. Гарсія і у працях представників Львівської та Івано-Франківської математичних шкіл (О.В. Лопушанський, І.В. Чернега, З.Г. Новосад, Т.В. Василишин, В.В. Кравців та ін.).

У доповіді буде представдено результати стосовно підалгебр симетричних і суперсиметричних аналітичних функцій на просторах з симетричним базисом та алгебр, породжених послідовностями поліномів. Зокрема, буде описано спектри деяких алгебр симетричних аналітичних функцій та наголошено на відкритих проблемах у цьому напрямку.

Автор висловлює подяку Національному фонду досліджень України за підтримку досліджень в рамках проєкту 2020.02/0025.

1. Chernega I., Zagorodnyuk A. Supersymmetric Polynomials and a Ring of Multisets of a Banach Algebra // Axioms. – 2022. – Vol. 11, 511.
2. Chernega I., Zagorodnyuk A. Unbounded symmetric analytic functions on ℓ_1 // Mathematica Scandinavica. – 2018. – Vol. 122. – P. 84–90.
3. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces // Eur. J. Math. – 2020. – Vol. 6. – P. 153–163.
4. Chopyuk Y., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Rings of Multisets and Integer Multinumbers // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, 778.
5. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // RACSAM. - 2020. - Vol. 114, 56.
6. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0,+\infty]$ // Mathematische Nachrichten. - 2018. - Vol. 291. - P. 1712-1726.
7. Halushchak S.I. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a sequence of polynomials // Carpathian Math. Publ. - 2019. - Vol. 11. - P. 311-320.
8. Zagorodnyuk A., Hihliuk A. Entire analytic functions of unbounded type on Banach spaces and their lineability // Axioms. - 2021. - Vol. 10. - 150.
9. Lopushansky O., Zagorodnyuk A. Infinite Dimensional Holomorphy: Spectra and Hilbertian Structures. - Krakow: AGH University Press, 2013. - 142 p.

STUDY OF ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONS ON INFINITE-DIMENSIONAL BANACH SPACES

The report will present results regarding subalgebras of symmetric and supersymmetric analytic functions on spaces with a symmetric basis and algebras generated by sequences of polynomials. In particular, the spectra of some algebras of symmetric analytic functions will be described and open problems in this direction will be emphasized.

УДК 517.98

ЧИСЛЕННЯ ВЕЙЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ПІВГРУП

Віра Лозинська

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

vlozynska@yahoo.com

Числення Вейля і зірковий добуток Мойала відіграють центральну роль у квантовій механіці на фазових просторах. Закон композиції функцій на фазовому просторі, що відповідає добутку операторів у гільбертовому просторі, був записаний ще фон Нейманом (1931 р.) в термінах сплетеної згортки. Моделі некомутативної теорії поля конструюються заміною звичайних добутків полів у функціональні операції із зірковими добутками. Дослідженням у цьому напрямку присвячено роботи, зокрема, Neerven J.V., Portal P. Інші дослідження, що стосуються тематики роботи, можна знайти у Лопушанського О.В., Шарина С.В. [1], [2].

Нехай $S^{\alpha,\beta}$ є банаховим простором комплексних функцій φ на $\mathbb{R}$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}} = \max_{0\le m\le\alpha,\,0\le n\le\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^m\partial^n\varphi(t)\right|, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\partial^n := d^n/dt^n$ $(n\in\mathbb{N})$. Кожне включення $S^{\alpha,\beta}\hookrightarrow S^{\alpha_1,\beta_1}$ є компактним, де $\alpha_1<\alpha$ і $\beta_1<\beta$. Розглянемо простір Шварца $S := \bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+} S^{\alpha,\beta}$ основних функцій, наділений топологією проективної границі $\varprojlim S^{\alpha,\beta}$ відносно цих включень. Спряжений до S простір S' називають простором розподілів (узагальнених функцій) повільного росту. Відомо [3, IV], що S і S' – монтелеві ядерні простори. Більше того, S є так званим FS-простором, а S' – DFS-простором. Нехай $S'(\mathbb{R}_+)$– замкнений підпростір S' тих розподілів, носії яких містяться в $[0,\infty)$. $S'(\mathbb{R}_+)$ є монтелевим ядерним DFS-простором.

Нехай $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ є генераторами аналітичних півгруп $e^{-\mathrm{i}\xi\mathbf{P}}$ і $e^{\mathrm{i}\eta\mathbf{Q}}$ у банаховому просторі E. Числення Вейля є відображенням

$$f(x,y)\to f(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \widetilde{f}(\zeta)\mathbf{T}_\zeta d\zeta,$$

$$\mathbf{T}_\zeta := e^{\mathrm{i}(\eta\mathbf{Q}-\xi\mathbf{P})} = e^{-\mathrm{i}\eta\xi/2}e^{\mathrm{i}\eta\mathbf{P}}e^{-\mathrm{i}\xi\mathbf{Q}}, \quad \zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_06.pdf

де $f(x,y)$ належить до $S'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$. $\widetilde{f}(\xi,\eta) := \widehat{f}(\eta,-\xi)$ і

$$\widehat{f}(\zeta) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(x,y) e^{-\mathrm{i}(\eta y - \xi x)}\, dx\, dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

є симплектичним перетворенням Фур'є-Лапласа. Для сплетеної згротки маємо:

$$\widetilde{f} *_\hbar \widetilde{g} \to \frac{1}{(2\pi)^4} \int \widetilde{f}(\zeta')\, \widetilde{g}(\zeta'') \mathbf{T}_{\zeta'} \mathbf{T}_{\zeta''}\, d\zeta'\, d\zeta'' = f(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \cdot g(\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

де $\cdot$ – операторне множення в комутативній підалгебрі в $\mathcal{L}\left(\mathfrak{A}_\mathbf{P} \times \mathfrak{A}_\mathbf{Q}, E\right)$, $\mathfrak{A}_\mathbf{P} := \varprojlim \mathfrak{D}(\mathbf{P}^\alpha), \mathfrak{A}_\mathbf{Q} := \varprojlim \mathfrak{D}(\mathbf{Q}^\alpha)$.

Для стандартної симплектичної структури $\theta(\zeta,\zeta') = \zeta \cdot J\zeta' = \eta\xi' - \xi\eta', \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, що визначена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, виконується $\mathbf{T}_\zeta \mathbf{T}_{\zeta'} = e^{-\mathrm{i}\zeta \cdot J\zeta'/2} \mathbf{T}_{\zeta+\zeta'} = e^{-\mathrm{i}(\eta\xi' - \xi\eta')/2} \mathbf{T}_{\zeta+\zeta'}$.

Для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ коректно визначеними є степені операторів $\mathbf{P}^{\pm\alpha}$ і $\mathbf{Q}^{\pm\alpha}$ із відповідними щільними областями визначення $\mathfrak{D}(\mathbf{P}^{\pm\alpha})$ і $\mathfrak{D}(\mathbf{Q}^{\pm\alpha})$. Визначимо простір

$$\mathfrak{D}_A^\alpha := \mathfrak{D}(A^\alpha) \cap \mathfrak{D}(A^{-\alpha}), \quad \|w\|_{\mathfrak{D}^\alpha} := \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} \|A^m w\|, \text{ де } A^\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}^{\pm\alpha}, \\ \mathbf{Q}^{\pm\alpha}. \end{array} \right.$$

Із замкненості операторів $\mathbf{P}^{\pm\alpha}$ and $\mathbf{Q}^{\pm\alpha}$ слідує, що простори $\mathfrak{D}_\mathbf{P}^\alpha$ and $\mathfrak{D}_\mathbf{Q}^\alpha$ є повними для довільних $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Включення

$$\mathfrak{D}_\mathbf{P}^\alpha \hookrightarrow \mathfrak{D}_\mathbf{P}^\beta \hookrightarrow E, \qquad \mathfrak{D}_\mathbf{Q}^\alpha \hookrightarrow \mathfrak{D}_\mathbf{Q}^\beta \hookrightarrow E, \qquad 0 < \beta < \alpha, \tag{1}$$

є неперервними і щільними. Проективні границі

$$\mathfrak{A}_\mathbf{P} := \varprojlim \mathfrak{D}_\mathbf{P}^\alpha = \bigcap \left\{ \mathfrak{D}_\mathbf{P}^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \quad \mathfrak{A}_\mathbf{Q} := \varprojlim \mathfrak{D}_\mathbf{Q}^\alpha = \bigcap \left\{ \mathfrak{D}_\mathbf{Q}^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

є просторами Фреше відносно включень (1).

1. *Лопушанський О. В., Шарин С.В.* Застосування перетворення Лапласа узагальнених функцій повільного росту до побудови функціонального числення // Укр. мат. журн. – 2015. –Т. 67, № 11. – С. 1498– 1511.
2. *Лопушанский О. В., Шарин С.В.* Обобщенное функциональное исчисление типа Хилле-Филлипса для многопараметрических полугрупп // Сиб. мат. журн. – 2014. –55, № 1. – С. 131– 146.
3. *Schaefer H.* Topological vector spaces. - Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 294 p.

WEYL CALCULUS OF ANALYTIC SEMIGROUPS

We use the symplectic Fourier-Laplace transform of tempered distributions whose supports are located in $\mathbb{R}_+$ to construct a Weyl calculus for generators of analytic semigroups.

УДК 517.51

ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ФУНКЦІЇ, ЯКІ "ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ" E-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Олександр Барановський[1,2], **Микола Працьовитий**[2,1]

[1] *Інститут математики Національної академії наук України,*
[2] *Український державний університет імені Михайла Драгоманова*

baranovskyi@imath.kiev.ua, pratsiovytyi@imath.kiev.ua

У доповіді розглядається так зване E-зображення чисел з $(0,1]$ і вивчаються властивості деяких представників нескінченної сім'ї функцій, які «зберігають хвости» E-зображення. Ці функції використовуються для побудови перетворень півінтервалу $(0,1]$, які «зберігають хвости» E-зображення чисел.

Як відомо [4], для будь-якого числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність (q_n) натуральних чисел, $q_{n+1} \geq q_n$, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)\dots(q_n+1)} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \dots q_n \dots}. \tag{1}$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля* і однозначно визначається неспадною послідовністю натуральних чисел (q_n). Його можна записати в іншому вигляді:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)\dots(2+g_1+g_2+\dots+g_n)} \equiv \Delta^E_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}, \tag{2}$$

де $q_1 - 1 = g_1$, $q_{n+1} - q_n = g_{n+1} \in \mathbb{Z}_0 \equiv \{0,1,2,\dots\}$.

Ряд (2) називається *E-представленням*, а скорочений символічний запис $\Delta^E_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}$ — *E-зображенням* числа x, при цьому $g_n = g_n(x)$ — n-ою цифрою (символом) цього зображення.

Означення 1. Казатимемо, що функція f, яка визначена на $(0,1]$ і набуває значень з $(0,1]$, *зберігає хвости* E-зображень чисел, якщо для будь-якого $x \in (0,1]$ існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_08.pdf

Теорема 1. *Нехай i — фіксований натуральний параметр, d_i — функція «збільшення першої цифри»: $d_i(x) = \Delta^E_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\ldots g_n(x)\ldots}$, ω — функція зсуву цифр: $\omega(x) = \Delta^E_{g_2(x)g_3(x)\ldots g_n(x)\ldots}$. Перетворення $(0,1]$, означене рівністю*

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} d_i(x), & \text{якщо } 0 < x \le x_1 \equiv \Delta^E_{0(i)}, \\ \omega(x), & \text{якщо } x_1 \le x \le 1, \end{cases}$$

зберігає хвости E-зображення чисел.

При вивченні розподілів випадкових величин, породжених дискретними розподілами цифр у їхньому зображенні, важливу роль відіграють хвостові множини (множини чисел, елементи яких мають однакові хвости зображень). У випадку дискретності розподілу його точковий спектр (множина атомів) є хвостовою множиною. Це має місце для випадкових величин з незалежними цифрами у їхньому s-зображенні, Q-зображенні [2], зображеннях, що ґрунтуються на розкладах чисел в елементарні ланцюгові дроби, додатні ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота [6], а також знакопочережні ряди Остроградського 1-го [1, 3] і 2-го виду, Люрота [5] тощо.

Тому природно виникає інтерес до неперервних функцій і перетворень $(0,1]$, які зберігають хвости зображення чисел.

1. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. — Київ: Наук. думка, 2013. — 288 с.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. — С. 131–143.
4. *Engel F.* Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen // Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner Marburg 1913. — Leipzig: Teubner, 1914. — S. 190–191.
5. *Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. — 2013. — Vol. 21, no. 4. — P. 385–401.
6. *Zhykharyeva Yu. I., Pratsiovytyi M. V.* Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra Discrete Math. — 2012. — Vol. 14, no. 1. — P. 145–160.

TRANSFORMATIONS AND FUNCTIONS PRESERVING TAILS OF E-REPRESENTATION OF NUMBERS

We consider the so-called E-representation of numbers belonging to $(0,1]$ and study properties of some representatives of infinite family of functions that "preserve tails" of E-representation. These functions are used to construct transformations of $(0,1]$ that "preserve tails" of E-representation of numbers.

УДК 519.21, 517.5

РОЗПОДІЛИ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ЛАНЦЮГОВИМИ A_2-ДРОБАМИ

Микола Працьовитий, Софія Ратушняк

Український державний університет імені Михайла Драгоманова
Інститут математики НАН України

prats4444@gmail.com, ratush404@gmail.com

Неперервна функція, визначена на відрізку $[a;b]$, називається функцією канторівського типу, якщо сумарна довжина її інтервалів сталості дорівнює довжині відрізка $[a,b]$.

Серед сингулярних функцій канторівського типу є монотонні, не монотонні та такі, що є ніде не монотонними, крім інтервалів сталості; функції обмеженої та необмеженої варіації.

Основним об'єктом розгляду є розподіл випадкової величини

$$Y = F(X), \tag{1}$$

де $y = F(x)$ — функція канторівського типу; X — випадкова величина з наперед заданим розподілом.

Теорема 1. *Якщо F — сингулярна функція розподілу на відрізку $[a;b]$ канторівського типу, а X — неперервно розподілена на $[a;b]$ випадкова величина зі строго зростаючою функцією розподілу, то випадкова величина $Y = F(X)$ має чисто дискретний (атомарний) розподіл або розподіл, що є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів.*

Наслідок 1. *Якщо X —випадкова величина, що має рівномірний розподіл на відрізку $[a;b]$, то при виконанні інших умов випадкова величина $Y = F(X)$ має чисто дискретний розподіл.*

Наслідок 2. *Якщо (α_n, β_n) — послідовність усіх інтервалів сталості функції F і*

$$\sum_{i=1}^{\infty}[F(\beta_n) - F(\alpha_n)] = C < 1,$$

то розподіл Y є сумішшю дискретного і неперервного розподілів.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_09.pdf

Розглядається континуальний клас розподілів випадкових величин виду

$$\xi = \xi[C; ||p_{in}||] = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\xi_1} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\xi_2} + \ddots}} \equiv \Delta^C_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}, \qquad (2)$$

де (ξ_n) — послідовність випадкових величин, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n} відповідно $(p_{0n} + p_{1n} = 1)$. Зрозуміло, що властивості розподілу ξ визначає система зображення дійсних чисел ланцюговими A_2-дробами(2) і нескінченна стохастична матриця $||p_{in}||$.

Центральні питання, яким буде приділятися увага у доповіді, це: 1) лебегівська структура розподілу; 2) структурні і спектральні властивості; 3) структурна фрактальність дискретних розподілів і сумішей дискретного та неперервного (зокрема сингулярного) розподілів за умови, що F — функція розподілу випадкової величини ξ, а $X = X[C; ||q_{in}||]$.

Казатимемо, що множина (фігура) $E \subset R^n$ має структурну фрактальність (структурно фрактальна), якщо вона автомодельна (зокрема самоподібна, самоафінна), тобто $E = \varphi_1(E) \cup \varphi_2(E) \cup \ldots \cup \varphi_n(E)$, де $n > 1$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — набір однієї групи перетвореннь простору R^n.

Теорема 2. *Точковий спектр дискретного розподілу випадкової величини ξ структурно фрактальний, якщо її цифри ξ_n — незалежні випадкові величини.*

1. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P.* Continued A_2-fractions and singular functions// Matematychni Studii. – 2022. – **58**, No. 1. – P. 3–12.
2. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A2-continued fraction with independent elements// Random Oper. Stochastic Equations. – 2009. – **17**, No. 1. – P. 91–101.
3. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування.– Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

DISTRIBUTIONS OF VALUES FUNCTIONS OF CANTOR TYPE, RELATED WITH A_2-CONTINUED FRACTIONS

The report is devoted to the distribution of the values of singular functions of Cantor type, which related with the two-symbol representation of numbers of the segment $[a, b]$ by continued fractions kind of $\frac{1}{(\frac{1}{2})^{\alpha_1} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\alpha_2} + \ldots}} \equiv [0; \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots]$, $\alpha_n \in A = \{0, 1\}$. The results of the research on structural, fractal, topological and metric properties are proposed.

УДК 517.5

ОЦІНКИ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко

Інститут математики НАН України

serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Позначимо через $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,2}$ класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{\alpha,r,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R},$$

з ядрами

$$P_{\alpha,r,\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \ \alpha > 0, \ r > 0, \ \beta_k \in \mathbb{R},$$

функцій $\varphi \in B^0_2 = \{g \in L_2 : \ \|g\|_{L_2} \le 1, \ g \perp 1\}$.

Якщо $\beta_k \equiv \beta, \beta \in \mathbb{R}$, то класи $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,2}$ позначаються через $C^{\alpha,r}_{\beta,2}$ і є відомими класами узагальнених інтегралів Пуассона (див. [1]).

Нехай K — опукла центрально-симетрична підмножина з простору C і B — одинична куля в просторі C. Нехай, далі, F_N — довільний N-вимірний підпростір простору C, $N \in \mathbb{N}$, і $\mathcal{L}(C, F_N)$ — множина всіх лінійних операторів, що діють з C в F_N. Через $\mathcal{P}(C, F_N)$ позначимо підмножину всіх проективних операторів із множини $\mathcal{L}(C, F_N)$, тобто множину всіх операторів A лінійного проектування у множину F_N таких, що $Af = f$, якщо $f \in F_N$. Величини

$$b_N(K, C) = \sup_{F_{N+1}} \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B \cap F_{N+1} \subset K\},$$

$$d_N(K, C) = \inf_{F_N} \sup_{f \in K} \inf_{u \in F_N} \|f - u\|_C,$$

$$\lambda_N(K, C) = \inf_{F_N} \inf_{A \in \mathcal{L}(C, F_N)} \sup_{f \in K} \|f - Af\|_C,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_10.pdf

$$\pi_N(K,C) = \inf_{F_N} \inf_{A\in\mathcal{P}(C,F_N)} \sup_{f\in K} \|f - Af\|_C,$$

називаються, відповідно, бернштейнівським, колмогоровським, лінійним та проекційним N-поперечниками множини K в просторі C.

Теорема 1. *Нехай* $\bar\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \beta_k \in \mathbb{R}$ *і* $\alpha > 0$, $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$ *та задовольняють умову*

$$(n-1)^r > \frac{1}{\alpha}.$$

Тоді мають місце оцінки

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r} \left(1 - \gamma_1(\alpha,r,n) e^{-\alpha r (n-1)^{r-1}}\right) \le P_{2n}(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,2}, C) \le$$

$$\le P_{2n-1}(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,2}, C) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r} \left(1 + \gamma_2(\alpha,r,n) e^{-\alpha r n^{r-1}}\right),$$

в яких P_N *— будь-який із поперечників* b_N, d_N, λ_N *чи* π_N,

$$\gamma_1(\alpha,r,n) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha r (n-1)^{r-1}} + \max\left\{\frac{e^{4\alpha}}{2}, \frac{e^2}{\alpha^{1+1/r}}\right\} e^{-2\alpha(n-1)^r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_2(\alpha,r,n) = \left(1 + \frac{1}{2\alpha r n^{r-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. *Stepanets A.I.* Methods of Approximation Theory. – Utrecht: VSP, 2005.

Робота частково підтримана Grant H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology).

ESTIMATIONS OF THE WIDTHS OF CLASSES OF GENERALIZED POISSON INTEGRALS OF PERIODIC FUNCTIONS

We find two-sided estimates for Kolmogorov, Bernstein, linear and projection widths of the classes of convolutions of 2π*-periodic functions* φ*, such that* $\|\varphi\|_2 \le 1$*, with fixed generated kernels*

$$P_{\alpha,r,\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),\ \alpha > 0,\ r > 0,\ \beta_k \in \mathbb{R},$$

in the space C.

УДК 517.5

РІВНОМІРНІ НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є НА КЛАСАХ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк

Інститут математики НАН України

sanatolii@ukr.net, stepaniuk.tet@gmail.com

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних невід'ємних чисел, і нехай β — фіксоване дійсне число. Позначимо через $C^{\psi}_{\beta,1}$ множину 2π–періодичних функцій, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R},\ \varphi \in L_1,\ ||\varphi||_1 \le 1,\ \varphi \perp 1$$

з твірним ядром Ψ_{β} вигляду

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big),\ \psi(k) \ge 0,\ \beta \in \mathbb{R},$$

таким, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty.$$

Нашою метою є знаходження розв'язку задачі Колмогорова–Нікольського для сум Фур'є на класах $C^{\psi}_{\beta,1}$, яка полягає у відшуканні асимптотичних (при $n \to \infty$) рівностей величин

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f.

Має місце наступне твердження.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_11.pdf

Теорема 1. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при усіх* $n \in \mathbb{N}$ *має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \frac{\Theta}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{1}$$

де для величини $\Theta = \Theta(n, \beta, \psi)$ *виконуються нерівності* $-1 \leq \Theta \leq 0$.

Зазначимо, що формула (1) є асимптотичною рівністю при $n \to \infty$, якщо виконується граничне співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right),\ n \to \infty. \tag{2}$$

Умова (2) має місце, зокрема, у випадку, коли $\psi(k)$ спадає до нуля при $n \to \infty$ швидше за довільну степеневу послідовність $\frac{1}{k^r}$, $r > 1$, забезпечуючи високу гладкість розглянутих класів $C^{\psi}_{\beta,1}$.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: в 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України, Київ, **40**, Ч. I., 2002. — 468 с.

UNIFORM APPROXIMATIONS BY FOURIER SUMS ON THE CLASSES OF CONVOLUTIONS OF PERIODIC FUNCTIONS OF HIGH SMOOTHNESS

We establish the asymptotic equalities for the exact upper boundaries of uniform approximations by Fourier sums on the classes of convolutions of the functions φ, *which belong to the unit ball of the space* L_1 *and with fixed generated kernels* $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\psi(k) \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$.

УДК 517.54

ОЦІНКИ ДОБУТКІВ ДЕЯКИХ СТЕПЕНІВ КОНФОРМНИХ РАДІУСІВ ОДНОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

Ярослав Заболотний

Інститут математики НАН України

yaroslavzabolotnii@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$.

Означення 1. Величина $R(B, a) = |f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a.

В цій доповіді вивчається наступна проблема, вперше сформульована в роботі [1]:

Проблема 1. *Нехай n - деяке натуальне число, $n \geq 3$, α_k, $k = \overline{1,n}$ - деякі додатні дійсні числа; a_k, $k = \overline{1,n}$ - деякий набір точок комплексної площини. Знайти максимум наступного добутку:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(R(B_k, a_k)\right)^{\alpha_k}. \tag{1}$$

де B_k, $k = \overline{1,n}$, - довільний набір областей, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Правильними є наступні результати.

Теорема 1. *[2] Нехай n - деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$, деякий набір фіксованих точок комплексної площини і нехай γ_k, $k = \overline{1,n}$ - деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(R(B_k, a_k)\right)^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k)}.$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_12.pdf

Теорема 2. *Нехай n - деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k, θ_k, $k = \overline{1,n}$ — деякі додатні дійсні числа, причому $\alpha_k \geq \theta_k \; \forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} (R(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\theta_k)}{4}} \cdot \cdot \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\alpha_i+\alpha_j-\theta_i-\theta_j-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\theta_k)}{n-1}\right)} \prod_{k=1}^{n} (R(B_k, a_k))^{\theta_k}. \tag{2}$$

Нерівність, наведена в теоремі 2, дозволяє оцінювати вираз (1) для деякого набору степенів α_k, маючи значення даного виразу для іншого набору степенів.

1. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
2. *Бахтін О.К., Заболотний Я.В.* Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 9. – С. 1155–1169.

Estimates of the products of some powers of the conformal radii of simply-connected domains

In this talk one problem of geometric function theory about the extreme partition of the complex plane is considered, and as a result some estimates of maximum of the product of some powers of conformal radii of n disjoint simply-connected domains with respect to n arbitrary points of complex plane are obtained.

УДК 517.524

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ У КУТОВИХ ОБЛАСТЯХ

Дмитро Боднар, Ірина Біланик

Західноукраїнський національний університет

Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка

bodnar4755@ukr.net, i.bilanyk@ukr.net

Кутові області збіжності неперервних дробів вперше досліджували Е.Б. Ван Флек, Йо.Л. Йенсен, О. Перрон. У роботі В.Б. Ворнера та Д.Д. Ґраґа ця тематика отримала подальше розвинення – були встановлені оцінки швидкості збіжності неперервних дробів у цих областях.

Багатовимірні узагальнення класичної теореми Ван Флека про кутову область збіжності розглядалися для різних типів гіллястих ланцюгових дробів (гіллястих ланцюгових дробів з N-гілками розгалуження, двовимірних неперервних дробів, гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду) у роботах Д.І. Боднара, Х.Й. Кучмінської, Т.М. Антонової, О.М. Сусь та І.Б. Біланик.

При встановленні оцінок швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів виникають певні труднощі, що спричиняють до звуження множин збіжності, де ці оцінки справджуються. У випадку необмежених множин збіжності оцінки даються, як правило, на деяких обмежених їх підмножинах.

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду оцінки швидкості збіжності вдалося встановити для необмежених підмножин кутових областей, які, однак, повинні бути розташованими на певній відстані від початку координат. Цю вимогу можна послабити, якщо розглядати послідовність підмножин, відстань від яких до початку координат прямує до нуля із певною швидкістю.

Цілком очікувано, що найефективніші результати для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду отримано у двовимірному випадку. Це зумовлено ускладненням конструкції дробу при збільшенні його розмірності.

Зокрема, для двовимірного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_13.pdf

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{2} \frac{1}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \frac{1}{b_{i(3)} + \ddots}} \qquad (1)$$

де $b_0,\ b_{i(k)} \in \mathbb{C},\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = \{i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\ : 1 \le i_k \le i_{k-1} \le \ldots \le i_0;\ k \ge 1;\ i_0 = 2\},$$

справджується твердження.

Теорема 1. *Нехай елементи гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду* (1) *задовольняють умови*

$$\Re(b_{i(k)}) \ge \frac{\delta}{k^\beta},\ \left|\arg b_{i(k)}\right| \le \theta,\ \theta < \frac{\pi}{4},\ 0 \le \beta \le \frac{1}{2},\ \delta^2 > \frac{1+\beta}{2\beta\cos 2\theta},\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Тоді гіллястий ланцюговий дріб (1) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$\left|f_m - f_{s(n)}\right| < \frac{K}{\ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right)\right)},\ m \ge s(n),$$

$$s(n) \ge \sqrt[1-\beta]{(n+1)^{1+\beta} + (n+1)^{1-\beta}},$$

де K, α — деякі додатні сталі, що не залежать від m і n.

1. *Біланик І.Б., Боднар Д.І.* Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 4. – С. 72-82.
2. *Gragg W.B. Warner D.D.* Two constructive results in continued fractions // SCIAM J. Numer. Anal. – 1983. – **20**, No. 3. – P. 1187-1197.
3. *Jensen J.L.W.V.* Bidrag til Kaedebrekernes Teori // Festskrift til H.G. Zeuthen. – 1909. – P. 78-87.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbruhen.— Stuttgart : Teubner, 1957. — Bd. **2**.— 524 s.
5. *Van Vleck E.B.* On the convergence of continued fractions with complex elements // Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**, No. 3. — P. 215–233.

ON CONVERGENCE OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM IN ANGULAR DOMAINS

The angular domains of convergence of branched continued fractions of the special form with complex elements are investigated. The estimates for the rate of convergence in some subsets of angular regions are obtained.

УДК 517.518

ПРО МНОЖИНУ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $\nu_0(x) = f(x)$, ЩО МІСТИТЬ ФУНКЦІЮ $\nu_0(x)$ ЧАСТОТИ НУЛЯ В s-ВІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ

Олег Макарчук, Богдан Халецький

ЦДУ імені Володимира Винниченка, м.Кропивницький

makolpet@gmail.com, aumykun@gmail.com.

Нехай $2 < s \in N$. Відомо, що для довільного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n) така, що $\alpha_n \in \{0, 1, ..., s-1\}$ для кожного натурального n та виконується рівність:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{s^j} = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}.$$

Останній запис називається s-ковим зображенням числа x. Зліченна множина точок має рівно два зображення

$$\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)(0)...} = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n0(s-1)...}.$$

Їх називають s-ково-раціональними і для таких чисел прийнято використовувати зображення з періодом (0).

Нехай $N_i(x, n)$ — кількість цифр $i \in \{0, 1, ..., s-1\}$ у s-ковому зображенні числа x до $n-$го місця включно. Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x, n)}{n} = \nu_i(x),$$

то вона називається частотою цифри i у s-ковому зображенні числа x. Множина розв'язків рівняння $\nu_i(x) = kx$ в трійковій системі числення розглядалась в роботах [1], [2].

Теорема 1. *Нехай неперервна строго зростаюча функція $f(x)$ визначена на проміжку $[u; v] \subset [0; 1]$, причому $0 \le f(u) < f(v) \le 1$. Множина чисел, яка задовольняє рівність $\nu_0(x) = f(x)$, є континуальною, всюду щільною на відрізку $[0; 1]$ множиною нульової міри Лебега.*

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_14.pdf

1. *Котова О.В.* Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа // Укр. мат.ж урн. — 2005. — № 6. — С. 255–260.
2. *Котова О.В.* Фрактальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа // Науковий часопис НПУ. імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7. — С. 152-159.
3. *Працьовитий М.В., Макарчук О.П., Карпенко О.В.* Про множину інваріантних точок функції частоти у двійковій системі зображення дійсних чисел // Науковий часопис НПУ. імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки.– 2010, № 11. – С. 182–199.

ABOUT THE SET OF SOLUTIONS OF THE EQUATION $\nu_0(x) = f(x)$ CONTAINING THE FUNCTION $\nu_0(x)$ OF THE ZERO FREQUENCY IN THE s-NUMBER SYSTEM

In this talk we study the properties of the set of solutions of equation $\nu_0(x) = f(x)$ in the system of representation of real numbers based on s, where $\nu_i(x)$ is a frequency of digit i in representation of number x. We specified algorithm of roots constructing for the equation $\nu_0(x) = f(x)$.

УДК 517.54; 517.12

ПРО ГЛОБАЛЬНЕ СКІНЧЕННЕ СЕРЕДНЄ КОЛИВАННЯ ТА РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

Руслан Салімов, Марія Стефанчук

Інститут математики НАН України

ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в D. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні f по x та y. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним співвідношенням рівняння (1). Рівняння Бельтрамі (1) називається *виродженим*, якщо $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Будемо говорити, що функція $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ має *глобальне скінченне середнє коливання в точці* $z_0 \in \mathbb{C}$, скорочено $\varphi \in GFMO(z_0)$ (*global finite mean oscillation*), якщо

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} |\varphi(z) - \overline{\varphi}_R|\, dxdy < \infty, \tag{2}$$

де

$$\overline{\varphi}_R = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} \varphi(z)\, dxdy$$

середнє значення функції φ по кругу $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}$ та умова (2) включає припущення, що φ інтегровна у $B(z_0, R)$, $R > 0$ [1].

Лема 1. *Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Якщо невід'ємна функція $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ має глобальне скінченне середнє коливання в точці z_0, то для $R > e^e$,*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,e,R)} \frac{\varphi(z)\, dxdy}{\left(|z - z_0| \log |z - z_0|\right)^2} \leqslant C \cdot \log\log R,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_15.pdf

де

$$C = \frac{\pi}{6}((24+\pi^2)e^2\delta_\infty + 2\pi^2\varphi_0),$$

φ_0 — *середнє значення* φ *по кругу* $B(z_0, e)$ *і*

$$\delta_\infty = \delta_\infty(\varphi) = \sup_{R\in(e,+\infty)} \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} |\varphi(z) - \overline{\varphi}_R|\, dxdy.$$

Для відображення $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ та функції K_μ, ми покладемо

$$l_f(z_0, e) = \min_{|z-z_0|=e} |f(z) - f(z_0)|,$$

$$\delta_\infty = \sup_{R\in(e,+\infty)} \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} |K_\mu(z) - K_{\mu,z_0}(R)|\, dxdy, \quad k_0 = K_{\mu,z_0}(e),$$

де

$$K_{\mu,z_0}(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} K_\mu(z)\, dxdy.$$

Теорема 1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *вимірна функція з* $|\mu(z)| < 1$ *м.с. і* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі* (1), *який належить класу Соболєва* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. *Якщо* $K_\mu \in GFMO(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, *то*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|}{(\log R)^{\frac{2\pi}{C}}} \geqslant l_f(z_0, e)\,,$$

де C — *додатна стала, що залежить тільки від* δ_∞ *і* k_0.

1. *Salimov R., Stefanchuk M.* Global finite mean oscillation and the Beltrami equation. (Hyper)complex seminar 2021 in memoriam of Prof. Julian Lawrynowicz. A monograph. Charter VIII, published online 30.12.2022, DOI: 10.26485/978-83-60655-92-4/8.

ON THE GLOBAL FINITE MEAN OSCILLATION AND THE BELTRAMI EQUATION

The estimate for growth of homeomorphic solutions of the Beltrami equation at infinity is obtained, provided that the dilatation quotient has a global finite mean oscillation.

УДК 539.3

ОПЕРАТОРИ ТОПОЛОГІЧНОГО ЗМІШУВАННЯ НА НЕСЕПАРАБЕЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

Зоряна Новосад

Львівський торговельно-економічний університет

zoryana.math@gmail.com

Вивчення гіперциклічності, топологічної транзитивності та топологічного змішування почалося після результату Біркгофа [1]. Цей результат є важливим в теорії хаосу. Зокрема, в теорії хаосу топологічне змішування має певне значення в розширенні хаотичної системи так, що одна її ділянка в якійсь стадії розширення накладається на будь-яку іншу ділянку.

Нехай $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність гільбертових просторів. Будемо припускати, що всі простори H_n є нетривіальними і необов'язково сепарабельними. Вважатимемо, що для кожного n і m, H_n є ізоморфним до H_m. Позначимо через $\ell_2(H) = \ell_2(H_n)_{n=0}^{\infty}$ гільбертів простір, який складається з елементів $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_k \in H_k$, наділений нормою $\|x\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$. Нехай ω_n – послідовність додатних ваг. Зафіксуємо послідовність ізоморфізмів $J_m : H_m \to H_{m-1}$, $\|J_m\| = 1$, $m \in \mathbb{N}$. Оператор $T : \ell_2(H_n) \to \ell_2(H_n)$ називатимемо оператором зваженого зворотного зсуву (до сім'ї J_m) з послідовністю ваг (ω_n), якщо він має вигляд $T(x) = (\omega_1 J_1(x_1), \omega_2 J_2(x_2), \ldots, \omega_n J_n(x_n), \ldots)$.

У доповіді буде розглянуто оператори зваженого зворотного зсуву на несепарабельних гільбертових просторах, умови гіперциклічності, топологічної транзитивності та топологічного змішування цих операторів; оператори зсувів, пов'язані з відповідними диференціюваннями.

Результати буде проілюстровано на прикладах топологічно транзитивних операторів, зокрема частинні зсуви на гільбертовому тензорному добутку.

1. *Birkhoff G.D.* D'remonstration d'un threor`eme relrementaire sur es fonctions enti`eres // Comptes Rendus de l'Acadremie des Sciences de Paris. – 1929. – **189**. – P. 473–475.

TOPOLOGICAL MIXING OPERATORS ON NONSEPARABLE SPACES

We consider the weighted shift operators on nonseparable Hilbert spaces and we establish some conditions of hypercyclicity, topological transitivity and topological mixing of these operators and related shifts which are associated with the corresponding differentiations. We represent examples of topologically transitive operators, in particular, partial shifts on the Hilbert tensor product.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_02.pdf

UDC 517.5

DOUBLE SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON BANACH SPACES

Nataliia Baziv

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

natalijabaziv96@gmail.com

Let X be a complex Banach space and S be a group of isometric operators on X. We denote by $\mathcal{P}_S(X)$ the algebra of S-symmetric polynomials on X and by $H_{bS}(X)$ its closure in the topology of the uniform convergence on all balls in X. The algebra $H_{bS}(X)$ consists of all symmetric analytic functions which are bounded on all bounded subsets of X. Such algebras were studied by many authors for various Banach spaces and groups of symmetry (see e.g. [1, 2]).

Let now Y and Z be Banach spaces with symmetric bases (v_n) and (e_n) respectively, and S_Y and S_Z be groups of permutation of bases vectors in Z and Y respectively. We denote by $X = Y(Z)$ the space consisting of elements $x = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$, $u_n \in Z$, and $(\|u_1\|v_1 + \|u_2\|v_2 + \dots + \|u_n\|v_n + \dots) \in Y$ with

$$\|x\| = \|(\|u_1\|v_1 + \|u_2\|v_2 + \dots + \|u_n\|v_n + \dots)\|.$$

We say that a function f on X is (S_Y, S_Z)-symmetric or *double* symmetric if for every $\tau \in S_Y$, every $\sigma \in S_Z$, and every $n \in \mathbb{N}$

$$f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \dots, u_{\tau(n)}, \dots) = f(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots),$$

$$f(u_1, u_2, \dots, \sigma(u_n), \dots) = f(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots),$$

where

$$u_n = \sum_j z_{nj} e_j \quad \text{and} \quad \sigma(u_n) = \sum_j z_{n\sigma(j)} e_j.$$

In the talk we will discus double symmetric polynomials if both Y and Z are finitely dimensional and construct generators in algebras of double symmetric polynomials for some particular cases.

1. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – **395**, No. 2. – P. 569–577.
2. *Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* On Algebraic Basis of the Algebra of Symmetric Polynomials on $l_p(C^n)$ // J. Funct. Spaces. – 2017. – **2017**. – P. 1–8.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_03.pdf

УДК 517.98

СИМЕТРИЧНІ СТРУКТУРИ В НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Ірина Чернега

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

icherneha@ukr.net

У багатьох проблемах алгебри та аналізу, а також у застосуваннях до симетричних нейронних мереж, дуже важливо знати інваріанти даної (напів)-групи $\mathcal{S}$, що діє на банаховому просторі X. Інваріанти можна описати як елементи алгебр $\mathcal{S}$-симетричних функцій на X. Симетричні поліноми та аналітичні функції на нескінченновимірних банахових просторах були вперше досліджені у роботах [1, 2]. Щоб описати спектр рівномірної алгебри $\mathcal{S}$-симетричних функцій на X, важливо мати більше інформації про фактор-множину $X/\!\sim$, де "$\sim$" — це відношення еквівалентності "до дії $\mathcal{S}$" на X. Якщо X — простір послідовностей, а $\mathcal{S}$ — група перестановок елементів послідовностей, то $X/\!\sim$ можна розглядати як множину ненульових мультимножин, повних у метризованій топології, що індукована з X. Множина $X/\!\sim$ має структуру півкільця відносно природних алгебраїчних операцій.

У доповіді розглядаються кільця мультимножин, що складаються з елементів банахової алгебри. Досліджується алгебраїчна та топологічна структура таких кілець та властивості їх гомоморфізмів та відповідних симетричних поліномів.

1. *Nemirovskii A. S., Semenov S. M.* On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik. — 1973. — Vol. 21, Iss. 2. — P. 255–277.
2. *González M., Gonzalo R., Jaramillo J.A.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 59, Iss. 2. — P. 681–697.

SYMMETRIC STRUCTURES IN INFINITE-DIMENSIONAL SPACES

In the talk, we consider rings of multisets consisting of elements of a Banach algebra. We investigate the algebraic and topological structures of such rings and the properties of their homomorphisms. We introduce a complete metrizable topology on a given ring of multisets and extend some known results about structures of the rings to the general case. In addition, we consider supersymmetric polynomials and other supersymmetric functions related to these rings.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_04.pdf

UDC 517.98

SPECTRA OF ALGEBRAS OF BLOCK SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS OF BOUNDED TYPE

Viktoriia Kravtsiv, Anrii Yaselskyi

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

viktoriia.kravtsiv@pnu.edu.ua, andrew.yaselsky@gmail.com

Let us denote by $\ell_p(\mathbb{C}^s)$, $1 \le p < \infty$ the vector space of all sequences

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots),$$

where $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$ for $j \in \mathbb{N}$, such that the series $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{r=1}^{s} \left| x_j^{(r)} \right|^p$ is convergent. The space $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ with norm

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{s} \left| x_j^{(r)} \right|^p \right)^{1/p}$$

is a Banach space. A polynomial P on the space $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ is called block-symmetric (or vector-symmetric) if

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}, \dots)$$

for every permutation $\sigma \in S_\infty$, where $x_j \in \mathbb{C}^s$ for all $j \in \mathbb{N}$. Let us denote by $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ the algebra of all block-symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^s)$.

The polynomials

$$H^k(x) = H^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |k| \ge [p]}}^{s} (x_j^{(r)})^{k_r} \tag{1}$$

form an algebraic basis in $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$, $1 \le p < \infty$, where $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$.

Let us denote by $H_{bvs}(\ell_1(\mathbb{C}^s))$ the algebra of block-symmetric analytic functions of bounded type on $\ell_1(\mathbb{C}^s)$. This algebra is generated by polynomials $H^k, k \ge 1$. Let us denote by $M_{bvs}(\ell_1(\mathbb{C}^s))$ the specrum of $H_{bvs}(\ell_1(\mathbb{C}^s))$.

In this talk we will consider properties of algebraic bases of block-symmetric polynomials, intertwining operations on spectra of the algebras and representations of the spectra as a semigroup of analytic functions of exponential type of several variables.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_05.pdf

УДК 517.98

TROPICAL SEMIRINGS OF LIPSCHITZ FUNCTIONS

Maria Martsinkiv

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

maria.martsinkiv@pnu.edu.ua

A function f from a metric space (M_1, ρ_1) to a metric space (M_2, ρ_2) is *Lipschitz* if there is a constant L such that

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L\rho(x, y), \quad x, y \in M_2.$$

Our basic object of study is the tropical semiring $(R \cup \infty, \bigoplus, \bigodot)$ [1]. As a set this is just the real numbers R, together with an extra element ∞ that represents infinity. However, we redefine the basic arithmetic operations of addition and multiplication of real numbers as follows:

$$x \bigoplus y := min(x, y) \qquad \text{and} \qquad x \bigodot y := x + y.$$

A *tropical polynomial* of several variables $t_1, \ldots, t_n$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a function of the form

$$p(t_1, \ldots, t_n) = a \odot t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \oplus b \odot t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n} \oplus \cdots$$

$$= \min(a + i_1 t_1 + \cdots + i_n t^n, b + j_1 t_1 + \cdots + j_n t^n, \cdots),$$

where the coefficients $a, b, \ldots$ are real numbers and the exponents $i_1, j_1, \ldots$ are *integers*. We can see that any tropical polynomial can be represented as minimum of some affine functions. Hence, every tropical polynomial is a Lipschitz function on $\mathbb{R}^n$ and a finite composition of tropical polynomials is a Lipschitz function. Note, that a composition of tropical polynomials is not a tropical polynomial in the general case.

Theorem 1. *Let $g_{\varphi_1}, \ldots, g_{\varphi_n}$ be Lipschitz functions on X, generated by functionals $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X(\mathbb{Z}_0)^*$ where $g_\varphi(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} c_n g_n(x)$ and $q(t_1, \ldots, t_n)$ be a finite composition of tropical polynomials of variables $t_1, \ldots, t_n$. Then $Q(x) = q(g_1(x), \ldots, g_n(x)), \quad x \in X$, is a Lipschitz function on X.*

1. *Speyer D. E., Sturmfels B.* Tropical mathematics // Math. Mag. – 2009. – **82**. – P. 163–173. doi:10.1080/0025570X.2009.11953615

УДК 517.5

ОБОРОТНІСТЬ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ГАРДІ

Володимир Дільний, Андріана Вінсковська, Артур Петриченко

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

v.dilnyi@dspu.edu.ua

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 0$, $\sigma \geq 0$, — простір аналітичних функцій у правій півплощині функцій, для яких

$$||f|| := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Зауважимо, що кожна функція з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на межі недотичні граничні значення і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Якщо $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, f не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, інтегральна гранична функція функції f є сталою і виконуються умови*

$$\frac{e^{-\sigma|y|}}{f(iy)} \in L^p(\mathbb{R}),$$

$$\lim_{1<|t|\leq t} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln|f(it)| dt < +\infty,$$

то

$$(\exists C > 0) : \frac{e^{-Cz}}{f(z)} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+).$$

Інші форми умов оборотності можна отримати, використовуючи результати та методи з [1].

1. *Dilnyi V.* On the equivalence of some conditions for weighted Hardy spaces // Ukrainian Math. J. – 2006. – 58. – P. 1425-1432.

INVERTIBILITY IN WEIGHTED HARDY SPACES

Sufficient conditions of invertibility are obtained for weighted Hardy spaces in the complex half-plane.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_17.pdf

УДК 517.98

WEAKLY SYMMETRIC FUNCTIONS ON SPACES OF LEBESGUE INTEGRABLE FUNCTIONS

Taras Vasylyshyn, Vasyl Zahorodniuk

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine

taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua, vasyl.zahorodniuk@pnu.edu.ua

Let X and Y be nonempty sets. Let F be a set of mappings which act from X to itself. A function $f : X \to Y$ is called F-symmetric if $f(a(x)) = f(x)$ for every $a \in F$ and $x \in X$.

Let $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ be a family of sets F_α of mappings which act from X to itself, indexed by elements of some index set Λ, such that for every $\alpha, \beta \in \Lambda$ there exists $\gamma \in \Lambda$ such that $F_\gamma \subset F_\alpha \cap F_\beta$. A function $f : X \to Y$ is called $\mathcal{F}$-weakly symmetric if there exists $\alpha \in \Lambda$ such that f is F_α-symmetric.

Let $L_p[0,1]$, where $p \in [1, +\infty)$, be the complex Banach space of all Lebesgue measurable functions $x : [0,1] \to \mathbb{C}$ for which the pth power of the absolute value is Lebesgue integrable with norm

$$\|x\|_p = \Big(\int_{[0,1]} |x(t)|^p \, dt\Big)^{1/p}.$$

Let $n \in \mathbb{N}$. Let $\Xi^{(n)}_{[0,1]}$ be the set of all bijections $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ such that

$$\sigma(t + 1/n) = \sigma(t) + 1/n$$

for every $t \in [0, 1 - 1/n]$ and, for every Lebesgue measurable set $E \subset [0,1]$, both sets $\sigma(E)$ and $\sigma^{-1}(E)$ are Lebesgue measurable and

$$\mu\big(\sigma(E)\big) = \mu\big(\sigma^{-1}(E)\big) = \mu(E),$$

where μ is the Lebesgue measure.

Let $n \in \mathbb{N}$ and $p \in [1, +\infty)$. For $\sigma \in \Xi^{(n)}_{[0,1]}$, let the operator $s_{\sigma,p}$ be defined by

$$s_{\sigma,p} : x \in L_p[0,1] \mapsto x \circ \sigma \in L_p[0,1].$$

Let $S_{n,p} = \big\{s_{\sigma,p} : \ \sigma \in \Xi^{(n)}_{[0,1]}\big\}$ and $\mathcal{S}_p = \big\{S_{2^n,p} : \ n \in \mathbb{N}\big\}$. We shall consider $\mathcal{S}_p$-weakly symmetric functions on $L_p[0,1]$.

This research was funded by the National Research Foundation of Ukraine, 2020.02/0025, 0120U103996.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_19.pdf

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

УДК 539.3

ВПЛИВ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ ЗОРЯНОГО ВИКИДУ НА РАННЮ ЕВОЛЮЦІЮ ЗАЛИШКІВ НАДНОВИХ ЗІР

Тарас Кузьо, Олег Петрук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

kuzyo.taras@gmail.com

Розподіл зоряної речовини наднової під час її вибуху є суттєво турбулентним, а також залежить від ряду факторів: властивостей зорі-попередниці, механізму вибуху, густини і структури навколозоряного середовища. При цьому зоряний викид має складну морфологію з певним спектром розподілу неоднорідностей. Моделювання еволюції таких структур у залишках наднових у 3D є досить складною задачею, яка потребує застосування чисельних симуляцій. Для цього використовують магнітогідродинамічне моделювання вибуху наднової з подальшим розширенням в навколозоряне середовище. При цьому розв'язують систему рівнянь у частинних похідних, яка включає рівняння руху, збереження енергії та збереження маси.

Неоднорідність зоряного викиду у залишках наднових може мати суттєвий вплив на перебіг ранніх етапів їх еволюції. Шляхом тривимірного магнітогідродинамічного моделювання ми досліджуємо властивості ударної хвилі та течій за її фронтом в залежності від різних моделей початкової структури наднової зорі.

THE EFFECT OF INITIAL SUPERNOVA EJECTA STRUCTURE ON EARLY EVOLUTION OF SUPERNOVA REMNANTS

The distribution of the stellar matter of a supernova during its explosion is significantly turbulent and dependent on several factors: the properties of the progenitor star, the explosion mechanism, and the density and structure of the interstellar medium. We study the effect of the initial 3D structure of the supernova ejecta on details of the resulting post-shock structures in a supernova remnant. For this purpose we perform a series of 3D MHD simulations of supernova remnant evolution with varying initial ejecta distributions and interstellar number densities.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_01.pdf

УДК 517.977

ОПТИМІЗАЦІЯ КОЛИВАНЬ У ДВОМАСОВІЙ СИСТЕМІ

Юрій Ловейкін, Анна Сукретна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

y.loveikin@gmail.com, sukretna.a.v@gmail.com

Вібраційні процеси у спорудах і машинах, електромагнітні коливання в радіотехніці та оптиці, автоколивання в системах регулювання та слідкуючих системах, звукові та ультразвукові коливання – всі ці явища описуються схожими математичними моделями. Зазвичай метою керування коливними процесами є або гасіння коливань, або підтримка автоколивного режиму протягом тривалого періоду часу. У цій роботі продовжуються дослідження керування коливними процесами, розпочаті в [1 – 3].

Розглядатимемо систему, що складається з двох тіл. Одне тіло може рухатись вздовж горизонтальної осі, друге тіло закріплене на підвісі до першого і є маятником. Еволюція такої двомасової системи описується системою двох диференціальних рівнянь другого порядку

$$m_1\ddot{x}_1 = F_p - m_2\frac{g}{l}(x_1 - x_2) - F_r\operatorname{sign}\dot{x}_1, \quad \ddot{x}_2 = \frac{g}{l}(x_1 - x_2), \tag{1}$$

де x_1 визначає положення першого тіла відносно горизонтальної осі, уздовж якої це тіло може рухатись, x_2 – положення другого тіла відносно тієї ж горизонтальної осі, m_1, m_2 – маси першого і другого тіл відповідно, l – довжина підвісу другого тіла до першого, F_r – сила опору, що діє на перше тіло під час його руху внаслідок зовнішніх факторів, F_p – зовнішня сила, що спричиняє рух першого тіла вздовж горизонтальної осі, і змінюється у заданих межах

$$F_p \in [-F_{p\max}, F_{p\max}], \tag{2}$$

$F_{p\max}$ – стала, яка задає максимальну рушійну силу, що може діяти на перше тіло, g – стала прискорення вільного падіння.

При русі під дією сили F_p на перше тіло системи (1) зі стану спокою у цій системі можуть виникати коливні процеси, спричинені другим тілом системи, що знаходиться на підвісі до першого тіла. Керуючи силою F_p, можна

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_03.pdf

впливати на коливні процеси у системі і навіть досягти припинення коливань, привівши систему до рівномірного руху з деякою додатною швидкістю. У цьому випадку процес, який розглядається, описується системою (1) з крайовими умовами

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \tag{3}$$

$$x_1(T) - x_2(T) = 0, \quad \dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) = v_0, \quad \ddot{x}_1(T) = \ddot{x}_2(T), \tag{4}$$

де $v_0 > 0$ – швидкість, якої має досягти система, $T > 0$ – кінцевий момент часу, який нефіксований і залежить від керування зовнішньою силою F_p.

Таким чином, будемо розглядати задачу оптимального керування, у якій керована система описується крайовою задачею (1), (3), (4), керуючим параметром виступає зовнішня сила F_p з областю допустимих керувань (2), і критерієм якості

$$T \to \inf. \tag{5}$$

У роботі побудовано програмне оптимальне керування зовнішньою силою, яка діє на перше тіло і спричиняє розгінний рух системи зі стану спокою до заданої швидкості з усуненням за мінімальний час коливань, що виникають у процесі. Побудоване керування має одну точку перемикання.

1. *Ловейкін Ю.В.* Керування коливними процесами в одній двомасовій системі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 60–63.
2. *Ловейкін Ю., Ромасевич Ю.* Оптимізація керування одномасовими механічними системами // Вісник ТНТУ. Математичне моделювання, математика, фізика. – 2010. – Т. 15. – № 4. – С. 140–146.
3. *Ловейкін Ю.В., Сукретна А.В.* Аналіз та оптимізація коливних процесів у двомасовій системі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2018. – № 1. – С. 30–33.

OPTIMIZATION OF OSCILLATIONS IN A TWO-MASS SYSTEM

Stabilization problem of oscillation processes for the system consists of two bodies, the first one can move along the horizontal axis under the influence of an external force, the second body is on the suspension to the first and can perform vibrational movements as a pendulum is considered. In the considered two-mass system, the controlling factor is an external force influencing on the first body of the system. The aim of controlling the external force is to vanish oscillating processes in the system in the shortest time and transfer the system during this time from the state of rest to uniform motion with a given speed without oscillations. The form of optimal control of external force for vanishing of oscillations and stabilization of the considered two-mass system in the shortest time when overclocking from rest state to the motion with certain positive speed is established. Program optimal control of external force with one switching point is constructed.

UDC 517.983

NONLOCAL PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR A NONHOMOGENEOUS SYSTEM OF EVOLUTION EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Grzegorz Kuduk

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszow,
Graduate of University of Rzeszow (Poland)

gkuduk@onet.eu

Let H be Banach space, A be a linear operator acting in it, $A: H \to H$, and arbitrary powers for this operator, $A^n, n = 2,3,...$, be also defined in H. Denote $x(\lambda)$ to be an eigenvector of operator A, which corresponds to its eigenvalue $\lambda \in C$.

We consider system of evolution equations

$$\frac{d^2U_i(t)}{dt^2} + \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(A)\frac{d}{dt} + b_{ij}(B)\right]U_j(t) = f_i(t) \tag{1}$$

accompanied with the following set of homogeneous nonlocal - integral conditions:

$$\int_{T_1}^{T_2} U_i(t)dt + \int_{T_3}^{T_4} U_i(t)dt = 0, \tag{2}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} tU_i(t)dt + \int_{T_3}^{T_4} tU_i(t)dt = 0, \tag{3}$$

where $T_j > 0,\ j = 1,2,3,4,,\ U_i : ([T_1,T_2] \cup [T_3,T_4]) \to H$ is an unknown vector-function, $p_i(\lambda)$, is a given polynomial, $i = 1,2$, $a(A)_{ij}$ and $b_{ij}(B)$ are the abstract operators with the entire symbols $a_{ij}(\lambda) \neq \text{const}, b_{ij}(\lambda) \neq \text{const},\ \lambda \in C$, $f_i(t) : ([T_1,T_2] \cup [T_3,T_4]) \to H$ is a vector–function.

Definition. We shall say that for arbitrary $t \in ([T_1,T_2] \cup [T_3,T_4])$, the vector $f(t)$ from H belongs to $N_F(R,H,\Lambda^*)$, if, on $\Lambda \subseteq C$, there exist a measure $\mu_f(\lambda)$ and analytical in t linear operator $F_f(t,\lambda): H \to H$ such that $f(t)$ can be

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_04.pdf

represented in the form of Stieltjes integral

$$f(t)=\int_{\Lambda} F_f(t,\lambda)x(\lambda)d\mu(\lambda)\,. \tag{4}$$

Theorem. *Within the context of problem (1) – (3), let* $f(t)$ *belongs to* $N_F(R,H,\Lambda^*)$ *and* $f(t)$ *can be represented in the form (4). Then the formula*

$$U(t)=\int_{\Lambda^*} F_f\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)\{P(t,\mu,\lambda)x(\lambda)\}\Big|_{v=0} d\mu_f(\lambda)$$

defines a formal solution of the problem (1) – (3), where $P(t,\mu,\lambda)$ *is a solution of equations* $\phi\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)P(t,\mu,\lambda)=\exp[\lambda t]$ *and meets the conditions* $\frac{d^kP}{dt^k}\Big|_{t=0}=0,$ $k=0,1$.

This result continues the research of work [1, 2, 3].

1. *Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M.* Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. – Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. [in Ukrainian].
2. *Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I.V., Nytrebych Z.M.* Problem with integral conditions for differential operator equation // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 267–276.
3. *Kuduk G.* Problem with integral conditions for evolution equations of higher order // International Conference of Young Mathematicians, 3–6 June, 2015, Kyiv, Ukraine. 124 p.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ УМОВАМИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

За допомогою диференціально-символьного методу побудовано розв'язок нелокальної задачі з інтегро-диференціальними умовами для системи операторних еволюційних рівнянь другого порядку.

УДК 517.95

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIRD ORDER

Grzegorz Kuduk

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszow,
Graduate of University of Rzeszow (Poland)

gkuduk@onet.eu

Let K_L be a class of quasi-polynomials of the form $\phi(x)=\sum_{i=1}^{n} Q_i(x)\exp[\alpha_i x]$, where $Q_i(x)$ are given polynomials, $\alpha_i \in L \subseteq R$, $\alpha_l \neq \alpha_k$ for $l \neq k$. Each quasi-polynomial $\phi(x)$ defines a differential operator

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Phi(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Phi(\lambda)\Big|_{\alpha_i}$$

of finite order in the class of certain function $\Phi(\lambda)$.

In the strip $\Omega=\{(t,x)\in R^2 : t\in(T_1,T_2), x\in R\}$, we consider a system of equations

$$\frac{\partial^3 U_i}{\partial t^3}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U_j(t,x)=0, \quad (1)$$

$i=1,...,n$, accompanied with the integral conditions

$$\int_{T_1}^{T_2} t^k U_i(t,x)dt=\phi_{ik}(x),\ k=0,1,2, \quad (2)$$

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), c_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ are the differential expressions with analytical symbols $a_{ij}(\lambda), b_{ij}(\lambda), c_{ij}(\lambda)$. Let $\eta(\lambda)=\int_0^T W^{(n-1)}(t,\lambda)dt$ be a certain function, $W(t,\lambda)$ be a solution of the equation $L\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)W(t,\lambda)\equiv 0$, that meets conditions

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_05.pdf

$W^{(n-1)}(t,\lambda)\big|_{t=0}=1$, $W^{(n-2)}(t,\lambda)\big|_{t=0}=0,...,W(t,\lambda)\big|_{t=0}=0$.

We denote the following:

$$P=\{\lambda\in C:\eta(\lambda)=0\}. \tag{3}$$

Theorem. *Let* $\phi_i(x)\in K_M, i=1,...,n$, *then in the class* $K_{M\setminus P}$, *there exists and a unique solution of the problem (1), (2), where* P *is given in (3), can be represented in the form*

$$U_i(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left\{\frac{1}{\eta(\lambda)}\overset{\sim T}{l}\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)W(t,\lambda)\exp[\lambda x]\right\}\Big|_{\lambda=0},$$

where $\overset{\sim T}{l}\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)$ *is transpose of a matrix.*

Be means of the differential-symbol method [1], we construction the solution of the problem (1), (2). This work continues results of [2, 3].

1. *Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M.* Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. – Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. [in Ukrainian].
2. *Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I.V., Nytrebych Z.M.* Problem with integral conditions for differential operator equation // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 267–276.
3. *Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M.*, *Kohut I.V., Kuduk G.* Nonlocal problem for partial differential equations of higher order // Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, 19–20 May, 2016, Kyiv, Conference Materials I. Differential and integral equations and its applications. – P. 17.

ЗАДАЧА З НЕОДНОРІДНИМИ ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

За допомогою диференціально-символьного методу подано розвязок задачі з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними. Цей розв'язок існує і єдиний у класі квазімногочленів.

УДК 517.95

КРАЙОВА ЗАДАЧА З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

Софія Репетило

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

repetylosofiya@gmail.com

Математичне моделювання багатьох реальних процесів призводить до дослідження задач з крайовими та нелокальними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема, рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною t, які виникають при математичному моделюванні деяких задач гідродинаміки. В області $Q_T^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T,\ x \in \Omega^p\}$, $T > 0$, $\Omega^p - p$-вимірний тор $\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right)^p$, $p \in \mathbb{N}$, розглянуто задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s| \le \omega} a_s^r \frac{\partial^{|s|} u(t,x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \partial^{2j-2} u(t,x) / \partial t^{2j-2} \big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 1,\dots,n, \\ \partial^{2j-1} u(t,x) / \partial t^{2j-1} \big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad j = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{2}$$

де $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \le 2l} b_s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$ — еліптичний оператор, $a_s^r, b_s \in \mathbb{C}$, $a_0^1 \ne 0$, $s = (s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$. Зауважимо, що вигляд області Q_T^p накладає умови 2π-періодичності за просторовими координатами на розв'язок задачі $u(t,x)$ та на функції $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,2n$.

Окремо розглянуто задачу у такій постановці: в області $\Theta_T^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^p\}$ для рівняння (1) знайти майже періодичний за $x_1,\dots,x_p$ із заданим спектром M розв'язок, який за змінною t задовольняє умови (2), де

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_07.pdf

$$\mathrm{M} := \left\{ \mu_k \in \mathbb{R}^p : \ \mu_{k_j} = \eta_{k_j}, \ \eta_{k_j} \in \mathrm{N}, \ j = 1, \ldots, p, \ k \in \mathbb{Z}^p \right\},$$

$$\mathrm{N} := \left\{ \eta_k \in \mathbb{R} : \ \eta_{-n} = -\eta_n, \ \eta_0 = 0, \ d_1 |n|^\sigma \le |\eta_n| \le d_2 |n|^\sigma, \ d_2 \ge d_1 > 0, \ \sigma > 0, \ n \in \mathbb{Z} \right\},$$

функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, 2n$, є майже періодичними за просторовими координатами функціями зі спектром M, причому

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \ j = 1, \ldots, 2n,$$

де $\varphi_{jk} = \lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{1}{h^p} \int_{[0,h]^p} \varphi_j(x) \exp(-i\mu_k, x) dx$, $j = 1, \ldots, 2n$.

Встановлено умови однозначної розв'язності в обмеженій циліндричній області та в багатовимірному шарі задачі з умовами (2) за часовою змінною та умовами 2π-періодичності або майже періодичності за просторовими координатами для рівняння (1). Розв'язки розглянутих задач побудовано у вигляді рядів за системами ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач використано метричний підхід.

Для рівнянь із частинними похідними, розв'язаних відносно старшої похідної за часом, задачі з умовами (2) вивчались, зокрема, у працях [2, 3]. Дана робота є дотичною до робіт [1-3], а отримані у ній результати доповнюють проведені у цих працях дослідження.

1. *Білусяк Н.І., Комарницька Л.І., Пташник Б.Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
2. *Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійних безтипних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. − 2016. − **68**, № 5. − С. 665−682.
3. *Ptashnyk B.Yo., Repetylo S.M.* Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, № 4. – P. 501–517.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WHICH ARE NOT SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER TIME DERIVATIVE

We investigate the conditions for the unique solvability in the limited cylindrical domain and in the multidimensional layer of the problem with Dirichlet–Neumann conditions with respect to time variable and the conditions of periodicity or almost periodicity with respect to spatial coordinates for equations with partial derivatives not solved on the highest derivative in time with constant coefficients were investigated. The solutions of the considered problems in the form of series according to the systems of orthogonal functions are constructed. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solutions of the problems the metric approach is used.

УДК 517.9

ЗБЕРЕЖЕННЯ РЕГУЛЯРНОСТІ ПРИ ЗБУРЕННЯХ В ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕННЯХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Віктор Кулик, Ганна Кулик, Наталія Степаненко

Сілезький Технологічний Університет (Сілезька Політехніка в Глівіце, Польща),
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Viktor.Kulyk@polsl.pl, KulikGanna1953@gmail.com, nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

Розглянуто питання збереження властивості регулярності при збуреннях системи диференціальних рівнянь

$$d\varphi / dt = a(\varphi), \quad dx / dt = A(\varphi), \tag{1}$$

де вектор-функція $a(\varphi) \in C^0(T_m)$, $C^0(T_m)$ – простір неперервних функцій, 2π-періодичних за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1,m}$, тобто визначених на m-вимірному торі T_m, $A(\varphi)$ – $n \times n$-вимірна матриця $A(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Додатково припускаємо, що вектор-функція $a(\varphi)$ така, що розв'язок задачі Коші $d\varphi / dt = a(\varphi)$, $\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0$ є єдиним. Позначимо його через $\varphi_t(\varphi_0)$.

Матрицант лінійної системи $dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0))x$ з вектором параметрів φ_0, позначимо $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$, $\Omega_\tau^t(\varphi_0)\big|_{t=\tau} = I_n$, де I_n-одинична n-вимірна матриця.

Використовуватимемо позначення: $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ – норма матриці A, $C^1(T_m)$ – підпростір $C^0(T_m)$ неперервно диференційовних функцій, $C'(T_m; a)$ –підпростір $C^0(T_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що суперпозиція $F(\varphi_t(\varphi_0))$ є неперервно диференційовною за змінною t. За означенням $\dot{F}(\varphi_0) = \frac{d}{dt} F(\varphi_t(\varphi_0))\big|_{t=0}$. Отже, крапкою зверху позначимо похідну за напрямком, якщо, наприклад, функція $F(\varphi)$ є неперервно диференційовною, $F(\varphi) \in C^1(T_m)$, то $\dot{F}(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$.

В роботі [1] доведено, що у випадку, коли модуль неперервності $\sup_{\|\varphi - \overline{\varphi}\| \le \sigma} \|a(\varphi) - \overline{a}(\varphi)\| = \mu(\sigma; a)$ функції $a(\varphi)$, і модуль неперервності $\mu(\sigma; F)$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_08.pdf

функції $F(\varphi) \in C'(T_m; a)$ задовольняють умову $\lim\limits_{\sigma \to +0} \mu(\sigma; a)\mu(\sigma; F)/\sigma = 0$, то $F(\varphi)$ можна наблизити диференційовними функціями $F_n(\varphi) \in C^1(T_m)$ так, щоб $\dot{F}_n(\varphi) \to \dot{F}(\varphi)$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що якщо для функції $a(\varphi)$ виконується умова Ліпшиця, то будь-яку функцію $F(\varphi) \in C'(T_m; a)$ завжди можна наблизити диференційовними функціями $F_n(\varphi)$ зі збереженням близкості $\dot{F}_n(\varphi)$ і $\dot{F}(\varphi)$.

Теорема. *Нехай в системі (1) $n = 1$ і ця система є регулярною, тоді збурена система $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dx/dt = [A(\varphi) + A_1(\varphi)]x$ буде регулярною, якщо рівняння $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = A_1(\varphi)$ має розв'язок $\sigma = \sigma_0(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, який є неперервно диференційовним і визначеним при всіх $\varphi \in T_m$.*

Користуючись теоремою можна встановити що, наприклад, система рівнянь вигляду

$$d\varphi_1/dt = 1 + 2\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\ ,\ \ d\varphi_2/dt = 1 - \sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2\,,$$

$$dx/dt = \left[3\cos^2\varphi_1 + 4\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 5\cos^2\varphi_2 - \sin\varphi_1 - 13\sin\varphi_2\right]x.$$

має єдину функцію Гріна – Самойленка. Розглядаючи збурені системи при $n \geq 2$, встановлено, що система

$$d\varphi/dt = \omega\ ,\ \ dx_1/dt = a_{11}(\varphi)x_1 + a_{12}(\varphi)x_2\,,\quad dx_2/dt = a_{21}(\varphi)x_1 + a_{22}(\varphi)x_2\,,$$

де $\omega = \text{const} \in \mathbb{R}$, $a_{11}(\varphi) = \sin\varphi/(2 + \cos\varphi)$, $a_{22}(\varphi) = 2\sin\varphi/(4 + 3\cos\varphi)^2$, $a_{21}(\varphi) = \cos^2\varphi/(5 + 4\cos\varphi)^2$, $a_{12}(\varphi) = \cos^8\varphi - 1.99\cos^6\varphi + \cos^4\varphi$, також має єдину функцію Гріна – Самойленка.

1. *Кулик А.Н.* О приближениях непрерывных периодических функций, дифференцируемых вдоль траекторий динамических систем // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 1. – С. 111–114.
2. *Кулик В.Л., Кулик Г.М., Степаненко Н.В.* Про деякі конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі // Нелінійні коливання. – 2023. – **26**, № 1. – С. 77–94.

CONSERVATION OF REGULARITY UNDER PERTURBATION IN LINEAR EXTENSIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THE TORUS

The question of regularity for linear expansions of dynamical systems on a torus is very important, since multi-frequency nonlinear oscillations that arise in many problems of mathematical physics are described with the help of such systems. Most such systems are very difficult or impossible to solve. Therefore, the question arises on the existence of sets of bounded solutions and their dependence on parameters. The proposed report considers the possibilities of perturbation of the initial system, in which the property of regularity is preserved.

УДК 519.6

НЕПОКРАЩУВАНА ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСПОНЕНТИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Володимир Макаров, Наталія Майко, Вячеслав Рябічев

Інститут математики НАН України,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

MakarovImath@gmail.com, mayko@knu.ua, ryabichev@knu.ua

Розглянемо в гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (u,v) і нормою $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ абстрактну задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = 0, \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

де A – самоспряжений додатно визначений оператор зі щільною в H областю визначення $D(A) \subset H$.

В [1, 2] доведено, що за умови скінченної гладкості початкового вектора $x_0 \in D(A^{\sigma}),\ \sigma > 1$, розв'язок $x(t)$ задачі (2) може бути зображений рядом

$$x(t) = e^{-tA}x_0 = e^{-\gamma t}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t)T_\gamma^p(I+T_\gamma)x_0, \tag{3}$$

де $\gamma > 0$ – довільне число, $L_p^{(0)}(t)$ – поліноми Лагерра [3], I – одиничний оператор, $T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A)$ – перетворення Келі оператора A.

Зазначимо, що при $\sigma > 0$ сума $x(t)$ ряду (3) є неперервною функцією для всіх $t \ge 0$ і може розглядатися як узагальнений розв'язок задачі (2).

За наближений розв'язок задачі (2) візьмемо частинну суму ряду (3):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t}\sum_{p=0}^{N}(-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t)T_\gamma^p(I+T_\gamma)x_0. \tag{4}$$

Для точності цього наближення доведено теореми, які підсилюють результати [4].

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_09.pdf

Теорема 1. *Нехай оператор* A *і початковий вектор* x_0 *задачі (2) задовольняють умови* $A = A^* \geq \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$, $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, $0 < \gamma \leq \lambda_0$. *Тоді точність наближеного розв'язку (3) характеризується оцінкою*

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \| x(t) - x_N(t) \|^2 \, dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \| A^\sigma x_0 \|, \tag{5}$$

де $C = \dfrac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)(2\gamma)^{2\sigma+1}}$ – *додатна стала, не залежна від* N *та* x_0, $N+1 \geq \dfrac{\lambda_0(1+\sigma)}{2\gamma}$.

Теорема 2. *Оцінка (5) непокращувана за порядком* N, *точніше:*

$$z_N^2 \geq \frac{C}{(N+1)^{2\sigma+1}}$$

для всіх $N \geq N^*$, *де* N^* – *деяке натуральне число,* $C > 0$ – *не залежна від* N *стала.*

1. *Gavrilyuk I.P.*, *Makarov V.L.* The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 1994. – **15**, No. 5–6. – P. 583–598.
2. *Arov D.Z., Gavrilyuk I.P., Makarov V.L.* Representation and approximation of solutions of initial value problems for differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform // Elliptic and Parabolic Problems (Pont-à-Mousson, 1994), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 325, Longman Sci. Tech., Harlow, 1995. – P. 40–50.
3. *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions, Vol. 2. – New York: McGraw-Hill, 1953.
4. *Makarov V.L., Vasylyk V.B., Ryabichev V.L.* Unimprovable order-of-magnitude estimates of the rate of convergence of the cayley transform method for approximation of an operator exponent // Cybernetics and Systems Analysis. – 2002. – **38**, No. 4. – P. 632–636.

THE UNIMPROVABLE ESTIMATE OF THE CAYLEY TRANSFORM METHOD FOR THE OPERATOR EXPONENTIAL FUNCTION IN A HILBERT SPACE

We obtain the accuracy estimate of the Cayley transform method for solving the initial value problem for the first-order differential equation with a self adjoint positive definite operator in a Hilbert space. The estimate indicates that the order of accuracy automatically depends on smoothness of the exact solution (that is the proposed method does not have the saturation of accuracy). We also establish that the estimate is unimprovable in order.

УДК 531.51

ПРО ВИДІЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ МАТІСОНА-ПАПАПЕТРУ, ЩО ОПИСУЮТЬ РУХ ВЛАСНОГО ЦЕНТРА МАСИ В ПОЛІ ШВАРЦШІЛЬДА

Микола Феник

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

fenuk85@gmail.com

Рух пробної частки з внутрішнім кутовим моментом (спіном) в гравітаційному полі в рамках загальної теорії відносності описують рівняння Матісона-Папапетру (МП), які узагальнюють рівняння геодезійних ліній. Сама по собі система рівнянь МП є неповною, оскільки має 7 незалежних рівнянь для 10 невідомих функцій. Необхідність описати рух центра маси пробного тіла, що обертається, зумовило доповнення цих рівнянь ще однією системою із трьох незалежних рівнянь.

У нашому дослідженні, ми використовуємо доповняльну умову Матісона-Пірані, оскільки саме вона випливає з тих фізичних припущень, котрі дозволяють цілком природно конкретизувати світову лінію, яка репрезентує рух обертового протяжного тіла. Ця умова виділяє рух не одного центра маси, а певної сукупності центрів, оскільки в спеціальній теорії відносності розташування центра маси залежить від системи відліку. Внаслідок цього система рівнянь МП в просторі Мінковського описує як прямолінійні лінії, так і сукупність спіральних ліній. Останні є розв'язками для невласних центрів маси, що обертаються навколо власного центра маси. Той розв'язок, що безпосередньо описує поступальний рух частки зі спіном, можна просто ідентифікувати за ознакою його неосциляційності. Тоді як у випадку руху такої частки в гравітаційному полі така ідентифікація нетривіальна. Тому в метриках, відмінних від метрики Мінковського, постає завдання виділення розв'язку, який описує рухи власного центра маси.

У нашому підході розроблено метод виділення розв'язків, що описують рухи частки зі спіном, ортогональним до екваторіальної площини в стандартних координатах метрики Шварцшільда. Конкретні результати проілюстровано для випадків рухів, близьких до колових орбіт спінової частки із значенням радіальної координати, у десять разів більшим від радіуса шварцшільдів-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_10.pdf

ського горизонту. Подано графіки розв’язків для координат і компонент швидкості у порівнянні з відповідними графіками для безспінової частки, рух якої описується рівняннями геодезійних ліній. Оцінено прискорення спінової частки відносно безспінової у супутній до них системі координат. Показано, що причиною відхилення траєкторії спінової частки від геодезійної є наявність додаткового прискорення зумовленого спін-гравітаційною взаємодією.

ON SELECTION OF SOLUTIONS OF EQUASTIONS MATHISON-PAPAPETROU DESCRIBING THE MOVEMENT OF PROPER CENTER MASS IN THE SCHWARZSCHILD FIELD

The solution that directly describes the translational motion of a particle with spin in flat space can simply be identified by its non-oscillation feature. Whereas in the case of the movement of such a particle in the gravitational field, such identification is non-trivial. Therefore, in metrics different from the Minkowski metric, the task of finding a solution that describes the movements of proper center mass arises.

In our approach, a method for extracting solutions describing the motions of a proper center mass of a particle with orthogonal spin to the equatorial plane in standard coordinates of the Schwarzschild metric has been developed. In our research, we use the Mathison-Pirani additional condition. Specific results are illustrated for the cases of motions close to the circular orbits of the spin particle with a value of the radial coordinate ten times greater than the radius of the Schwarzschild horizon. The Graphs of the solutions for the coordinates and velocity components are presented in comparison with the corresponding graphs for a spinless particle whose motion is described by the equations of geodesic lines. The acceleration of the spin particle relative to the spinless one in the accompanying coordinate system is estimated. It is shown that the reason for the deviation of the trajectory of the spin particle from the geodesic one is the presence of additional acceleration of the conditioned spin gravitational interaction.

УДК 517.956.4

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Олександр Дяченко

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

ol_v_dyachenko@ukr.net

У доповіді обговорюються умови глобальної та локальної регулярності узагальнених розв'язків крайових задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку, які отримано в [1]. Ці умови сформульовано в термінах належності правих частин задачі до узагальнених анізотропних просторів Соболєва. Регулярність розподілів у цих просторах визначається дійсними числами s і $s/2$ (за просторовими і часовою змінними відповідно) та уточнюється функціональним параметром φ. Використання останнього дозволяє отримати тонкіші результати, ніж це можливо в шкалах класичних анізотропних просторів Соболєва. Зауважимо, що теорію скалярних параболічних за Петровським задач в узагальнених просторах Соболєва побудовано в [2].

Нехай $\Omega := G \times (0,\tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тут $G \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$, яка є основою циліндра Ω. Узагальнені простори Соболєва в Ω та на S означаються на основі базового гільбертового простору $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$. Останній складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^{n+1}$ таких, що

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \bigl(1+|\xi|^2+|\eta|\bigr)^s \varphi^2\left(\bigl(1+|\xi|^2+|\eta|\bigr)^{1/2}\right) |\widehat{w}(\xi,\eta)|^2\, d\xi d\eta < \infty.$$

Тут $\widehat{w}$ є перетворенням Фур'є розподілу w, а $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}$ є частотними змінними, дуальними до просторової і часової змінних відповідно. Випадок $\varphi(\cdot) \equiv 1$ дає анізотропний простір Соболєва. Функціональний параметр $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ є вимірною за Борелем функцією, яка повільно змінюється на нескінченності за Карамата. Клас таких параметрів позначимо через $\mathcal{M}$.

Розглянемо у Ω початково–крайову задачу для параболічної за Петровським системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$Au = f, \quad Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = h. \tag{1}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_11.pdf

Тут $A := (A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))$ і $B := \big(B_{j,k}(x,t,D_x)\big)$ — матричні лінійні диференціальні оператори з нескінченно гладкими комплекснозначними коефіцієнтами на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; $\mathrm{ord} A_{j,k} \le 2$, $\mathrm{ord} B_{j,k} \le l_j \le 1$; $u := (u_1,\dots,u_N)$, $f := (f_1,\dots,f_N)$, $g := (g_1,\dots,g_N)$, $h := (h_1,\dots,h_N)$. Нехай s — дійсне число, $s \ge 2$. Через $\mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ позначимо підпростір гільбертового простору

$$\big(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\big)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \big(H^{s-1;\varphi}(G)\big)^N$$

елементів (f,g,h), які задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1).

Теорема 1. [1] *Припустимо, що вектор-функція u з анізотропного простору Соболєва $\big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)*, праві частини якої задовольняють умову $(f,g,h) \in \mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ для деяких $s \ge 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $u \in \big(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\big)^N$.*

Сформулюємо локальний аналог теореми 1. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\Omega_0 := U \cap \Omega \ne \varnothing$ і $U \cap \Gamma = \varnothing$. Покладемо: $\Omega' := U \cap \partial\overline{\Omega}$, $S_0 := U \cap S$, $S' := U \cap \{(x,\tau) : x \in \Gamma\}$ і $G_0 := U \cap G$.

Теорема 2. [1] *Нехай $s \ge 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що вектор-функція $u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)*, праві частини якої локально належать таким просторам:*

$$f \in \big(H^{s-2,s/2-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N,$$
$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_0,S'),\quad h \in \big(H^{s-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)\big)^N.$$

Тоді $u \in \big(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N$.

1. *Diachenko O., Los V.* Regular Conditions for the Solutions to Some Parabolic Systems // Ukrainian Math. J. – 2023. – **74**, No. 8. – P. 1263– 1274. (arXiv:2206.03821)
2. *Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболєва. – Київ: Наукова думка, 2021. – 164 с.

ON REGULARITY OF SOLUTIONS TO SOME PARABOLIC PROBLEMS

We discuss global and local regularity of generalized solutions to parabolic initial-boundary value problem for Petrovskii system of second order differential equations. Results are formulated in terms of the belonging of right-hand sides of the problem to some generalized Sobolev spaces.

UDC 517.93

QUALITATIVE PROPERTIES OF LINEAR AND NONLINEAR FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

Kateryna Buryachenko

Vasyl' Stus Donetsk National University

k.buriachenko@donnu.edu.ua

The talk is devoted to the questions of qualitative properties of solutions to hyperbolic fourth-order linear (and quasilinear) equations with constant complex coefficients in the plane bounded domain. The main question is to prove analogue of maximum principle, energetic estimates for initial and boundary value problems, the Goursat problem as a particular case of boundary value problems on characteristics:

$$L(\partial_x)u = a_0\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2} + a_2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + a_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3} + a_4\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x). \quad (1)$$

We assume, that Eq. (1) is hyperbolic, that means that all roots of characteristics equation $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ are real. More over we will assume that they are different. That means that the angles $\varphi_i - \varphi_j$ between characteristics not equal to zero. We call the angle of characteristics slop the solution to the equation $-\tan\varphi_j = \lambda_j$, where λ_j are real and different roots of the characteristics equation above.

Let us rewrite Eq. (1) in the following form:

$$< \nabla, a^1 >< \nabla, a^2 >< \nabla, a^3 >< \nabla, a^4 > u = f(x)(f(x,u)).$$

Here the vectors $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ are determined by the coefficients a_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, and $< a, b >= a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$ is a scalar product.

It is easy to see that vector a^j is a tangent vector of $j-$th characteristic, slope φ_j of which is determined by $-\tan\varphi_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

In what follows, we also consider the vectors $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j)$, $j = 1, 2, 3, 4$. It is obvious that $< \tilde{a}^j, a^j >= 0$, so $\tilde{a}^j$ is a normal vector of $j-$th characteristic.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_12.pdf

Let C_j, $j = 1, 2, 3, 4$ are characteristics lines of the Eq. (1). For Eq. (1) we consider several problems in the plane domain $D =: \{(x_1, x_2) : x_1 \in (-\infty, +\infty), x_2 > 0\}$ and obtain local properties of the solution on the arbitrary point $C \in D$.

Let $\Gamma_0 := \{x_1 \in [a, b], x_2 = 0\}$ and consider the Cauchy problem on Γ_0

$$u\,|_{\Gamma_0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\Gamma_0} = \psi(x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\,|_{\Gamma_0} = \sigma(x),\ \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3}|_{\Gamma_0} = \xi(x). \tag{2}$$

We define domain Ω as a domain which is restricted by the characteristics C_j, $j = 1, 2, 3, 4$ and Γ_0. Then from Green formula, we have:

$$\int\limits_{\Omega} \{Lu \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{L^+ v}\} dx = \sum_{k=0}^{3} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(3-k-1)} u \cdot v_\nu^{(k)} ds. \tag{3}$$

Here $L_{(3-k-1)}u$, $k = 0, 1, 2, 3$ are $L-$traces of the solution u, which are defined by the boundary value of u.

For operator (1) in domain Ω restricted by characteristics C_j and Γ_0 Green formula takes the form:

$$\int\limits_{\Omega} Lu \cdot \bar{v}\, dx = \int\limits_{\Omega} < \nabla, a^1 >< \nabla, a^2 >< \nabla, a^3 >< \nabla, a^4 > u \cdot \bar{v}\, dx =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} < \nu, a^1 >< \nabla, a^2 >< \nabla, a^3 >< \nabla, a^4 > u \cdot \bar{v}\, ds -$$

$$\int\limits_{\Omega} < \nabla, a^2 >< \nabla, a^3 >< \nabla, a^4 > u \cdot \overline{< \nabla, a^1 > v}\, dx.$$

Put $v = 1$ and calculate $L_{(3)}u =< \nu, a^1 >< \nabla, a^2 >< \nabla, a^3 >< \nabla, a^4 > u$, $L_{(3)}-$ trace on $\partial\Omega = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$.

The main result is the following analog of the maximum principle for the fourth-order hyperbolic equations:

Theorem 1. *Let $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 4$, satisfy the following inequalities:*

$$Lu \geq 0,$$

in Ω,

$$u\,|_{\Gamma_0} \leq 0,\ u_\nu|_{\Gamma_0} \leq 0,\ u_{\nu\nu}|_{\Gamma_0} \leq 0,$$
$$L_{(3)}u|_{\Gamma_0} \leq 0,$$

then $u \leq 0$ *in* Ω.

УДК 517.956

РАДІАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПСЕВДО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ p-АДИЧНОГО АРГУМЕНТУ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Марія Сердюк

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

mariia.v.serdiuk@gmail.com

У статті А.Н. Кочубея [1] було знайдено правий обернений до оператора дробового диференціювання D^α, $\alpha > 0$. Це дає змогу звести p-адичну задачу Коші для радіальних функцій до інтегрального рівняння, властивості якого нагадують властивості класичних рівнянь Вольтерра.

У роботі [2] було досліджено нелінійну задачу Коші

$$(D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)),\ 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p,\ u(0) = u_0. \tag{1}$$

Тут

$$(D^\alpha \varphi)(t) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\alpha-1} \left[\varphi(t-y) - \varphi(y)\right] dy. \tag{2}$$

За відповідних умов [2], нелінійне інтегральне рівняння, що відповідає (1), є a) локально розв'язним, b) його розв'язок продовжується на всі $t \in \mathbb{Q}_p$, та c) розв'язки задовольняють задачу Коші. Однак, питання про властивості сингулярних аналогів таких рівнянь залишається відкритим.

Нехай $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Ми розглядаємо задачу

$$|t|_p^\gamma (D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)),\ 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p,\ u(0) = u_0. \tag{3}$$

Ми припускаємо, що функція $f : p^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови

$$|f(|t|_p, x)| \leq M,\ |f(|t|_p, x) - f(|t|_p, y)| \leq F|x-y|, \tag{4}$$

для всіх $t \in \mathbb{Q}_p$, $x, y \in \mathbb{R}$ і деяких сталих M, F, незалежних від t, x, y.

Із задачею (3) ми пов'язуємо інтегральне рівняння

$$u(|t|_p) = u_0 + I^\alpha \left[|\cdot|_p^{-\gamma} f(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))\right](|t|_p), \tag{5}$$

де p-адичний дробовий інтеграл визначається для функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ як

$$(I^\alpha \varphi)(t) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \int\limits_{|y|_p \leq |t|_p} \left(|t-y|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}\right)\varphi(y)dy,\ \alpha \neq 1,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_13.pdf

$$(I^1\varphi)(t) = \frac{1-p}{p\log p} \int\limits_{|y|_p \le |t|_p} \big(\log|t-y|_p - \log|y|_p\big)\varphi(y)dy.$$

Теорема 1. *Нехай* $\gamma < \min(1,\alpha)$ *та виконуються умови* (4). *Тоді рівняння* (5) *має єдиний локальний розв'язок.*

Теорема 2. *Нехай* $\gamma < \min(1,\alpha)$, *функція* f *задовольняє умови* (4) *в наступному вигляді:*

$$|f(p^\ell, x) - f(p^\ell, y)| \le F_\ell |x-y|,\ x,y \in \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

де $0 < F_\ell < p^{-\alpha\ell}$ *для* $\ell \in \mathbb{Z}$. *Тоді локальний розв'язок рівняння* (5) *може бути продовжений до глобального розв'язку, визначеного для всіх* $t \in \mathbb{Q}_p$.

Теорема 3. *За умов* (6) *та*

$$|f(p^\ell, x)| \le A p^{-\beta\ell},\ \ell \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\beta+\gamma > \alpha$, *розв'язок рівняння* (5), *отриманий ітераційно з наступним продовженням, задовольняє рівняння* (3).

1. *Kochubei A. N.* Radial solutions of non-archimedean pseudo-differential equations // Pacif. J. Math. – 2014. – **269**. - P. 355–369.
2. *Kochubei A. N.* Nonlinear pseudo-differential equations for radial real functions on a non-Archimedean field // J. Math. Anal. – 2020. – **483**. – P. 1–11.

RADIAL SOLUTIONS OF PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF p-ADIC ARGUMENT WITH WEAK DEGENERATION

In paper A. N. Kochubei [1] a right inverse to Vladimirov fractional differential operator D^α, $\alpha > 0$ *was found. It turns out that this permits to reduce the p-adic Cauchy problem for radial functions to an integral equation whose properties resemble those of classical Volterra equations. We develop further these ideas to an important class of degenerate pseudo-differential equations.We find the conditions of local and global solvability for corresponding nonlinear weakly degenerate equations.*

УДК 517.956.4

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ТРЬОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ТА ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Ольга Возняк[1], Віталій Дронь[2], Ігор Мединський[3]

[1] *Західноукраїнський національний університет*
[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*
[3] *Національний університет "Львівська політехніка"*

olvoz@ukr.net, vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$; просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $\Pi_X := X \times \mathbb{R}^n$, якщо множина X належить до $\mathbb{R}$.

Розглянемо рівняння

$$Lu(t,x) := (S - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

в якому

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\Big),$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x),$$

де f – задана, а u – невідома функції. α і β є неперервними і невід'ємними на проміжку $[0,T]$ функціями, при цьому $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ для $t \in (0,T]$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$ та β є монотонно неспадною функцією. Виродження при $t = 0$ рівняння (1) породжується функціями α і β, які входять в це рівняння.

Виродження класифікуватимемо за допомогою значень інтегралів $A(T,0) := \int\limits_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ і $B(T,0) := \int\limits_0^T \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}$. Так у випадку $A(T,0) < \infty$ рівняння (1) має слабке виродження. У випадку $A(T,0) = \infty$ виродження є сильним і дуже сильним, якщо $A(T,0) = \infty$ і $B(T,0) = \infty$. Зауважимо,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_14.pdf

що задача Коші при $t = 0$ для рівняння (1) не завжди є коректно поставленою. Але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1) в такому сенсі.

ФРЗК для рівняння (1) – це така функція $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, яка має за змінними t і x всі похідні, що входять у рівняння (1) і для будь-якого $\tau \in (0, T)$ та довільних неперервних і обмежених функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ вираз

$$(P\varphi)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{2}$$

визначає в шарі $\Pi_{(\tau,T]}$ розв'язок однорідного рівняння (1) за початкової умови

$$u(t, x)|_{t=\tau} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

При цьому функція (2) задовольняє умову (3) у такому сенсі:

$$\lim_{t\to\tau} u(t, x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Зауважимо, що прямування до границі $\varphi(x)$ в (4) рівномірне на кожному компакті простору $\mathbb{R}^n$.

Встановлено умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження, яке має ще виродження на початковій гіперплощині, за яких існує фундаментальний розв'язок задачі Коші, встановлено оцінки фундаментального розв'язку та породжуваного ним об'ємного потенціалу, а також доведено теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші в класах вагових функцій. Ці результати наведені в праці [1].

1. *Voznyak O. G., Dron V. S., Medynskyi I. P.* Properties of fundamental solutions, correct solvability of the Cauchy problem and integral representations of solutions for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane // Mathematical Modelling and Computing. – 2022. – **9**, №3. – P.779–790.

CORRECT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH THREE GROUPS OF SPATIAL VARIABLES AND WITH DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

Some properties of the fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equation with three groups of spatial variables of degeneration with degeneration on the initial hyperplane and generated by it the volume potential are established. Theorems on integral representations of solutions and correct solvability of the Cauchy problem are presented. These results are obtained in appropriate classes of weight functions.

УДК 517.956.4

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ГРУПІ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Ігор Мединський[1], **Галина Пасічник**[2]

[1] *Національний університет "Львівська політехніка"*
[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

ihor.p.medynskyi@lpnu.ua, pasichnyk.gs@gmail.com

Розглядається ультрапараболічне рівняння типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів.

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1+n_2+n_3$ – їх сума; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Змінні $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}$ називаються основними, а $x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}$, $l \in \{2,3\}$, – змінними відповідної групи виродження.

Розглядаємо в шарі $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ задачу Коші

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

$$u(t,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1,...,n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2.$$

Тут функції f і φ вважаються заданими, а функція u – шукана.

Для рівняння (1) у праці [3] знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та вивчено його властивості.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_15.pdf

Використовуючи ці властивості разом з оцінками похідних ФРЗК, ми досліджуємо властивості породжених ФРЗК G об'ємних потенціалів вигляду

$$v(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Ці властивості описуються в термінах належності функції v та її похідних до спеціальних вагових $L_p^{k(t,\vec{a})}$ просторів у залежності від того, до якого простору належить густина потенціалу функція f. Розглянуто також випадок, коли функція f є обмеженою.

Враховуючи результати з праці [4] про властивості і оцінки інтегралів Пуассона, породжених ФРЗК G рівняння (1), отримано теореми про інтегральне зображення розв'язків задачі Коші (1), (2) та теореми про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2). Тим самим для рівняння (1) реалізовано відомий підхід Ейдельмана–Івасишена [1, 2].

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
2. *Івасишен С.Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, №2. – С. 172 – 181.
3. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т.11, № 2. – С. 126–153.
4. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т.12, № 2. – С. 205–229.

ON PROPERTIES OF VOLUME POTENTIAL FOR PARABOLIC EQUATION WITH GROWING LOWEST COEFFICIENTS

We consider a degenerate parabolic Kolmogorov type equation. Leading coefficients of this equation are constants and lowest ones are increasing functions. Properties of the volume potential generated by the fundamental solution of the Cauchy problem of such equations are established. These properties are used to establish the correct solvability of a Cauchy problem or a problem with a zero initial condition. Corresponding theorems about correct solvability are formulated in special weight L_p-spaces.

УДК 517.9

УМОВИ КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЗАВЖДИ РОЗВ'ЯЗНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Іванна Бондар

Інститут математики НАН України

bondar.i@imath.kiev.ua

Досліджено розв'язність імпульсних систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Припускається, що імпульсна система не має розв'язку при довільних неоднорідностях. Для того, щоб звести її до розв'язної, введено функцію керування та встановлено критерій розв'язності й побудовано загальний його вигляд. Метод дослідження поставленої таким чином задачі використовує теорію псевдообернених (за Муром Пенроузом) матриць та ортопроекторів [1,2]. Розглянемо неоднорідну імпульсну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)dsu, \quad t\epsilon[a,b], \quad (1)$$

$$\Delta E_i x\Big|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}, \quad (i = 1, ..., p, \quad \tau_i \in (a,b)). \quad (2)$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у класі вектор-функцій $x(t)$ таких, що $x(t) \in D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I})$, $\dot{x}(t) \in L_2[a,b]$, $t \in [a,b]$, $\tau_i \in (a,b), i = 1,2,...,p$. Тут $D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I})$ — простір функцій $x : [a,b] \to R^n$, які допускають розрив I-го роду у точках $\tau_1, ..., \tau_p \in (a,b)$ і абсолютно неперервні на кожному із проміжків $[a,\tau_1), [\tau_1,\tau_2), ..., [\tau_p,b]$. Припускається, що $A(t), B(t)$ — $m \times n$, $\Phi(t)$ — $n \times m$, $f(t)$ — $n \times 1$ вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно незалежні на $[a,b]$; E_i, S_i — $k_i \times n$ вимірні матриці, γ_i — k_i–вимірний вектор-стовпчик констант; $\operatorname{rank}(E_i + S_i) = k_i < n$, тобто роз'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву: $\Delta E_i x\Big|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0))$. Припускаємо, що імпульсна ситема (1), (2) є нерозв'язна при $u = 0, u \in \mathbb{R}^n$ та довільних неоднорідностіх $f(t) \in L_2[a,b]$, $\gamma_i \in R^{k_i}$. Для встановлення умов існування розв'язку імпульсної системи зведемо імпульсну умову до вигляду крайової умови,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_16.pdf

використовуючи техніку запропоновану у [1]. Справедливим є наступне твердження.

Теорема 1. *Імпульсна система інтегро-диференціальних рівнянь* (1), (2), *яка при* $u = 0$ *та при довільних* $\forall f(t) \in L_2[a,b]$ *є нерозв'язною, буде мати розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова*

$$P_{U^*} P_{D^*_{d_1}} = 0. \tag{3}$$

При цьому величину керування u *необхідно вибрати наступним чином:*

$$u = U^+ P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} + P_U c,\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $U := P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau, s) ds d\tau + B(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) d\tau \Big] ds$ — $d_1 \times n$-вимірна матриця, U^+ — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до S — $n \times d_1$-вимірна матриця, P_{U^*}, P_U — $d_1 \times d_1$ та $n \times n$-вимірні матриця (ортопроектор), відповідно.

Зауваження. При умові (3) керування $u \in \mathbb{R}^n$ може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої $P_U c \in \mathbb{R}^n$. Це дозволяє використати дане керування для дослідження задач, які часто зустрічаються у теорії оптимального керування.

Публікація містить результати досліджень проєкту № 2020.02/0089 у 2023 році за рахунок грантової підтримки Національного фонду досліджень України.

1. *Бойчук О.А., Головацька І.А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 4. — С. 460 — 474.
2. *Бондар І.А.* Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них // Буковинський математичний журнал. —- 2016. -— **4**, № 1–2. —- С. 13-–17.

CONTROL CONDITIONS FOR NOT ALWAYS SOLVABLE IMPULSE SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The solvability of impulse systems of integro-differential equations with a degenerate kernel is investigated. It is assumed that the impulse system does not have a solution for arbitrary inhomogeneities. In order to reduce it to solvable, a control function was introduced, a solvability criterion was established, and its general form was constructed. The fact that the control may not be unique allows us to use it to study problems that are often encountered in the theory of optimal control. The general method of studying the problem posed in this way uses the theory of pseudo-inverse (by Moore-Penrose) matrices and ortho projectors.

УДК 517.956.4

ВИРОДЖЕНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

Іван Буртняк, Ганна Малицька

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

Ми досліджуємо рівняння другого порядку з p-групами просторових змінних, де по $p-1$-групі змінних є виродження параболічності, по цих групах рівняння є гіперболічним [1]. Для цього класу рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), встановлені оцінки похідних ФРЗК. Методом Леві побудовано ФРЗК для рівнянь зі змінними коефіцієнтами в еліптичній частині [3]. Зацікавленість такими рівняннями зумовлена їхнім використанням в економічній теорії, зокрема в теорії опціонів, та при дослідженні процесів ціноутворення деривативів. Аналітичні формули, що відображають функцію Ґріна, узгоджені з емпіричними даними і при практичному застосуванні адекватно відображають проходження процесів на фондових ринках. Таке подання дозволяє розрахувати ринкову вартість портфелю акцій, оцінити внутрішню волатильність на ринку в будь-який момент часу, а також проаналізувати динаміку фондового ринку [2].

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p,\ p \in N, \sum_{j=1}^{p} n_j = n_0,\ x \in R^{n_0},\ x_j \in R^{n_j},\ \xi_j \in R^{n_j},\ j = \overline{1,p},\ 0 < \tau < t \leq T < +\infty$. Розглянемо задачу

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\mu=1}^{n_p-1} x_{j\mu} \partial_{x_{j+1}\,\mu} u(t,x) = \sum_{k,=1}^{n} \partial_{x_k} a_{kj}(t,x) \partial_{x_j} u(t,x) + \\ + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x)\, \partial_{x_k} u(t,x) + a_0(t,x)\, u(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,x)\,|_{t=\tau} = u_0(x),$$

де $(t,x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(x,t),\ x \in R^{n_0},\ t \in [0,T]\},\ u_0(x) \leq Ce^{a|x|^2}$.

Використаємо наступні умови.

I. $Re\ \sum_{k,j=1}^{n_1} a_k(t,x)(i\sigma_k)(i\sigma_j) \leq -\delta|\sigma_1|^2, \quad \forall \sigma_1,\ |\sigma_1| = 1,\ \delta > 0$ не залежить від $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$.

II. $a_{kj}(t,x), \partial_{x_j x_k} a_k(t,x),\ \partial_{x_j} a_{kj}(t,x),\ \partial_{x_j} a_k(t,x)$– задовольняють рівномірну умову Гельдера по x з показником $0 < \alpha \leq 1,\ \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]}$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_17.pdf

Теорема 1. *Якщо виконуються умови I, II, то задача Коші має ФРЗК* $G(t,x,\tau,\xi)$, $t>\tau,\ x\in R^{n_0}$, $\xi\in R^{n_0}$.

Якщо виконуються умови I, II та $x=\xi$, *то існує ФРЗК* $G(t,x,\tau,\xi)$, *який є цілою функцією за змінною* x *порядку спадання 2, причому справджуються оцінки:*

$$\left|\ D_{x_j}^m\ D_{x_i}^s G_0(t,x,\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-\sum_{j=1}^{p}\frac{(2j-1)ns+1}{2}}(t-\tau)^{-\sum_{j=2}^{p}\frac{(2j-1)m_j}{2}}$$

$$\exp\{-c\left(\sum_{k=1}^{p}(x_k-\xi_k+\sum_{j=1}^{k-1}x_j\frac{(t-\tau)^j}{j!})(t-\tau)^{-\frac{2k-1}{2}}\right)^2\}.$$

Похідні функції $G(t,x,\tau,\xi)$ *задовольняють рівномірну умову Гельдера порядку* α, $0<\alpha\le 1$, *за параметром* ξ.

Теорема 2. *При виконанні умов I, II рівняння* (1) *має ФРЗК* $\mathrm{E}(t,x,\tau,\xi)$. *Для цього розв'язку використовується рівність*

$$\mathrm{E}=G_0(t,x,\tau,\xi,\xi)+\int_\tau^t d\beta\int_{R^{n_0}}G_0(t,x,\beta,\gamma,\gamma)\varphi(\beta,\gamma,\tau,\xi)\,d\gamma,$$

де φ– *шукана функція, яка задовольняє відповідне рівняння Вольтерри I роду.*

Встановлено існування оцінок похідних, що входять у рівняння (1).

1. *Burtnyak I.V., Malyts'ka H.P.* On the fundamental solution of the Cauchy problem for Kolmogorov systems of the second order // Ukr. Math. J. – 2019. – **70**. – P. 1275–1287.
2. *Burtnyak I.V., Malytska H.P.* Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions // Problems and Perspectives in Management. – 2018. – **16**. – P. 224–231.
3. *Малицька Г.П., Буртняк І.В.* Побудова фундаментального розв'язку одного класу вироджених параболічних рівнянь високого порядку // Карпатські матем. публ. – 2020. – **12**, № 1. – С. 79–87.

DEGENERATED PARABOLIC EQUATIONS OF THE DIFFUSION TYPE WITH INERTIA

For a class of degenerate parabolic Kolmogorov-type equations with degeneration. In the article, using the modified Levy method, a Green's function we study the Cauchy problem, construct its fundamental solution, and establish the estimates for its derivatives.

УДК 517.928.2; 517.927

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СТРУННОЇ СІТКИ З ЖОРСТКИМИ, АЛЕ ЛЕГКИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Геннадій Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка

hennadii.hrabchak@lnu.edu.ua; hrabchak_1999@yahoo.com

Нехай Γ – скінченний зв'язний компактний метричний граф, $V(\Gamma)$ – множина його вершин. Приймемо $\Gamma = \Gamma_0 \cup \big(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_l\big) \equiv \Gamma_0 \cup \Gamma_L$, де Γ_L – незв'язний підграф Γ з l компонентами Γ_j. Ми вивчаємо асимптотику при $\varepsilon \to 0$ спектра і власних підпросторів крайової задачі

$$\big(\varkappa_\varepsilon u'_\varepsilon\big)' + \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ на } V_D, \tag{1}$$

$$\sum_{e \sim a} \varkappa_{\varepsilon,e}(a) u'_{\varepsilon,e}(a) = 0, \quad a \in V \setminus V_D, \tag{2}$$

де $\varepsilon \in (0;\ 1)$ – малий параметр; λ^ε – спектральний параметр; u_ε – власна функція класу $C^2(\Gamma)$, неперервна у всіх вершинах; $V_D \subset V(\Gamma_0)$, $V_D \cap V(\Gamma_L) = \varnothing$; $\varkappa_\varepsilon = \varepsilon\alpha$, $r_\varepsilon = p$ на Γ_0; $\varkappa_\varepsilon = \beta$, $r_\varepsilon = \varepsilon^\omega q$ на Γ_L, де $\omega > 0$, а α, β, p, q – гладкі і додатні на відповідних підграфах функції.

Задача (1)–(2) описує власні коливання пружної струнної сітки, що складається з двох частин із суттєво різними властивостями жорсткості, яку моделює функція $\varkappa_\varepsilon$, і густини – функція r_ε. Підграф Γ_L асоційований з l жорсткими, але легкими – з густиною $\varepsilon^\omega q$ – компонентами сітки.

Умова (2) є умовою Кірхгофа (аналог умови Неймана). Підсумовування виконується за ребрами e, інцидентними вершині a. Похідна в кінцевих точках ребер обчислюється в напрямі від вершини. В нашій моделі це умова балансу сил натягу.

Спектр задачі (1)–(2) дискретний, додатний, власні значення (в.з.) скінченнократні, з точкою згущення в нескінченності; існує повна, ортонормована в $L_2(r_\varepsilon, \Gamma)$ система власних функцій. Кожне в.з. з фіксованим номером є неперервною функцією параметра ε порядку $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $v_\varepsilon = u_\varepsilon|_{\Gamma_0}$, $w_\varepsilon = u_\varepsilon|_{\Gamma_L}$. Асимптотику власних елементів шукаємо у вигляді $\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon\mu + o(\varepsilon)$, $v_\varepsilon \sim v + o(1)$ на Γ_0 і $w_\varepsilon \sim w + w_1\varepsilon + o(\varepsilon)$ на Γ_L.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_20.pdf

Одержуємо, що $w = c_j = \text{const}$ на кожній жорсткій компоненті Γ_j, а для головних членів μ і v асимптотик маємо *граничну* спектральну задачу

$$(\alpha v')' + \mu p\, v = 0 \text{ на } \Gamma_0, \qquad v = 0 \text{ на } V_D,$$
$$\sum_{e \sim a \in V_{0j}} \alpha_e(a) v_e'(a) = 0, \qquad v = c_j \text{ на } V_{0j},$$

де $V_{0j} = V(\Gamma_0) \cap V(\Gamma_j)$. Їй відповідає оператор T в $L_2(p, \Gamma_0)$, але вона задана на Γ_0. Тому, використовуючи оператор Діріхле-Неймана, зводимо вихідну задачу до задачі на Γ_0. Їй відповідає сім'я самоспряжених операторів $T_\varepsilon(\mu)$ в $L_2(p, \Gamma_0)$, які, як і T, мають компактну резольвенту. Доведено *рівномірну резольвентну збіжність* при $\varepsilon \to 0$ сім'ї $T_\varepsilon(\mu)$ до T. Опираючись на це і відомі факти спектральної теорії збурень, доведено теореми збіжності.

Теорема 1. *Нехай* $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^{+\infty}$ *та* $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– власні значення задач* (1)–(2) *та граничної відповідно, занумеровані в порядку зростання з урахуванням кратностей. Тоді для будь-якого фіксованого* $k \in \mathbb{N}$ *величини* $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$ *збігаються до* μ_k *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $|\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon - \mu_k| \leqslant C\varepsilon$, C *не залежить від* ε.

Нехай μ – в.з. оператора T, а $V_\mu \subset L_2(p, \Gamma_0)$ – відповідний власний підпростір; $U_\mu \subset L_2(\Gamma)$ – підпростір продовжень функцій з V_μ на Γ_j відповідними сталими c_j; U_μ^ε – підпростір в $L_2(\Gamma)$, породжений власними векторами, які відповідають тим в.з. λ^ε задачі (1)–(2), для яких $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$; P_{U_μ}, $P_{U_\mu^\varepsilon}$ – ортопроектори в $L_2(\Gamma)$ на U_μ і U_μ^ε.

Теорема 2. *Нехай* μ *– довільна точка спектра оператора* T. *Тоді* $\|P_{U_\mu} - P_{U_\mu^\varepsilon}\| \leqslant C\varepsilon$. *Якщо* μ_k *і* v_k *– просте в.з. і відповідний в.в. оператора* T, *то в.в.* $u_{\varepsilon,k}$ *оператора* L_ε *збігається в* $L_2(\Gamma)$ *до функції* u_k, *яка є продовженням* v_k *за неперервністю відповідними сталими на підграфи* Γ_j *графа* Γ *і* $\|u_{\varepsilon,k} - u_k\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C\varepsilon$. *Сталі* C *не залежать від* ε.

ASYMPTOTICS OF THE SPECTRUM OF EIGENVIBRATIONS OF A STRING NETWORK WITH STIFF BUT LIGHT-WEIGHT COMPONENTS

We study the asymptotic properties of eigenvalues and eigenfunctions of a singularly perturbed spectral problem for a second-order differential operator on a metric graph. In a mechanical interpretation, the problem models the proper vibrations of a network-like system of flexible elastic strings with finite numbers of stiff light-weight components. The leader terms of the asymptotic of eigenvalues and eigenfunctions are constructed. The justifications of the asymptotic approximations is based on the fact of the uniform resolvent convergence of a certain family of unbounded self-adjoint operators to the limiting operator and on some results of the spectral perturbation theory.

УДК 517.95

ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Надія Гузик[1], **Оксана Бродяк**[1,2]

[1] *Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,*
[1,2] *Національний університет "Львівська політехніка"*

hryntsiv@ukr.net, brodyakoksana1976@gmail.com

В області з вільною межею $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядається обернена задача одночасного визначення невідомих коефіцієнтів $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ в одновимірному параболічному рівнянні з виродженням

$$u_t = t^\beta a(t) u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Відомо, що $a = a(t)$ – строго додатна неперервна функція, а виродження рівняння (1) спричиняє степенева функція t^β. Досліджується випадок слабкого виродження, коли $0 < \beta < 1$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_21.pdf

Означення 1. Під розв'язком задачі (1)–(6) розумітимемо набір функцій $(b_1, b_2, h, u) \in (C[0,T])^2 \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2)–(6).

У роботі встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(6). Заміною змінних обернена задача (1)–(6) зводиться до коефіцієнтної оберненої задачі в області з фіксованими межами. За допомогою функції Гріна крайової задачі для рівняння теплопровідності отримано операторне рівняння, еквівалентне до цієї задачі. Існування його розв'язку встановлено на основі теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Для доведення єдиності розв'язку вказаної задачі використано властивості розв'язків систем однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з ядрами, що мають інтегровні особливості.

Зауважимо, що отримано достатні умови існування та єдиності локального за часом розв'язку вказаної оберненої задачі.

STEFAN PROBLEM FOR THE WEAKLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

The problem considered in the paper combines three types of problem: coefficient inverse problem, problem with degenerations and free boundary problems. The aim of the paper is to establish the sufficient conditions of existence and uniqueness of the classical solution to inverse problem of identification of the minor coefficient in the degenerate parabolic equation in a free boundary domain. It is known that the minor coefficient of this equation is a linear polynomial with respect to space variable with two unknown time-dependent functions. The degeneration of the equation is caused by the power function at the higher-order derivative of unknown function. For this aim we use apparatus of the Green functions for the initial-boundary value problems for the parabolic equation, the Schauder fixed point theorem and properties of the solutions of the homogeneous integral Volterra equations. The case of weak degeneration is investigated.

УДК 517.956

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Іван Пукальський, Богдан Яшан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

i.pukalsky@chnu.edu.ua, b.yashan@chnu.edu.ua

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, $\dim \Omega \leq n-1$. Розглянемо в області D задачу знаходження функцій $(u(x;q(x)),q(x))$, на яких функціонал

$$I(q) = \int\limits_D F(x;u(x,q(x)),q(x))dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q \in C^\alpha(D),\ \nu_1(x) \leq q(x) \leq \nu_2(x)\}$, із яких $u(x,q(x))$ задовольняє при $x \in D\backslash\Omega$ рівняння з параметром λ

$$(Lu)(x) \equiv \Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_{x_i} + A_0(x) + \lambda\Big]u(x,q) = f(x,q(x)), \tag{2}$$

а на межі області ∂D крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[u(x,q(x)) - \varphi(x)\Big] = 0. \tag{3}$$

Порядок особливостей коефіцієнтів рівняння (2) і крайової умови (3) у точці $P(x) \in D$ характеризуватимуть функції $s(\beta_i,x)$: $s(\beta_i,x) = \rho^{\beta_i}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s(\beta_i,x) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\rho(x) = \inf\limits_{z\in\overline{\Omega}} |x-z|$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). $C^l(\gamma;\beta;a;D)$ – множина функцій u: $x \in \overline{D}$, які мають неперервні частинні похідні в області $D\backslash\overline{\Omega}$ вигляду ∂_x^k, $|k| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\gamma;\beta;a;D||_l = \sum_{|k|\leq[l]} ||u;\gamma;\beta;a;D||_k + \langle u;\gamma;\beta;a;D\rangle_l,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_22.pdf

де

$$||u;\gamma;\beta;a;D||_k = \sup_{P\in\overline{D}} s((a+|k|)\gamma;x)|\partial_x^k u(P)| \prod_{i=1}^{n} s(-k_i\beta_i,x),$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1},...,\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1+\cdots+k_n$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:
а) коефіцієнти рівняння (1) $A_{ij}(x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $A_i(x)s(\mu_i,x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_i \geq 0$, $A_0(x)s(\mu_0;x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_0 \geq 0$, $A_0(x) < \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ і виконується умова рівномірної еліптичності

$$C_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\xi_i\xi_j \leq C_2|\xi|^2,$$

б) функції $f(x,q) \in C^\alpha(\gamma;\beta;2\gamma;D)$, $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\gamma = \max\{\max\limits_i \beta_i, \max\limits_i(\mu_i-\beta_i), \frac{\mu_0}{2}\}$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (2) – (3) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2) – (3) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \leq c\|f;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha + \|\varphi;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}. \qquad (4)$$

Якщо $f \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $(L\varphi)(x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$ *і для задачі виконуються умови а)–б), то єдиний розв'язок задачі* (2), (3) *в області* D *визначається інтегралом Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(x) = \varphi(x) + \int_D Z(x,d\xi)[f(\xi,q(\xi)) - (L\varphi)(\xi)]d\xi.$$

Необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі (1) – (3) встановлюються за допомогою методики праці [1].

1. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Багатоточкова крайова задача оптимального керування для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 4. – С. 17–33.

OPTIMAL CONTROL IN A DIRICHLE PROBLEM FOR ELLIPTICAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

The problem of optimal control of the system described by the Dirichle problem for the elliptic equation of the second order is studied. Cases of internal and boundary management are considered. The quality criterion is given by the sum of volume and surface integrals. The coefficients of the equation and the boundary condition allow power singularities of arbitrary order in any variables at some set of points. The necessary and sufficient conditions for the existence of the optimal solution of the system described by the boundary value problem for the elliptic equation with degeneracy have been established.

УДК 517.9

РАЦІОНАЛЬНА ФАКТОРИЗАЦІЯ ПОТОКІВ ТИПУ ЛАКСА НА СПРЯЖЕНОМУ ПРОСТОРІ ДО АЛГЕБРИ ЛІ ДРОБОВИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Оксана Гентош, Анатолій Прикарпатський

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Краківський університет технологій

ohen@ukr.net, pryk.anat@cybergal.com

У статті [1] було введено алгебру Лі $\mathbb{A}_\alpha := \mathbb{A}_0\{\{D^\alpha, D^{-\alpha}\}\}$, яку утворюють дробові інтегро-диференціальні оператори у вигляді формальних рядів Лорана за оператором дробової похідної Рімана-Ліувілля $D^\alpha : A \to A$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ і $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, коефіцієнтами яких є елементи алгебри Лі інтегро-диференціальних операторів $\mathbb{A}_0 := A\{\{D, D^{-1}\}\}$, де $D : A \to A$ – оператор звичайної похідної, $A := W_2^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap W_\infty^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ – алгебра функцій, із стандартним комутатором $[.,.]$. На спряженому просторі $\mathbb{A}_\alpha^*$ до алгебри Лі $\mathbb{A}_\alpha$ відносно інваріантного скалярного добутку такого, що $(\mathrm{a}_\alpha, \mathrm{b}_\alpha) := \int_{\mathbb{S}^1} \operatorname{res}_D(\operatorname{res}_{D_\alpha}(\mathrm{a}_\alpha \circ \mathrm{b}_\alpha D^{-\alpha}))dx$ для будь-яких $\mathrm{a}_\alpha, \mathrm{b}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$, за допомогою дужки Лі-Пуассона, породженої $\mathcal{R}$-деформованим комутатором $[.,.]_\mathcal{R}$, та інваріантів Казимира $\gamma_n(l_\alpha) = \frac{m_\alpha}{n+m_\alpha}\left(l_\alpha^{\frac{n}{m_\alpha}}, l_\alpha\right) \in \mathcal{I}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $n \in \mathbb{N}$, де m_α – порядок оператора $l_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^* \simeq \mathbb{A}_\alpha$, як гамільтоніанів була побудована ієрархія гамільтонових потоків типу Лакса:

$$dl_\alpha/dt_n = [(\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+, l_\alpha], \qquad t_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Тут $\operatorname{res}_{D_\alpha}$ і res_D позначають відповідно коефіцієнти при $D^{-\alpha}$ та D^{-1} у розвиненнях дробового і звичайного інтегро-диференціального операторів, символ "$\circ$" – множення дробових інтегро-диференціальних операторів, а нижній індекс "+" – проекцію дробового інтегро-диференціального оператора на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,+}$ (формальних поліномів за оператором D^α).

Розглянемо на $\mathbb{A}_\alpha^*$ ще одну ієрархію гамільтонових потоків типу Лакса:

$$d\tilde{l}_\alpha/d\tilde{t}_n = [(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \tilde{l}_\alpha], \qquad \tilde{t}_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

для деякого елемента $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ порядку m_α та у випадку, коли $\tilde{t}_n = t_n$, $n \in \mathbb{N}$, отримаємо еволюційні рівняння для дробових диференціальних

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_23.pdf

операторів $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ порядків $(m_\alpha + s_\alpha)$ і $s_\alpha \in \mathbb{N}$ відповідно, які задають раціональну факторизацію елементів $l_\alpha, \tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ у вигляді:

$$l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}, \quad \tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha. \tag{3}$$

Теорема 1. *При перетворенні Беклунда* $P : (A_\alpha, B_\alpha) \mapsto (l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)$, *що діє за правилом* (3), *система двох потоків типу Лакса* (1)-(2) *на прямій сумі* $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ *еквівалентна системі еволюційних рівнянь:*

$$\begin{aligned} dA_\alpha/dt_n &= (\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+ A_\alpha - A_\alpha(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \\ dB_\alpha/dt_n &= (\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+ B_\alpha - B_\alpha(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \end{aligned} \tag{4}$$

на декартовому добутку $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$. *Система* (4) *володіє нескінченною послідовностю законів збереження* $H_n(A_\alpha, B_\alpha) := \gamma_n(l_\alpha)|_{l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}} = \gamma(\tilde{l}_\alpha)|_{\tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha} \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$.

Процедура редукування системи (1)-(2) на орбіти коприєднаної дії абстрактної групи Лі $G_\alpha := \exp \mathbb{A}_\alpha$ з врахуванням перетворення Беклунда (3) дозволяє отримувати ієрархії інтегровних нелінійних дробово-диференціальних динамічних систем на алгебрі Лі $\mathbb{A}_0$. Квазікласична апроксимація [1] таких систем, при якій комутатор $[.,.]$ на алгебрі Лі $\mathbb{A}_\alpha$ перетворюється на комутатор на алгебрі Лі дробових символів, приводить до нових ієрархій інтегровних гідродинамічних систем типу Бенні.

1. *Hentosh O.Ye., Kyshakevych B.Yu., Blackmore D., Prykarpatski A.K.* New fractional nonlinear integrable Hamiltonian systems // Applied Mathematics Letters. -– 2019. – **88**. – P. 41–49.

RATIONAL FACTORIZATION OF THE LAX TYPE FLOWS ON THE DUAL SPACE TO THE LIE ALGEBRA OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

For the Lax type Hamiltonian flows on the dual space to the Lie algebra of fractional integral-differential operators the rational factorization method which allows us to construct new integrable hierarchies of nonlinear fractional-differential dynamical systems on the Lie algebra of ordinary integral-differential operators and infinite sequences of their conservation laws is developed. The quasiclassical approximations of such hierarchies are shown to be new integrable hierarchies of hydrodynamic Benney type systems.

УДК 517.9

ДИНАМІКА КОНФЛІКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В ТЕРМІНАХ МІНІМАЛЬНИХ ГРАВЦІВ

Оксана Сатур

Інститут математики НАН України

oksana@satur.in.ua

Нехай двом опонентам A та B, які далі звуться гравцями, в момент часу $t = 0$ співставлено незалежні дискретні випадкові розподіли на просторі $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $n \geq 2$ (множина відвідуваних позицій):

$$A \sim \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n), \quad B \sim \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n).$$

Зрозуміло, що вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ є стохастичними:

$$0 \leq p_i, r_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} r_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Далі припускаємо, що вони є різними і неортогональними, тобто в $\mathbb{R}^n_+$ їх скалярний добуток задовольняє умову $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r}) < 1$. Координати p_i, r_i можна інтерпретувати як незалежні ймовірності влучання A, B в ω_i. Іншими словами, величини p_i, r_i характеризують випадкові події відвідування позиції ω_i гравцями A та B в початковий момент часу $t = 0$. Отже, $p_i = \mathbf{P}(A$ перебуває в позиції $\omega_i)$, де $\mathbf{P}(\cdot)$ означає ймовірність. Аналогічно для r_i.

Припустимо, що в наступні моменти дискретного часу $t = 1, 2, \ldots$ гравці A та B вступають один з одним у взаємодію, яку позначаємо $\divideontimes$. Це приводить до зміни відповідних їм розподілів:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{\divideontimes} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{\divideontimes} \cdots \xrightarrow{\divideontimes} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\divideontimes} \cdots . \tag{1}$$

Покладаємо, що закон зміни координат стохастичних векторів задається ітераційно такими формулами:

$$p_i^t = p_{\min}^t = \min_{j=1,\ldots,n} p_j^t, \qquad r_i^t = r_{\min}^t = \min_{j=1,\ldots,n} r_j^t, \tag{2}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_24.pdf

$$p_i^{t+1} = \frac{\alpha \cdot p_{\min}^t (1 - r_{\min}^t)}{z_p^t}, \qquad r_i^{t+1} = \frac{\alpha \cdot r_{\min}^t (1 - p_{\min}^t)}{z_r^t}, \tag{3}$$

$$p_j^{t+1} = \frac{p_j}{z_p^t}, \quad r_j^{t+1} = \frac{r_j}{z_r^t}, \qquad i \neq j, \qquad \alpha > 0, \tag{4}$$

$$t = 0, 1, \ldots, \quad p_j^0 = p_j, \quad r_j^0 = r_j, \quad p_{\min}^0 = p_{\min}, \quad r_{\min}^0 = r_{\min},$$

де нормувальні знаменники z_p^t і z_r^t вводяться для забезпечення стохастичності векторів $\mathbf{p}^{t+1}$, $\mathbf{r}^{t+1}$

$$z_p^t = \alpha \cdot p_{\min}^t (1 - r_{\min}^t) + \sum_{j \neq \min} p_j^t,$$

$$z_r^t = \alpha \cdot r_{\min}^t (1 - p_{\min}^t) + \sum_{j \neq \min} r_j^t.$$

Задача полягає у дослідженні поведінки траєкторій динамічної системи (1), залежно від значення α та розмірності векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$.

У циклах робіт, що описані в [1] досліджувались різні задачі, пов'язані з динамічними системами конфлікту у дискретному часі в термінах стохастичних векторів, заданих траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

де координати векторів $\mathbf{p}^{t+1}$, $\mathbf{r}^{t+1}$ визначаються системою різницевих рівнянь.

Дослідження виконувалися в рамках проєкту Національного фонду досліджень України, 2020.02/0089.

1. *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наукова думка, 2016. – 287 с.

DYNAMICS OF CONFLICT INTERACTION IN TERMS OF MINIMAL PLAYERS

A model of a dynamic conflict system with attractive interaction was built, the behavior of trajectories of which is determined by a pair of minimum values and depends on the value of some positive constant. The existence of stationary states has been proved, the existence of cyclic orbits has been analyzed, and the question of stability has been investigated.

UDC 517.977

OPTIMAL CONTROL OF A HYPERBOLIC SYSTEM OF COUNTABLE SEMILINEAR EQUATIONS

Oleksandr Hnatiuk, Volodymyr Kyrylych, Olha Milchenko

Ivan Franko National University of Lviv

gnatyksasha1997@gmail.com, vkyrylych@ukr.net, olga.milchenko@lnu.edu.ua

In the domain $V = \{x, t : 0 < t < T, -kt < x < kt, k > 0\}$, consider a certain process $\{y, z, v\}(x, t)$, the evolution of which in time and space is described by a degenerate (presence of the orthogonal to the coordinate axes characteristics) hyperbolic system of countable semilinear equations of the first order

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\dfrac{\partial y_i}{\partial x} = f_i(x,t,y_1,y_2,\ldots,z_1,z_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots), \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial t} = g_i(x,t,y_1,y_2,\ldots,z_1,z_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots), \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = \rho_i(x,t,y_1,y_2,\ldots,z_1,z_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots),\ i \in I, \end{cases} \tag{1}$$

where $I = \{i : i = 1, 2, \ldots\}$.

Let us supplement the system (1) with boundary conditions

$$\begin{aligned} y_i(-kt,t) &= \gamma_i^1(t, y_s(-kt,t)_{s\in I_1}, u^{(1)}(t)),\ i \in I_2 \cup I_3, \\ y_i(kt,t) &= \gamma_i^2(t, y_s(kt,t)_{s\in I_2}, u^{(2)}(t)),\ i \in I_1 \cup I_3, \\ z_i(-kt,t) &= \gamma_i^3(t, u^{(3)}(t)),\ i \in I, \\ z_i(kt,t) &= \gamma_i^4(t, u^{(4)}(t)),\ i \in I, \\ v_i(-kt,t) &= \gamma_i^5(t, u^{(5)}(t)),\ i \in I. \end{aligned} \tag{2}$$

Here I_1, I_2, I_3 are the sets of indices defined as follows:

$$I_1 = \{i \in I,\ \lambda_i(0,0) < -k\},\ I_2 = \{i \in I,\ \lambda_i(0,0) > k\},$$
$$I_3 = \{i \in I,\ -k < \lambda_i(0,0) < k\}.$$

These sets can be empty, consisting of a finite or countable number of elements. Let them contain s_1, s_2, s_3 elements, respectively. Without limiting generality, we can assume that s_1, s_2 and s_3 are equal to $\aleph_0$. We denote by $u^{(r)}(r = \overline{1,5})$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_25.pdf

the control vector functions such that for compacts $U^r (r = \overline{1,5})$, $u^{(r)} : \mathbb{R}_+ \to U^r \subset \mathbb{R}^{r_0}$, $(r_0 \in \aleph_0)$.

Let the target function for $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $z = (z_1, z_2, \ldots)$, $v = (v_1, v_2, \ldots)$ be

$$J(u^{(1)}, \ldots, u^{(5)}) = \int_0^T G_0(y_j(-kt,t)_{j\in I_1}, y_j(kt,t)_{j\in I_2}, z_j(-kt,t)_{j\in I}, z_j(kt,t)_{j\in I}, v_j(-kt,t)_{j\in I}, t)dt + \iint_V G(y,z,v,t)dxdt. \quad (3)$$

We need to study the problem

$$\min_{\nu_{ad}} J(u^{(1)}, \ldots, u^{(5)}), \quad (4)$$

where by ν_{ad} we mean the set of admissible sets $\{y, z, v, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}\}$, for which, when choosing the controls $\{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}\}$, there exists a unique, generalised in a certain sense, solution of the problem (1)-(2) [1].

The peculiarities of problems for countable systems of ordinary differential equations and their applications are described in [4], the methodology for solving such problems for hyperbolic systems are given in [1, 3], and the problems of optimal control of hyperbolic systems are considered in [2].

For the proposed variant of the optimal control problem, the theorem of fulfilling the necessary conditions of optimality is proved.

The variational analysis of the problem under study is based on the use of variations that ensure smoothness of the admissible controls.

1. *Andrusyak R.V., Kyrylych V.M., Peliushkevych O.V.* A Problem for degenerated semilinear hyperbolic system in sector // Carpathian Mathematical Publications. -– 2011. – **3**, № 2. – P. 4–12.
2. *Derevianko T.O., Kyrylych V.M.* Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning // Ukr. Math. Journal. – 2015. – **67**, № 2. – P. 211–229.
3. *Firman T.I., Kyrylych V.M.* Mixed problem for countable hyperbolic system of linear equations // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – **5**, № 2. – P. 47–60.
4. *Samoilenko A.M., Teplinskii Yu. V.* Countable systems of differential equations. – Brill Academic Publishers, 2003. – 284 p.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ ЗЛІЧЕННИХ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Отримано необхідні умови оптимальності задачі оптимального керування виродженою гіперболічною системою зліченних напівлінійних рівнянь.

УДК 517.956.4

ПРО ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА

Галина Івасюк[1], **Наталія Процах**[2], **Тоня Фратавчан**[1]

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці*

[2] *Національний лісотехнічний університет України, м. Львів*

h.ivasjuk@chnu.edu.ua, protsakh@ukr.net, t.fratavchan@chnu.edu.ua

У 1960 році професор С.Д. Ейдельман узагальнив рівняння, параболічні за Петровським, увівши новий клас систем рівнянь

$$\frac{\partial^{n_i} u}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0+\frac{k_1}{2b_1}+\cdots+\frac{k_n}{2b_n}\le n_j} A_{ij} \frac{\partial^{k_0+k_1+\cdots+k_n} u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},\ i=1,\ 2,\dots,\ N, \qquad (1)$$

які названо $2\vec{b}$ – параболічними (параболічними за Ейдельманом) в області G, якщо для довільних $(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in G$ і $\sigma_1,\ \sigma_2, \dots, \sigma_n$ таких, що $\sigma_1^{2b_1} + \sigma_2^{2b_2} + \cdots + \sigma_n^{2b_n} = 1$, система рівнянь

$$\det\left(\left\| \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0+\frac{k_1}{2b_1}+\cdots+\frac{k_n}{2b_n}\le n_j} A_{ij} \lambda^{k_0} (i\sigma)^k \right\| - \left\| \begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix} \right\| \right) = 0$$

має корені $\lambda_i(t, x, \sigma)$, дійсні частини яких задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} \lambda_i(t, x, \sigma) < -\delta, \quad i = 1,\ 2, \dots,\ N,$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),\ 2\vec{b} = (2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n),\ \delta > 0.$

Детальний огляд таких систем та результатів дослідження властивостей фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) задачі Коші та породжених нею потенціалів, класів коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо неоднорідності систем і початкових функцій, встановлення локальної розв'язності нелінійних систем, одержання внутрішніх оцінок розв'язків $2\vec{b}$-параболічних систем, є у монографії [1].

Пізніше системи рівнянь (1) узагальнювалися багатьма вченими. Зокрема, С.Д. Івасишеним та Г.П. Івасюк розглянуто новий клас систем

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_27.pdf

диференціальних рівнянь з частинними похідними, який поєднує у собі структури систем, параболічних за Солонниковим і Ейдельманом. У цих системах порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати від j та від k, крім того диференціювання за різними просторовими змінними мають загалом різну вагу стосовно диференціювання за часовою змінною. Для таких систем рівнянь доведено теореми про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, а також у відповідних просторах Соболєва-Слободецького для дещо вужчого класу.

У спільних роботах Івасишена С.Д., Фратавчан Т.М. розглядалися $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи рівнянь в областях, необмежених за часовою змінною. Для них були введені спеціальні $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умови в термінах оцінок фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) і матриці Гріна задачі Коші; наведені приклади класів систем як першого, так і довільних порядків, які задовольняють $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умови; встановлені інтегральні зображення та оцінки розв'язків, а також коректна розв'язність задачі Коші і задачі без початкових умов відповідно у півпросторах $t > 0$ і $t \le T$; доведено теореми про стійкість розв'язків задачі Коші та теореми типу Ліувілля; здійснено побудову та одержано оцінки ФМР поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породженої $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою.

У працях Лавренюка С.П., Коркуни О.Є., Процах Н.П. вивчалися задачі для нелінійних рівнянь типу Ейдельмана (в (1) числа $N = 1$, $j = 1$, $k_0 = 0$). У деяких доданках рівняння (1) були нелінійності степеневого вигляду або нелінійності типу Ліпшиця. Для задачі Коші, мішаних та обернених задач для таких типів рівнянь встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків в просторах Соболєва та Лебега, знайдено оцінки цих розв'язків.

Згадані дослідження виконувалися, зокрема, в рамках держбюджетних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. У доповіді буде детальніше проаналізовано результати цих досліджень.

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 pp.

ON DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR EIDELMAN TYPE EQUATIONS

In this talk we present the main results of investigation of Cauchy problem, initial-boundary problems and the inverse coefficient problems for Eidelman type equations and systems of equations.

УДК 517.946

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ У ПРОСТОРАХ ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ТИПУ РЯДІВ ДІРІХЛЕ-ТЕЙЛОРА

Володимир Ільків, Наталія Страп, Ірина Волянська

Національний університет "Львівська політехніка"

ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua, i.volyanska@i.ua

Дана робота присвячена дослідженню умов коректної розв'язності задачі з нелокальними крайовими умовами для диференціально-операторного рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність залежить від проблеми малих знаменників і коректність забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов на коефіцієнти рівнянь та параметри нелокальних умов.

В області $\mathcal{D} = [0,T] \times \mathcal{S}$, де $\mathcal{S}$ — область з множини $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T > 0$, для диференціального рівняння з частинними похідними

$$Lu = \sum_{s_0+s_1 \le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

досліджено задачу з нелокальними умовами

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

де $B = zd/dz$, $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,z)$ — шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ — задані функції змінної z.

Введено такі позначення: $\mathcal{N} = \{\nu_k \in \mathbb{R} \colon k \in \mathbb{Z}\}$ — множина попарно різних дійсних чисел, яку будемо називати спектром функцій, якщо вона немає скінченних точок скупчення, тобто $|\nu_k| \to +\infty$ при $|k| \to +\infty$, послідовність ν_k зростає при зростанні k, $\nu_0 = 0$ і $\nu_k/k > 0$, якщо $k > 0$; $\mathbf{W}\mathcal{N}$ — лінійний простір скінченних сум вигляду $P(z) = \sum\limits_k P_k z^{\nu_k}$, де $z \in \mathcal{S}$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k \in \mathbb{Z}$.

Умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) встановлено у просторах експоненційного типу $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$, де $\beta \colon [0,T] \to \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ —

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_28.pdf

це банахів простір таких функцій $u = u(t,z)$, похідні $\frac{\partial^r u}{\partial t^r}$ яких визначені для $r = 0,1,\dots,n$ формулою $\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^{\nu_k}$, і функції $t \mapsto \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-r}^{\beta(t)}(\mathcal{S})}$ є неперервними на $[0,T]$, а квадрат норми функції u обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta(t)}_{q-r}(\mathcal{S})}.$$

Простір $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q}(\mathcal{S})$, де $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$,— це гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^{\nu_k}$ зі спектром $\mathcal{N}$, який отриманий поповненням множини основних функцій $\mathbf{W}\mathcal{N}$ за нормою $\|\psi\|_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q}(\mathcal{S})} = \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\nu}_k^{2q} e^{2\tilde{\nu}_k \beta} |\psi_k|^2 \right)^{1/2}$, $\tilde{\nu}_k = \sqrt{1+\nu_k^2}$;

Доведено теорему єдиності та теореми існування розв'язку задачі у просторах рядів Діріхле-Тейлора. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими комплексними змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників. У випадку однієї змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кмить І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наукова думка, 2002. – 416 с.
2. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників. // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 12. – С. 1624–1650.
3. *Ільків В.С., Стран Н.І.* Нелокальна крайова задача для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю у просторах рядів Діріхле–Тейлора з фіксованим спектром. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 77–85.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATION IN SPACES OF EXPONENTIAL TYPE OF DIRICHLET-TAYLOR SERIES

The non-local boundary value problem for partial differential equations with the operator of the generalized differentiation $B = zd/dz$, which operate on functions of scalar complex variable z, are considered. A criterion for the unique solvability of these problems and a sufficient conditions for the existence of its solutions are established in the spaces of functions, which are Dirichlet-Taylor series. The uniqueness theorem and existence theorems of the solution of problem in these spaces are proved. Correctness after Hadamard of the problem is shown. It distinguishes it from an ill-conditioned after Hadamard problem with many spatial variables.

УДК 517.95

ПРО КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Іван Савка

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України

s-i@ukr.net

Нехай $\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ – одиничне коло, $\mathcal{D} = (-\alpha, \beta) \times \Omega$, де $\alpha, \beta > 0$. В області $\mathcal{D}$ розглянемо задачу спряження з багатоточковими умовами:

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1 = 0, & (t,x) \in (-\alpha, 0) \times \Omega, \\ \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu_j \frac{\partial}{\partial x}\right) u_2 = 0, & (t,x) \in (0, \beta) \times \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0_-} \frac{\partial^{j-1} u_1}{\partial t^{j-1}} = \lim_{t \to 0_+} \frac{\partial^{j-1} u_2}{\partial t^{j-1}}, \quad j = 1, \ldots, \theta, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_1|_{t=t_j} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_2|_{t=t_{r+j}} = \varphi_{r+j}, \quad j = 1, \ldots, \ell, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

де $n, m, \theta, r, \ell \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ – попарно різні набори дійсних чисел, $-\alpha \le t_1 < \ldots < t_r < 0 < t_{r+1} < \ldots < t_{r+\ell} \le \beta$, $\theta + r + \ell = n + m$, $\varphi_j = \varphi_j(x)$ – задані функції, $u_1 = u(t,x)$ і $u_2 = u_2(t,x)$ – шукані розв'язки.

У загальному випадку дана задача є умовно коректною, а питання про існування розв'язків пов'язане з проблемою малих знаменників (див., наприклад [1]). Зокрема, для задачі (1)–(4) малими знаменниками будуть вирази вигляду

$$\delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & -\mu_1 & \ldots & -\mu_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{\theta-1} & \ldots & \lambda_n^{\theta-1} & -\mu_1^{\theta-1} & \ldots & -\mu_m^{\theta-1} \\ e^{ik\lambda_1 t_1} & \ldots & e^{ik\lambda_n t_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{ik\lambda_1 t_r} & \ldots & e^{ik\lambda_n t_r} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e^{ik\mu_1 t_{r+1}} & \ldots & e^{ik\mu_m t_{r+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & e^{ik\mu_1 t_\ell} & \ldots & e^{ik\mu_m t_\ell} \end{vmatrix}, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_29.pdf

У статті [2] доведено коректну розв'язність аналогічної задачі до задачі (1)–(4) для однорідних рівнянь високого порядку, які можуть допускати факторизацію вигляду (1), у шкалі просторів Соболєва для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{r+\ell}$) векторів, складених з вузлів інтерполяції багатоточкових умов, тобто $(t_1, \ldots, t_{r+\ell})$. Однак питання про коректність такої задачі стосовно коефіцієнтів факторизації $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ рівнянь (1) не розглядалось.

За допомогою метричного підходу у роботі встановлено оцінки знизу для малих знаменників задачі (1)–(4) вигляду

$$|\delta(k)| \geq C|k|^{-\gamma}, \quad C > 0, \gamma \in \mathbb{R},$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів факторизації, з яких випливає існування розв'язку задачі (1)–(4) у просторах Соболєва.

Отримані результати можна поширити на випадок, якщо кожен із вузлів $t_1, \ldots, t_{r+\ell}$ у багатоточкових умовах має кратність [3].

1. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журнал. – 2006. – 58, № 12. – С. 1624–1650.
2. *Медвідь О.М., Савка І.Я., Тимків І.Р.* Задача спряження з багатоточковими умовами для мішаних рівнянь гіперболічного типу високого порядку // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2019. – № 1 (53). – С. 21–28.
3. *Савка І., Тимків І.* Задача лінійного спряження з багатоточковими умовами у випадку кратних вузлів для строго гіперболічних однорідних рівнянь високого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 96–108.

ON THE CORRECTNESS OF THE CONJUGATE PROBLEM WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR FACTORIZED HIGHER ORDER EQUATIONS

In general, the problem (1)-(4) *is conditionally well-posed and its solvability is related to the problem of small denominators and may be unstable with respect to small variations in the coefficients of the problem and in the parameters of the domain. Using metric approach, we will discuss the conditions for the solvability of the problem in Sobolev spaces and prove estimates for small denominators for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m)$.

УДК 517.95

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Володимир Ільків [1], **Михайло Симотюк** [2], **Ярослав Слоньовський** [1]

[1] *Національний університет «Львівська політехніка»,*
[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

ilkivvv@i.ua, quaternion@ukr.net, yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

Нижче використовуватимемо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = (0,T)\times\Omega^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $D=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_p)$, $Pol_{n,p}^{hom}$ – множина усіх однорідних поліномів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами.

Нехай $n\in\mathbb{N}$, а поліноми $A_j\in Pol_{j,p}^{hom}$, $j=1,\ldots,n$, є такими, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ многочлен

$$L(\lambda,ik)\equiv\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(ik)\lambda^j \tag{1}$$

має прості суто уявні корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$, причому $P_L(\xi)\cdot A_0(\xi)\neq 0$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^p$, $|\xi|=1$ (тут $P_L(\xi)$ – дискримінант многочлена $L(\lambda,\xi)$).

Умови коректності задачі Ніколетті для рівняння з частинними похідними типу Ейлера

$$L\left(t\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x)\equiv\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u+\sum_{j=0}^{n-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j}(D)u=0,\ (t,x)\in Q_T^p, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=t_j}=\varphi_j(x),\ j=1,\ldots,n,\ 1\le t_1<\ldots<t_n\le T,\ x\in\Omega^p, \tag{3}$$

пов'язані із властивостями таких характеристичних визначників [3]:

$$\Delta(k)=\det\left\|y_q^{(j-1)}(t_j,k)\right\|_{j,q=1}^{n},\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

де $y_q(t,\vec{0})=\ln^{q-1}(t)$, якщо $k=\vec{0}$; $y_q(t,k)=t^{\lambda_q(k)}$, якщо $k\neq\vec{0}$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_34.pdf

Зокрема, при виконанні умови

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0, \tag{5}$$

задача (2), (3) має єдиний формальний розв'язок, що зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{j,k}\, y_q(t,k) \exp(ik,x), \tag{6}$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $y_q(t_j,k)$ у визначнику $\Delta(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$.

Збіжність ряду (6) пов'язана із проблемою малих знаменників [3, 4]: визначники $\Delta(k)$ можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, і спричиняти розбіжність ряду (6). Тому актуальним завданням є встановлення оцінок знизу для визначника $\Delta(k)$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1,\dots,t_n) \in [1,T]^n$ нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq (1+|k|)^{-\omega} \tag{7}$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.

Розглянуто частковий випадок задачі, коли вузли інтерполяції в умовах (3) є логарифмічно рівновіддаленими. Отримані результати є розвитком досліджень, проведених у [1, 2].

1. Ільків В. С., Симотюк М. М., Слоньовський Я. О. Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 1–2. – С. 65–79.
2. Матурін Ю. П., Симотюк М. М. Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2018. – 2, вип. 2 (33). – С. 100–108.
3. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

METRIC ESTIMATES OF THE DETERMINANT OF THE NICOLETTI PROBLEM FOR THE EULER-TYPE EQUATION

The estimates from below are established for the characteristic determinant of the Nicoletti problem for an Euler-type partial differential equation. Partial case is considered when the interpolation nodes form a geometric progression.

УДК 517.95

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РІВНЯННЯ ТРІКОМІ

Антон Кузь

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

kuz.anton87@gmail.com

В області $D := \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}\}$ розглядаємо задачу знаходження майже періодичного за змінною x із заданим спектром $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R} : d_1|k|^{\sigma_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant d_2|k|^{\sigma_2}, \mu_{-k} = \mu_k, k \in \mathbb{Z}\}$$

розв'язку $u := u(t,x)$ рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad n\mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

з умовами

$$\int_0^T t^{r_1} u(t,x)dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^T t^{r_2} u(t,x)dt = \varphi_2(x), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де φ_j, $j = 1,2$, майже періодичні зі спектром $\mathcal{M}$ функції.

Рівняння мішаного типу вигляду (1) виникають, зокрема, у задачах трансзвукової гідродинаміки [1]. Розв'язність задач з інтегральними умовами для таких рівнянь часто пов'язана із проблемою малих знаменників і не є стійкою відносно малих змін параметрів задачі [2].

У даній роботі встановлено умови коректної розв'язності задачі (1), (2) у вагових просторах типу Соболєва функцій, майже періодичних за змінною x.

1. *Cole J. D., Cook L. P.* Transonic aerodynamics – Amsterdam : Elsevier Sc. Publ., 1986. – 482 p.
2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кмітьь І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наукова думка, 2002. – 420 с.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR GENERELIZED TRICOMI EQUATION

In the paper the almost periodic solution of the integral problem for the generelized Tricomi equation are constructed and its existence in Sobolev-type spaces is proved.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_33.pdf

UDC 512.813+517.957.6

CLASSIFICATION OF SYMMETRY REDUCTIONS FOR SOME P(1,4)-INVARIANT PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vasyl Fedorchuk, Volodymyr Fedorchuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine

vasfed@gmail.com, volfed@gmail.com

We have investigated the relationship between the structural properties of low-dimensional ($\dim L \leq 3$) nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group P(1,4) and types of symmetry reduction for the following (1+3)-dimensional PDEs:

- Eikonal equation,
- Euler-Lagrange-Born-Infeld equation,
- Homogeneous Monge-Ampère equation,
- Inhomogeneous Monge-Ampère equation.

In our talk, we plan to present some of the results obtained [1 – 5].

1. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On classification of symmetry reductions for the Eikonal equation // Symmetry. – 2016. – **8**. – Art. 51. – 32 p.
2. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* Classification of symmetry reductions for the Eikonal equation. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 2018. – 176 p.
3. *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* On the classification of symmetry reduction and invariant solutions for the Euler-Lagrange-Born-Infeld equation // Ukr. J. Phys. – 2019. – **64**, No. 12. – P. 1103–1107.
4. *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* On symmetry reduction of the (1 + 3)-dimensional inhomogeneous Monge-Ampère Equation to the first-order ODEs // Applied Mathematics. – 2020. – **11**, No. 11. – P. 1178–1195.
5. *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* Reduction of the (1 + 3)-dimensional Inhomoge-neous Monge–Ampère equation to first-order partial differential equations // Ukrain. Math. Journ. – 2022. – **74**, No. 3. – P. 472–483.

КЛАСИФІКАЦІЯ СИМЕТРІЙНИХ РЕДУКЦІЙ ДЛЯ ДЕЯКИХ P(1,4)-ІНВАРІАНТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Проведено класифікацію симетрійних редукцій для деяких (1+3)-вимірних P(1,4)-інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_02.pdf

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНІ ТРИВИМІРНІ УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В КОНТЕЙНЕРІ КВАДРАТНОГО ПЕРЕРІЗУ

Олександр Лагодзінський

Інститут математики НАН України

lagodzinskyi@gmail.com

У доповіді розглянуто деякі важливі характеристики коливального руху абсолютно жорсткого баку з вільною поверхнею квадратної форми, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною. Коливання рідини в контейнері описано за допомогою еволюційної крайової задачі із вільною (наперед невизначеною) межею. Опис таких хвиль здійснюється за допомогою нелінійної модальної системи типу Наріманова–Моїсєєва, яку вперше отримано в [1]. Було побудовано та проаналізовано асимптотичні періодичні розв'язки системи та отримано можливість класифікувати резонансні усталені хвилі та їх стійкість для різних типів гармонічного зворотно-поступального руху (поздовжнього, діагонального та косого збурення).

У [2] класифіковано усталені тривимірні резонансні хвилі для випадку довільних тривимірних непараметричних циклічних рухів баку. У доповіді буде показано, як завдяки доведенню асимптотичної еквівалентності відповідних періодичних розв'язків модальної системи можна подати резонансні усталені хвилі як функції кутового положення, співвідношення осей і напряму цих еліптичних збурень (орбіт). Буде розглянуто залежність між орбітами збурень та хвильовими характеристиками руху рідини. Наприклад, напрямок орбіти збурення не впливає на амплітудно-частотні характеристики для симетричного та діагонального типів збурення. Але для збурень косого типу даний факт вже не виконується, а також можна спостерігати те, що при зміні співвідношення осей еліпсу від 0 до 1 можна спостерігати суттєву зміну характеристик руху хвиль.

1. *Faltinsen O.M., Rognebakke O., Timokha A.N.* Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin // Journal of Fluid Mechanics. – 2003.– **487**. – P. 1–42.
2. *Faltinsen O.M., Lagodzinskyi O., Timokha A.N.* Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric forcing // Journal of Fluid Mechanics. – 2020. – **894**, A10. – P. 1–42.

RESONANT THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR SLOSHING IN A SQUARE BASE BASIN

This talk presemts results on the resonant steady-state sloshing in a square base container by using a Narimanov–Moiseev-type nonlinear modal equations for the sloshing problem. Using these type of modal equation, we can observe sway/pitch/surge/roll periodic motion and classify their different type of motion. Classification of these type of motion in three-dimensional are discovered.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_06.pdf

UDC 517.95

EVOLUTION STOKES SYSTEM OF THE THIRD ORDER WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

Oleh Buhrii[1], **Oksana Kholyavka**[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,* [2]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine*

[1]oleh.buhrii@lnu.edu.ua, [2]oksana.t.kholyavka@gmail.com

Let $n \in \mathbb{N}$ and $T > 0$ be fixed numbers, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the smooth boundary $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$.

We consider the problem of finding a pair of functions $\{u, \pi\}$ that satisfy the following relations:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t)u_{tx_i}\Big)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(B_{ij}(x,t)u_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x)|u_t|^{q(x)-2}u_t +$$

$$+ \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)u_t(y,t)\,dy + \nabla\pi = f(x,t) \quad \text{in} \quad Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad Q_{0,T}, \tag{2}$$

$$\int_{\Omega} \pi(x,t)\,dx = 0 \quad \text{in} \quad (0,T), \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{5}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{6}$$

where $u = (u_1, \ldots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ is the velocity field, $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ is the pressure, $\nabla\pi = (\frac{\partial\pi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\pi}{\partial x_n})$, $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$, A_{ij}, B_{ij} $(i,j = \overline{1,n})$, G, $\mathfrak{Z}$ are some matrices, f is some vector function. The function $q(\geq 1)$ is called the variable exponent of nonlinearity to the equation (1).

Under additional conditions for data-in, we prove the solvability of problem (1)–(6).

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_18.pdf

UDC 517.9

HOPF BIFURCATION FOR GENERAL 1D SEMILINEAR WAVE EQUATIONS WITH DELAY

Iryna Kmit

Humboldt University of Berlin,
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine

irina.kmit@hu.berlin.de

We consider boundary value problems for 1D autonomous damped and delayed semilinear wave equations of the type

$$\partial_t^2 u(t,x) - a(x,\lambda)^2 \partial_x^2 u(t,x) = b(x,\lambda,u(t,x),u(t-\tau,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x))$$

with Dirichlet-Neumann boundary conditions. We state conditions ensuring Hopf bifurcation, i.e., existence, local uniqueness (up to time shifts), regularity (with respect to t and x) and smooth dependence (on τ and λ) of small non-stationary time-periodic solutions, which bifurcate from the stationary solution $u = 0$, and we derive a formula which determines the bifurcation direction with respect to the bifurcation parameter τ.

To this end, we transform the wave equation into a system of partial integral equations and then apply a Lyapunov-Schmidt procedure and a generalized implicit function theorem. The main technical difficulties, which have to be managed, are typical for hyperbolic PDEs (with or without delay): small divisors and the "loss of derivatives" property.

This is joint work with Lutz Recke.

Kmit I., Recke L. Hopf bifurcation for general 1D semilinear wave equations with delay // J. Dyn. Dif. Eqs. – 2022. – **34**. – P. 1393–1431.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_19.pdf

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА З БАГАТЬМА НЕВІДОМИМИ У ПРАВІЙ ЧАСТИНІ РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ

Галина Лопушанська, Ольга М'яус, Олена Пасічник

Львівський національний університет імені Івана Франка
Національний університет "Львівська політехніка"

lhp@ukr.net, myausolya2016@gmail.com, olena.pasichnyk@lnu.edu.ua

Нехай $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих нескінченно диференційовних функцій, $\gamma > 0$,

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_\alpha e^{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall\, \alpha\}$$

із деякими додатними сталими $C_\alpha = C_\alpha(v)$ і $a = a(v)$. Відомо, що

$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \cup_{a>0} S_{\gamma,a}(\mathbb{R}^n)$, де $S_{\gamma,a}(\mathbb{R}^n) = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :$

$$||v||_{k,a} = \sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^\alpha v(x)| < +\infty\ \ \forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2\},$$

і нехай $S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ простір функцій $v \in C^1(\bar{Q})$ таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^s v(\cdot,t) \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ для всіх $t \in [0,T]$, $s = 0,1$.

Знайдено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі

$$D_t^\beta u - A(x,D)u = \sum_{l=1}^m R_l(x) g_l(t) + F(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u(x,0) = F_1(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\tfrac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_l(t)dt = \Phi_l(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ l \in \{1,\dots,m\}\text{б}$$

про визначення набору функцій $(u, R_1, \dots, R_m) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times [S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$, де g_l, Φ_l, η_l $(l \in \{1,\dots,m\})$, F, F_1 – задані функції, $D_t^\beta v$ – похідна Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто функції v порядку $\beta \in (0,1]$, $D_t^1 v = \frac{\partial v}{\partial t}$, $A(x,D)$ – лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку.

INVERSE PROBLEM WITH MANY UNKNOWNS IN A SOURCE TERM OF FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

The sufficient conditions of the unique solvability are found for an inverse problem of determining many unknown functions from the Schwarz-type space of smooth functions rapidly decreasing at infinity in a source term of a diffusion equation with the Djrbashian-Nersesian-Caputo time fractional derivative. Time integral additional conditions are used.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_26.pdf

UDC 537.876

POYNTING VECTOR OF ONE-WAY NULL ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE KERR SPACE-TIME

Volodymyr Pelykh, Yurii Taistra

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics

vpelykh@gmail.com

We consider a one-way null solution with separated variables of the Maxwell equations in the Kerr space-time [1]

$$\varphi_{2m}(t,r,\theta,\phi,\omega) = \frac{C_m(\omega)}{\sin\theta(r-ia\cos\theta)} e^{i\omega\eta_1 + im\eta_2} e^{-a\omega\cos\theta} \frac{(1-\cos\theta)^m}{\sin^m\theta}. \quad (1)$$

$$\eta_1 = t - r - M\ln\Delta - \frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}} \ln\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right),$$

$$\phi - \frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}} \ln\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right),$$

$C_m(\omega)$ is complex constant, $\omega \in \mathbb{R}$ is wave frequency, $m \in \mathbb{Z}$ is azimuthal number, M is a black hole mass ($M > 0$), a its specific angular momentum ($0 < a < M$), $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $r_+ = M + \sqrt{M^2-a^2}$ and $r_- = M - \sqrt{M^2-a^2}$ event horizon and Cauchy horizon respectively.

The Poynting vector $\mathbf{S}$ of such electromagnetic field is computed in Kinnersley orthonormal frame

$$\mathbf{S} = -\frac{c}{4\pi}\left(\frac{|C_m(\omega)|^2 e^{-2a\omega\cos\theta}}{\Sigma\sin^2\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{2m}\right)\mathbf{i}. \quad (2)$$

The angular momentum of the black hole affects the energy flow of electromagnetic waves, which can be seen from the factor $e^{-2a\omega\cos\theta}$. In the northern hemisphere ($\cos\theta > 0$) the rotating black hole reduces the energy flow of the right circularly polarized wave ($\omega > 0$) and amplifies the left circularly polarized wave ($\omega < 0$) energy flow. In the southern hemisphere ($\cos\theta < 0$) — on the contrary.

1. *Pelykh V.O., Taistra Y.V.* Solution with separable variables for null one-way Maxwell field in Kerr space-time // Acta Physica Polonica B. – 2017. – **10**, №2. – P. 387–390.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_30.pdf

УДК 517.9

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Ольга Кічмаренко, Володимир Сапожніков

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

o.kichmarenko@onu.edu.ua, vladimir.sapozhnikov@stud.onu.edu.ua

Розглянемо диференціально-різницеве включення зі змінним запізненням:

$$x_{i+1} \in x_i + \varepsilon F\left(i, x_i, x_{\sigma(i)}\right), \quad x_0 = x^0, \tag{1}$$

де $x_i \in R^n$ – поточний стан системи, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $F : I \times R^n \times R^n \to comp(R^n)$, $F\left(i+\omega, x_i, x_{\sigma(i)}\right) = F\left(i, x_i, x_{\sigma(i)}\right)$, ω – період (ціле додатнє число), $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $N = E(l\varepsilon^{-1}), L - const$, $\sigma(i)$ – відома функція, яка визначає момент дискретного часу з передісторії, що впливає на поточний стан системи, $\sigma(i) \in I_\sigma = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$, тобто $\sigma(i) \le i$ для $i \in I$.

Поставимо у відповідність (1) наступне усереднене включення:

$$y_{(j+1)\omega} \in y_{j\omega} + \varepsilon\omega F^0\left(y_j, y_{\sigma(j)}\right), \quad y_0 = x^0, \tag{2}$$

$$F^0\left(y_j, y_{\sigma(j)}\right) = \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{\omega} F\left(j, x_j, x_{\sigma(j)}\right), \tag{3}$$

$$y_i = y_{(j)\omega} + (i - j\omega)(y_{(j+1)\omega} - y_{(j)\omega})/\omega, \quad j\omega \le i \le (j+1)\omega. \tag{4}$$

Для включень доведено теорему, яка є аналогом першої теореми М. М. Боголюбова [1 – 3].

1. *Kichmarenko O.D.* Averaging of differential equations with Hukuhara derivative with maxima // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2009. – **57**, No. 3. – P.447–457.
2. *Kichmarenko O.D., Karpycheva M.L.* General averaging scheme for discrete equations with variable delay // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – **226**, No. 3. – P.270–284.
3. *Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.

AVERAGING METHOD OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE INCLUSIONS

It has been demonstrated that the averaging method over a finite interval is applicable for differential-difference equations with variable delay.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_31.pdf

УДК 919.6

ПРО МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО РІВНЯННЯ СТОКСА

Ігор Борачок, Роман Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка

ihor.borachok@lnu.edu.ua, roman.chapko@lnu.edu.ua

Ми розглядаємо наближене розв'язування нестаціонарної задачі Стокса у двовимірних двозв'язних областях. Використовуючи метод Роте за часовою змінною, вихідна задача зводиться до послідовності стаціонарних неоднорідних задач, які повністю дискретизовані методом фундаментальних розв'язків (МФР).

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – двозв'язна область, обмежена двома замкненими кривими $\Gamma_\ell \in C$, $\ell = 1, 2$ і нехай $T > 0$ – задана стала. Нестаціонарна задача Стокса полягає у знаходженні вектор-функції $\vec{u} : D \times (0, T] \to \mathbb{R}^2$ і скалярної функції $p : D \times (0, T] \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_r}\Delta\vec{u} - \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nabla p = 0 & \text{в } D \times (0, T], \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 & \text{в } D \times (0, T], \\ \vec{u} = \vec{f_\ell} & \text{на } \Gamma_\ell \times (0, T],\ \ell = 1, 2, \\ \vec{u}(\cdot, 0) = \vec{0} & \text{в } D, \end{cases} \tag{1}$$

де c_r – відоме число Рейнольдса, $\vec{f_\ell} : \Gamma_\ell \times (0, T] \to \mathbb{R}^2$, $\ell = 1, 2$ – відомі гладкі вектор-функції, для яких $\vec{f_\ell}(\cdot, 0) = \vec{0}$, $\ell = 1, 2$.

Розгляд задачі саме у двозв'язній області обумовлений подальшими планами наближеного розв'язування задач реконструкції недоступної межі та крайових умов на ній. Для часткової дискретизації задачі (1) по часовій змінній застосовуємо метод Роте (див. [2]). На рівновіддаленому поділі $t_k = (k+1)h$, $k = -1, \ldots, N-1$, $h = \dfrac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ наблизимо шукані функції $(\vec{u}(\cdot, t_k), p(\cdot, t_k))$ елементами послідовності $(\vec{u}_k, p_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$, які є розв'язками послідовності стаціонарних задач

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_r}\Delta\vec{u}_k - \kappa^2\vec{u}_k - \nabla p_k = -\kappa^2\vec{u}_{k-1} & \text{в } D, \\ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 & \text{в } D, \\ \vec{u}_k = \vec{f}_{\ell,k} & \text{на } \Gamma_\ell,\ \ell = 1, 2, \end{cases} \tag{2}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_32.pdf

де $\kappa^2 = \dfrac{1}{h}$, $\vec{f}_{\ell,k} = \vec{f}_\ell(\cdot, t_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$, $\ell = 1, 2$ і $\vec{u}_{-1} = \vec{0}$.

Для повної дискретизації задачі (2) використовуємо МФР (див. [1]). Апроксимуємо функції $\vec{u}_k$ і p_k лінійними комбінаціями звужень елементів фундаментальної послідовності для систем диференціальних рівнянь з (2)

$$\vec{u}_k(x) \approx \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{k-m}(x, y_j)\vec{\alpha}_{m,j}, \quad x \in D, \tag{3}$$

$$p_k(x) \approx \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} \vec{e}(x, y_j)^\top \vec{\alpha}_{m,j}, \quad x \in D, \tag{4}$$

де 2×2 матриці $\mathbf{E}_k(x, y)$ – відомі елементи фундаментальної послідовності (див. [2]), $\vec{e}(x, y) = -\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{x - y}{|x - y|^2}$, $x \neq y$; $y_j \notin \overline{D}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – вибрані точки джерела, $n \in \mathbb{N}$ – кількість точок джерела; $\vec{\alpha}_{m,j} \in \mathbb{R}^2$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – невідомі коефіцієнти, які знаходимо за методом колокації із крайових умов Діріхле у (2). В результаті, отримуємо послідовність систем лінійних рівнянь, для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, із рекурентною правою частиною

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_0(x_{\ell,i}, y_j)\vec{\alpha}_{k,j} = \vec{f}_{\ell,k}(x_{\ell,i}) - \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{k-m}(x_{\ell,i}, y_j)\vec{\alpha}_{m,j}, \tag{5}$$

для $i = 1, \ldots, \tilde{n}/2$, $\ell = 1, 2$, $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, $\tilde{n} \geq n$ – парна кількість точок колокації $x_{\ell,i} \in \Gamma_\ell$. Системи (5) розв'язуємо методом найменших квадратів. Наближений розв'язок у кожний момент часу t_k, $k = 0, \ldots N-1$ у будь-якій точці $x \in D$ знаходимо за формулами (3) та (4).

Здійснені чисельні експерименти підтверджують ефективність запропонованого підходу.

1. *Borachok I.* A method of fundamental solutions for heat and wave propagation from lateral Cauchy data / I. Borachok, R. Chapko, B.T. Johansson // Numerical Algorithms. – 2022. – **89**. – P. 431–449.
2. *Chapko R.* On the combination of Rothe's method and boundary integral equations for the nonstationary Stokes equation / R. Chapko // Journal of integral equations and applications. – 2001. – **13**. – P. 99–116.

ON THE METHOD OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS TO THE NONSTATIONARY STOKES PROBLEM

We consider numerical solution of the nonstationary Stokes problem in two dimensional double connected domains. Using the Rothe's method, the problem is reduced to a sequence of the stationary problems, which is fully discretized by the method of fundamental solutions.

УДК 517.95

ОПЕРАТОРНІ РІВНЯННЯ З ДІАГОНАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ У ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Микола Бокало, Михайло Симотюк

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

mm.bokalo@gmail.com, mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

Нехай l' – простір усеможливих послідовностей $u=(u_{km})$ комплексних чисел $u_{km}\in\mathbb{C}$, занумерованих двома індексами $k,m\in\mathbb{N}$; $A_1: l'\to l'$, $A_2: l'\to l'$ – лінійні оператори, дія яких на $u\in l'$ визначається рівностями

$$A_1u_{km}=\lambda_k u_{km}, \qquad A_2u_{km}=\mu_m u_{km}, \qquad k,m\in\mathbb{N},$$

де (λ_k), (μ_k) – такі послідовності, що виконуються оцінки

$$C_1 k^{\omega}\le|\lambda_k|\le C_2 k^{\omega}, \quad C_1 k^{\omega}\le|\mu_k|\le C_2 k^{\omega}, \tag{1}$$

де C_1, C_2, ω – додатні сталі, що не залежать від k. Доповідь присвячено викладу результатів, отриманих при дослідженні розв'язності рівняння

$$L(A_1,A_2)u\equiv\sum_{j=0}^{n}a_jA_1^jA_2^{n-j}u=f+\varepsilon\Phi(u), \tag{2}$$

у якому $a_j,\varepsilon\in\mathbb{C}$, $j=0,1,\dots,n$, $f\in l'$, $\Phi: l'\to l'$ – деяке нелінійне відображення. За допомогою принципу стискуючих відображень [1] встановлено існування розв'язку рівняння (2), якщо нелінійний оператор Φ є обмеженим і має обмежену похідну, $|\varepsilon|$ досить мале число, виконуються оцінки (1) і

$$\exists C_3>0 \quad \exists\gamma\in\mathbb{R} \quad \forall k,m\in\mathbb{N} \quad |L(\lambda_k,\mu_m)|\ge C_3(k+m)^{\gamma}.$$

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Київ: Наук. думка, 1984. – 264 с.

OPERATOR EQUATION WITH DIAGONAL OPERATORS IN THE SPACES OF SEQUENCES OF COMPLEX NUMBERS

Sufficient conditions for the solvability of one nonlinear operator equation in the spaces of sequences of complex numbers have been established.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma13_02.pdf

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

УДК 512.548.7

МАТРИЧНІ КВАЗІГРУПИ З ВЛАСТИВІСТЮ СХРЕЩЕНОЇ ОБОРОТНОСТІ

Алла Луценко

Донецький національний університет імені Василя Стуса

lucenko.alla32@gmail.com

Нехай K – довільне комутативне кільце з одиницею і $K^n = K \times ... \times K$. Групоїд $(K^n; f)$ є визначений рівністю

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}B + \overline{a}\,, \tag{1}$$

де $A, B \in M_n(K)$ і $\overline{a} \in K^n$ називається *матричною квазігрупою* над кільцем K, якщо квадратні матриці A, B оборотні; *унітарною матричною квазігрупою*, якщо існують квадратні матриці A, $B \in M_n(K)$ такі, що для всіх $\overline{x}$, $\overline{y} \in K^n$ виконується рівність

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}B\,. \tag{2}$$

Означення 1 [2]. Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається: *середньою, лівою та правою CIP квазігрупою*, якщо відповідно існують відображення ψ, υ, γ такі, що для всіх x, y виконуються рівності

$$\psi(x)\cdot yx = y; \quad yx\cdot y = \upsilon(x); \quad y\cdot xy = \gamma(x)\,,$$

ψ, υ, γ називаються *лівою, правою* та *середньою функцією оборотності*.

Теорема [3]**.** *Нехай* $(K^n; f, \overline{0})$ *– унітарна матрична квазігрупа і (2) – її канонічний розклад, тоді:*

1) $(K^n; f, \overline{0})$ *є середньою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли* $B = A^{-1}$. *Функція оборотності* $\psi(\overline{x}) = -\overline{x}A^{-3}$;

2) $(K^n; f, \overline{0})$ *є лівою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли* $B = -A^2$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_01.pdf

Функція оборотності $\upsilon(\overline{x}) = -\overline{x}A^3$ *;*

3) $(K^n; f, \overline{0})$ *є правою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли* $A = -B^2$. *Функція оборотності* $\gamma(\overline{x}) = -\overline{x}B^3$.

Повний опис квазігруп з властивостями оборотності за рівностями множин трансляцій наведено в праці [2]. Отримано дев'ять многовидів, які розподілені на три парастрофні орбіти: ліві, праві та середні квазігрупи з властивістю оборотності (IP), властивістю схрещеної оборотності (CIP) та властивістю дзеркальності. Повну класифікацію групових ізотопів з властивостями схрещеної оборотності подано в праці [3].

Оскільки всі дзеркальні квазігрупи є IP квазігрупами, то у класі матричних квазігруп достатньо розглянути дві парастрофні орбіти.

В праці [3] знайдено умови, коли матрична квазігрупа має властивість IP та CIP та знайдено вигляд матричних IP квазігруп.

Для матричних квазігруп з властивістю схрещеної оборотності отримано таке твердження.

Твердження 1. *Кожна матрична квазігрупа з властивістю CIP над кільцем K має вигляд:*

середня CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}A^{-1} + \overline{a}$
ліва CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A - \overline{y}A^2 + \overline{a}$
права CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = -\overline{x}B^2 + \overline{y}B + \overline{a}$
тристороння CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}A^{-1} + \overline{a}$, $A^3 = -I$

де A *− оборотна матриця над кільцем K;* $\overline{a} \in K^n$.

Наслідок 1. Якщо матрична квазігрупа з канонічним розкладом (1) має дві з трьох властивостей схрещеної оборотності: LCIP, RCIP, MCIP, то вона також має і третю властивість.

1. *Lutsenko A.V.* Classification of group isotopes according to their inverse properties // Applied Problems of Mechanics and Mathematics. – 2020. – Вип. 13. – С. 48–62.
2. *Sokhatsky F., Lutsenko A.* Classification of quasigroups according to directions of translations II // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2021. – **62**, No. 3. – P. 309–323.
3. *Сохацький Ф.М., Луценко А.В., Фриз І.В.* Побудова квазігруп з властивістю оборотності // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2021. – **64**, № 4. – С. 5–17.

MATRIX QUASIGROUPS WITH CROSS INVERSE PROPERTY

The conditions when a matrix quasigroup has the cross inverse property are considered. The form of one-sided and three-sided CIP quasigroups was found. Two-sided matrix CIP quasigroups do not exist.

УДК 512.624

ПРО ЕЛЕМЕНТИ ВЕЛИКОГО ПОРЯДУ В СКІНЧЕННИХ ПОЛЯХ, ЗАДАНИХ ДВОЧЛЕНОМ

Роман Попович

Національний університет «Львівська політехніка»

rombp07@gmail.com

Загальновідомо, що мультиплікативна група скінченного поля є циклічною. Твірну цієї групи називають примітивним елементом. На даний час в обчислювальній теорії скінченних полів немає поліноміального алгоритму побудови примітивного елемента для заданого скінченного поля. Ось чому розглядають менш обмежувальне питання: знайти елемент великого мультиплікативного порядку [2]. У цьому випадку не вимагається обчислити точний порядок елемента: достатньо отримати нижню межу для порядку. Елементи великого порядку потрібні для низки застосувань, які, зокрема, охоплюють криптографію та теорію кодування.

Як F_q позначимо поле з q елементів, де q – степінь простого числа. Розширення цього поля на основі двочлена має вигляд $F_q[x]/(x^m - a)$. Для таких полів два відомі найкращі результати виглядають так: нижняя межа для порядку $2^{\sqrt[3]{2m}}$ [3] та покращення цієї межі $5^{\sqrt[3]{m/2}}$ [1].

У цій роботі підсилюємо наведені відомі результати.

Теорема. *Нехай b – будь-який ненульовий елемент з F_q. Тоді $\theta + b$ має в розширеному полі, заданому двочленом, мультиплікативний порядок принаймні $2^{\sqrt{2m}}$.*

1. *Bovdi V., Diene A., Popovych R.* Elements of high order in finite fields specified by binomials // Carpathian Math. Publ. – 2022. – **14**, No. 1. – P. 238-246.
2. *Mullen L., Panario D.* Handbook of finite fields. – Boca Raton: CRC Press, 2013. – 1068 p.
3. *Popovych R.* Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/(x^m-a)$ // Finite Fields Appl. – 2013. – **19**, No. 1. – P. 86-92.

ON ELEMENTS OF HIGH ORDER IN FINITE FIELDS, SPECIFIED BY BINOMIAL

We construct explicitly in any finite field, specified by a binomial, elements with the multiplicative order at least $2^{\sqrt{2m}}$.

УДК 512.64

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ПОЛЕМ

Володимир Прокіп, Орест Мельник, Ростислава Коляда

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»,
Українська академія друкарства

v.prokip@gmail.com, orest.m.melnyk@lpnu.ua, rostyslavakolyada@gmail.com

Нехай $F_{m,n}$ і $F_{m,n}[\lambda]$ – множини $(m\times n)$-матриць над полем F та кільцем многочленів $F[\lambda]$ відповідно, $0_{m,n}$ – нульова $(m\times n)$-матриця. Матриця $A(\lambda)\in M_{n,n}(F[\lambda])$, яку запишемо у вигляді $A(\lambda)=\sum_{i=0}^{r}A_i\lambda^{r-i}$, де $A_i\in F_{n,n}$, $i=0,1,\ldots,r$, називається регулярною многочленною матрицею степеня r, якщо $\det A_0\neq 0$ [1] і неособливою, якщо $\det A(\lambda)\neq 0$.

Очевидно, що для матриць $A(\lambda)\in F_{n,n}[\lambda]$ і $B(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$ існують матриці $P(\lambda),Q(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$ такі, що $B(\lambda)=A(\lambda)P(\lambda)+Q(\lambda)$, де $Q(\lambda)=0_{n,m}$, або $\deg Q(\lambda)<\deg A(\lambda)$. Якщо матриця $A(\lambda)$ є регулярною, то $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ визначені однозначно [1]. У загальному випадку $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ не завжди визначені однозначно. Нижче наведемо умови, за яких для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ матриці $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ визначені однозначно.

Теорема 1. *Нехай* $A(\lambda)=\begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \ldots & a_{n,n-1}(\lambda) & a_n(\lambda)\end{Vmatrix}\in F_{n,n}[\lambda]$ – *неособлива нижня трикутна матриця і* $B(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda),Q(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda)=A(\lambda)P(\lambda)+Q(\lambda)$, *де* $Q(\lambda)=0_{n,m}$ *або степені елементів* k*-го рядка матриці* $Q(\lambda)$ *є менші за степінь елемента* $a_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg\begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{k2}(\lambda) & \ldots & q_{km}(\lambda)\end{Vmatrix}<\deg a_k(\lambda),\ k=1,2,\ldots,n.$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_04.pdf

Наслідок 1. *Нехай* $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, $\det A(\lambda) \neq 0$, *і* $B(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$. *Нехай, далі,* $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ така, що $A(\lambda)W(\lambda) = H_A(\lambda)$ – *форма Ерміта матриці* $A(\lambda)$, *тобто* $H_A(\lambda) = \begin{Vmatrix} h_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}(\lambda) & h_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(\lambda) & h_{n2}(\lambda) & \dots & h_{n,n-1}(\lambda) & h_n(\lambda) \end{Vmatrix}$, *де* $h_i(\lambda) \in F[\lambda]$ – *унітальні многочлени. Крім цього, якщо* $h_i(\lambda) = \text{const}$, *то* $h_{ij}(\lambda) = 0$, *і якщо* $\deg h_i(\lambda) \geq 1$, *то* $\deg h_{ij}(\lambda) < \deg h_i(\lambda)$ *для всіх* $1 \leq j < i \leq n$.

Тоді для $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$, *де* $Q(\lambda) = 0_{n,m}$ *або степені елементів* k*-го рядка матриці* $Q(\lambda)$ *менші за степінь елемента* $h_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg \begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{k2}(\lambda) & \dots & q_{km}(\lambda) \end{Vmatrix} < \deg h_k(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Нехай $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, $B(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $C(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$. На підставі Теореми 1 та Наслідку 1 дістаємо умови, за яких для матричного рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ існує єдиний "мінімальний" розв'язок $X_0(\lambda)$, $Y_0(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$, тобто такий, що на елементи матриць $X_0(\lambda)$ та $Y_0(\lambda)$ накладено певні обмеження (див. [2] – [5]). Зауважимо, що наведені вище твердження узагальнюються для матриць над областями елементарних дільників.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2004. – 560 с.
2. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1969. – **65**. – P. 585–590.
3. *Feinstein J., Barness Y.* On the uniqueness minimal solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**. – P.131–134.
4. *Prokip V.M.* About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // Lobachevskii J. Math. – 2008. – **23**. – P. 186–191.
5. *Prokip V.M.* On the divisibility of matrices with remainder over the domain of principal ideals // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – **243**. – P. 45–55.

ON DIVISIBILITY OF POLYNOMIAL MATRICES OVER A FIELD

We give conditions under which for a nonsingular triangular polynomial $(n \times n)$*-matrix* $A(\lambda)$ *and a polynomial* $(n \times m)$*-matrix* $B(\lambda)$ *over a field* F *there exists a unique pair of polynomial* $(n \times m)$*-matrices* $P(\lambda)$ *and* $Q(\lambda)$ *over the field* F *such that* $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$. *Obtained results are applied to find special solutions of the Sylvester type matrix polynomial equation.*

УДК 512.64

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Галина Зеліско

Львівський національний університет імені Івана Франка

zelisko_halyna@yahoo.com

Розглянемо лінійне матричне рівняння типу Ляпунова

$$AX + YA^{\nabla} = C\,, \tag{1}$$

де $A \in M_n(Z[\sqrt{k}])$ [1, 2].

Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod 4$. Зобразимо

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}\,,\ C = C_1 + C_2\sqrt{k}\,,\ X = X_1 + X_2\sqrt{k}\,,\ Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}\,. \tag{2}$$

Інволюцію ∇ уведемо в кільці матриць $M_n(Z[\sqrt{k}])$ так:

$$A^{\nabla} = (A_1 + A_2\sqrt{k})^{\nabla} = A_1^{\,T} - A_2^{\,T}\sqrt{k}\,. \tag{3}$$

Теорема 1. *Матричне рівняння (1), де матриці A, C, A^{∇} визначені в (2), (3), має цілочисловий розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes E_n & E_n \otimes A_1^{\,T} & c_1 \\ A_2 \otimes E_n & E_n \otimes (-A_2^{\,T}) & c_2 \end{Vmatrix} \text{ і } \begin{Vmatrix} A_1 \otimes E_n & E_n \otimes A_1^{\,T} & 0 \\ A_2 \otimes E_n & E_n \otimes (-A_2^{\,T}) & 0 \end{Vmatrix},$$

де стовпці c_1 і c_2 мають вигляд

$$c_1 = \left\| rov_1(C_1), \ldots, rov_n(C_1) \right\|,\ c_2 = \left\| rov_1(C_2), \ldots, rov_n(C_2) \right\|$$

еквівалентні над Z.

Теорема 2. *Цілочисловий розв'язок $X_0, Y_0 \in M_n(Z)$ матричного рівняння (1), де $A, C \in M_n(Z[\sqrt{k}])$ вигляду (2) єдиний тоді і тільки тоді, коли*

$$\det(A_1 \otimes A_2 + A_2 \otimes A_1) \neq 0\,.$$

Результати теорем 1 і 2 поширені на випадок, коли $k \equiv 1 \pmod 4$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_05.pdf

Теорема 3. *Якщо в рівнянні (1) матриця* C *є* ∇ *-симетричною, тобто* $C = C^{\nabla}$*, то це рівняння не має єдиного розв’язку.*

Досліджується питання про існування та єдиність цілочислових розв’язків лінійного матричного діофантового рівняння

$$AX + A^{\nabla}Y = C$$

над квадратичним кільцем $Z[\sqrt{k}]$ з інволюцією (3).

1. *Ладзоришин Н.Б.* Цілочислові розв’язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. Поля. – 2015. – **58**, № 2. – С. 47–54.
2. *Любачевский Б.Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сиб. мат. журн. – 1973. – **14**, № 2. – С. 337-356.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF LINEAR MATRIX EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS WITH INVOLUTION

Necessary and sufficient conditions for the existence and unity of integer solutions of linear matrix equations over quadratic rings with involution have been found. The unity of the solutions of such equations in the case of symmetry of their coefficients is studied.

УДК 539.3

ПОРІВНЯННЯ ПЛОСКИХ БАЛКОВОГО КОРОТАЦІЙНОГО СПЛАЙНУ І ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ БАЛКИ

Ігор Ориняк, Дмитро Кольцов, Роман Мазурик

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com, koltsovdd@gmail.com, r.mazuryk.ua@gmail.com

Сплайни широко застосовуються в розпізнаванні образів, геометричному моделюванні, оберненому інжинірінгу, тощо. Історично балки використовувались спочатку як лекала, а потім і як математичний апарат для отримання гладких геометричних ліній. З часом зясувалися певні недоліки балкових сплайнів, зокрема коли шукана форма об'єкту є такою, що не може бути представленою як однозначна функція $y = y(x)$, наприклад замкнуті контури. На сьогоднішній день в моделюванні застосовуються специфічні геометричні методи, основані на кривих Без'є (Бернштейна) та B-сплайнах.

Наша мета полягає в розширенні можливостей балок шляхом введення техніки балкових коротаційних сплайнів, БКС, що [1]: а) основані на коротаційних елементах, що межують під кутом один до одного; б) містять, як реальні точки спостереження, які мають визначені координати і положення, так і фіктивні точки, мета яких полягає в наближенні довжини контуру прямолінійними ділянками; в) враховують зміну нормалі (напрям розрахункового переміщення) в кожній точці елемента на величину розрахункового кута повороту. Реальні точки є точками, де розміщуються опори, жорсткість яких (додаткова сила) залежить від умов необхідного згладжування (похибок вимірювання). В фіктивних точках всі чотири похідних до контуру є неперервними. Приклади розрахунків [1] показали високу ефективність техніки коротаційних балкових сплайнів.

В цій роботі ми демонструємо переваги БКС на прикладі доволі простої задачі. Задані закріплені положення двох крайніх точок і задані напрямки кривих в точках закріплення. Вони такі: ліва точка A розміщена в початку координат (0,0) і крива відходить під кутом кут 60° за годинниковою стрілкою відносно осі x; права точка є такою B(150, 150) і крива в ній підходить під кутом 60°. Відстань між A до B дорівнює 212. По цим даним ми будуємо декілька сплайнів. Перший – це запропонований метод БКС [1]. Другий – це відома крива Без'є (БЗ). А третій – це використання потужного методу геометрично нелінійної (ГН) балки [3].

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_06.pdf

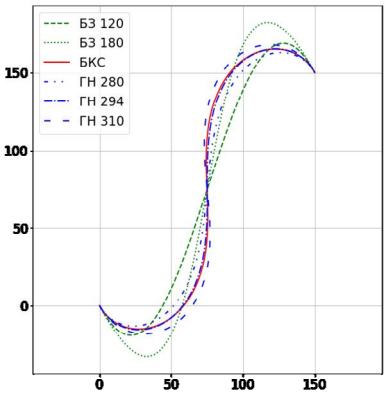


Рис. 1 Варіанти реалізації сплайнів

Відмітимо особливості трьох методів. Застосування БКС приводить до однозначних результатів (рис. 1), де, зокрема, отримано, що довжина сплайну дорівнює 294,3. Щодо введення фіктивних точок, то їх кількість, положення, порядок введення не впливають на кінцеві результати. Щодо методу БЗ, то для забезпечення заданого за умовою кута, відрізок, що з’єднує цю точку з сусідньою, має бути відповідно направленим. Але відстань між цими точками не визначена, що дає різні криві. На рис. 1 показано криві, де відстань по осі x береться рівною 120, чи 180. І накінець, ГН модель є точним рішенням для деформування балки, що звичайно має задану довжину. На рис. 1 зображені криві, що мають такі довжини: 294, як і для БКС; 280 – трохи менша довжина; 310 – трохи більша.

Проаналізуємо якість отриманих кривих. Вона характеризується зазвичай енергією деформації E, що, як слідує з теорії балок, пропорційна інтегралу від квадрату кривизни κ і має бути мінімальною: $E = \int_0^L k^2(l)dl$, де l – елемент довжини. Результати обчислень наведено в таблиці:

БЗ 80	*БЗ 120*	*БЗ 150*	*БЗ 180*	*БКС*	*ГН 280*	*ГН 294*	*ГН 310*
0.2340	*0.2080*	*0.2092*	*0.2173*	*0.1293*	*0.1373*	*0.1284*	*0.1225*

Очевидно, що БКС дає величини близькі до оптимальних, тоді як складна ГН балка вимагає підбору оптимальної довжини, що не є практичним.

1. *Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R.* Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points // System Research and Information Technologies. – 2022. – No. 4. – P. 119–140.
2. *Orynyak I., Mazuryk R., Orynyak A.* Basic (discontinuous) and smoothing up (conjugated) solutions in transfer matrix method for static geometrically nonlinear beam and cable in plane// Journal of Engineering Mechanics. – 2020. – **46**, No. 5. – 04020031.

COMPARISON OF 2D COROTATION BEAM SPLINE WITH GEOMETRICALLY NONLINEAR BEAM

The beam spline based on corotational straight beam sections separated by elastic supports (real points of measurements) or fictitious point is a powerful technique for the restoration of the real geometry, minimizing the curvatures and optimizing the distances from the measured points. Its further advantages are demonstrated for drawing the spline between two give points with given tangents by comparing with Brazier curve as well as with geometrical nonlinear beam.

УДК 539.3

УНІВЕРСАЛЬНО M-ЕКВІВАЛЕНТНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Назар Пирч

Українська академія друкарства

pnazar@ukr.net

Для топологічного простору X позначимо через $F(X)$ вільну топологічну групу над X. Відображення $f: X_1 \to Y_1$ і $g: X_2 \to Y_2$ назвемо *M-еквівалентними*, якщо існують такі топологічні ізоморфізми $i: F(X_1) \to F(X_2)$ і $j: F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$, де $f^*: F(X_1) \to F(Y_1)$ і $g^*: F(X_2) \to F(Y_2)$ – гомоморфізми, які продовжують відображення f і g відповідно (позначимо $f \overset{M}{\sim} g$). Уведемо декілька модифікацій цього поняття, а власне, скажемо, що M-еквівалентні відображення називаються

- *універсально M-еквівалентними зліва* (позн. $f \overset{lM}{\approx} g$)**,** якщо для довільного топологічного ізоморфізму $i: F(X_1) \to F(X_2)$ існує топологічний ізоморфізм $j: F(Y_1) \to F(Y_2)$ такий, що $j \circ f^* = g^* \circ i$;
- *універсально M-еквівалентними справа* (позн. $f \overset{rM}{\approx} g$), якщо для довільного топологічного ізоморфізму $j: F(Y_1) \to F(Y_2)$ існує такий топологічний ізоморфізм $i: F(X_1) \to F(X_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$;
- *універсально M-еквівалентними* (позн. $f \overset{uM}{\approx} g$), якщо вони є універсально M-еквівалентними зліва і універсально M-еквівалентними справа.

Скажемо, що неперервне відображення $f: X \to Y$ є

- *l-універсальним*, якщо для довільного топологічного автоморфізму $i: F(X) \to F(X)$ існує такий топологічний автоморфізм $j: F(Y) \to F(Y)$, що $j \circ f^* = f^* \circ i$;
- *r-універсальним*, якщо для довільного топологічного автоморфізму $j: F(Y) \to F(Y)$ існує такий топологічний автоморфізм $i: F(X) \to F(X)$, що $j \circ f^* = f^* \circ i$;
- *універсальним,* якщо воно є одночасно l- і r-універсальним.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_07.pdf

Теорема. *Нехай* $f: X_1 \to Y_1$, $g: X_2 \to Y_2$ – *неперервні відображення. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. $f \overset{lM}{\approx} g$ $(f \overset{rM}{\approx} g, f \overset{uM}{\approx} g)$;
2. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *та* g *є* l*-універсальними (*r*-універсальними, універсальними);*
3. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *є* l*-універсальним (*r*-універсальним, універсальним).*

Наслідок. *Відображення,* M*-еквівалентне до універсального (*r*-універсального,* l*-універсального), є універсальним (*r*-універсальним,* l*-універсальним).*

Твердження 1. *Нехай* $f_i: X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i: Y_i \to Y_{i+1}$ – *неперервні відображення, причому* $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n-1$ *та* $f_n \overset{M}{\sim} g_n$. *Тоді*

$$f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1 \overset{M}{\sim} g_n \circ g_{n-1} \circ ... \circ g_1 .$$

Твердження 2. *Нехай* $f_i: X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i: Y_i \to Y_{i+1}$ – *неперервні відображення, причому* $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n$. *Тоді*

$$f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1 \overset{rM}{\approx} g_n \circ g_{n-1} \circ ... \circ g_1 .$$

ON UNIVERSALLY M-EQUIVALENT MAPPINGS

We introduce the modifications of the notion of M-equivalence of the mappings and give their applications for investigation of M-equivalent mappings.

УДК 512.64

ПОВНА СИСТЕМА ІНВАРІАНТІВ ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ДЛЯ 3×3-МАТРИЦІ ПРОСТОЇ СТРУКТУРИ

Богдан Шаваровський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

bshavarovskii@gmail.com

Припустимо, що матриця $F(x)\in M(3,\mathbf{C}[x])$ має просту структуру, повний ранг та одиничний перший інваріантний множник. Тоді $F(x)$ напівскалярно еквівалентна (нск. е.) до матриці вигляду

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ a_3(x) & a_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix},\ \deg a_1<\deg\varphi_1,\ \deg a_2,\deg a_3<\deg\varphi_2, \qquad (1)$$

де 1, $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – інваріантні множники. Вважатимемо, що $\deg\varphi_1$, $\deg(\varphi_2/\varphi_1)>1$. Позначимо $\varphi_{12}(x):=\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$, $a_2'(x):=a_2(x)/\varphi_1(x)$; M_1 і M_2 – множини коренів поліномів $\varphi_1(x)$ і $\varphi_{12}(x)$ відповідно. Очевидно, $A(x)$ можна вибрати так, що

$$\begin{Vmatrix} a_1(\alpha_0) & a_3(\alpha_0) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ для деякого } \alpha_0\in M_1. \qquad (2)$$

Доведено, що $(a_1(x),a_3(x),\varphi_1(x))$ при фіксованому α_0 не залежить від вибору $A(x)$ з класу нск. е. [1]. За умови $(a_1(x),a_3(x),\varphi_1(x))=\varphi_1(x)$ в [1] вказана повна система інваріантів матриці (1) відносно нск.е. Тут припускається інше – $(a_1(x),a_3(x),\varphi_1(x))\neq\varphi_1(x)$. Тоді матрицю $A(x)$ можна вибрати так, що

$$\begin{Vmatrix} a_1(\alpha_1) & a_3(\alpha_1) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ для деякого } \alpha_1\in M_1. \qquad (3)$$

У [2] встановлено, що $(a_3(x),\varphi_1(x))$ за фіксованих α_0,α_1 класом нск.е. з $A(x)$ визначається однозначно. За умови $(a_3(x),\varphi_1(x))=\varphi_1(x)$ у праці [2] вказана повна система інваріантів матриці (1) відносно нск.е. Надалі припускатимемо, що $(a_3(x),\varphi_1(x))\neq\varphi_1(x)$. Тоді існує такий корінь $\alpha_2\in M_1$, що

$$a_1(\alpha_2)=a_3(\alpha_2)\neq0. \qquad (4)$$

Для $A(x)$ з умовами (2)–(4) позначимо $\delta_A(x):=a_1(x)a_2'(x)-a_3(x)$ і розглянемо розбиття множин M_1, M_2:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_08.pdf

$$M_1 = M_{11} \cup M_{12},\ M_2 = M_{21} \cup M_{22}, \qquad (5)$$

де $M_{11} = \{\alpha_i : a_3(\alpha_i) = 0\}$ $M_{21} = \{\beta_j : \delta_A(\beta_j) = 0\}$. Встановлено, що розбиття (5) множин M_1, M_2 за фіксованих $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ не залежать від вибору $A(x)$ з класу нск.е. Для $A(x)$ введемо позначення:

$$\pi_A(\gamma) := \begin{cases} (a_1(\gamma))^{-1}, \gamma \in M_{11}, a_1(\gamma) \neq 0, \\ a_2'(\gamma)(\delta_A(\gamma))^{-1}, \gamma \in M_{22} \end{cases},$$

$$\tilde{\pi}_A(\lambda) := \begin{cases} (a_2'(\lambda))^{-1}, \lambda \in M_{21}, a_2'(\lambda) \neq 0, \\ a_1(\lambda)(a_3(\lambda))^{-1}, \lambda \in M_{12}. \end{cases}.$$

Означення. Матриця $A(x)$ з умовами (2)–(4) називається *зведеною і орієнтованою за характеристичними коренями* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

Теорема. *Для зведеної та орієнтованої за характеристичними коренями* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ *матриці* $A(x)$ (1) *за фіксованих значень* $\pi_A(\gamma_0) \neq 1$ *і* $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) \neq 1$ *наступні величини утворюють повну систему інваріантів відносно нск.е.*:

$a_1(\alpha_i)$ *для кожного* $\alpha_i \in M_{11}$;

$a_1(\alpha_j)(a_3(\alpha_j))^{-1}$ *для кожного* $\alpha_j \in M_{12}$;

$a_2'(\beta_k)$ *для кожного* $\beta_k \in M_{21}$;

$a_2'(\beta_l)(\delta_A(\beta_l))^{-1}$ *для кожного* $\beta_l \in M_{22}$;

$(\delta_A(\beta_l))^{-1} + (a_1(\alpha_2))^{-1}$ *для кожного* $\beta_l \in M_{22}$;

$(a_3(\alpha_j))^{-1} - (a_1(\alpha_2))^{-1}$ *для кожного* $\alpha_j \in M_{12}$.

Встановлені повні системи інваріантів відносно нск.е. для зведеної та орієнтованої за характеристичними коренями матриці $A(x)$ у випадках, коли фіксоване значення $\pi_A(\gamma_0) \neq 1$ і $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) = 1$ або фіксоване значення $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) \neq 1$ і $\pi_A(\gamma_0) = 1$, а також для випадку $\pi_A(\gamma_0) = 1$, $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) = 1$.

1. *Shavarovskii B.Z.* Conditions of semiscalar Eeuivalence of one class 3x3 matrices of simple structure // Journal of Mathematics. – 2022. – **2022**. – Article ID 8395922, 13 p.
2. *Shavarovskii B.Z.* Oriented by Characteristic Roots Reduced Matrices in the Class of Semiscalarly Equivalent // Journal of Mathematics. – 2021. – **2021**. – Article ID 5592756, 6 p.

A COMPLETE SYSTEM OF INVARIANTS WITH RESPECT TO SEMI-SCALAR EQUIVALENCE FOR A 3X3-MATRIX OF A SIMPLE STRUCTURE

A complete system of invariants with respect to semiscalar equivalence is established for one class of matrices of simple structure.

УДК 517.5+515.12

КАНТОРВАЛИ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Дмитро Карвацький

Інститут математики НАН України

karvatsky@imath.kiev.ua

Нагадаємо, що коли $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$, то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \tag{1}$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{при} & n \in M, \\ 0, \text{при} & n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою) ряду*. Множина усіх чисел виду (1) позначається як $E(u_n)$ та називається неповною сумою відповідного ряду $\sum u_n$.

У роботах [1] та [2] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, гомеоморфною до множини Кантора або М-канторвалом (симетричним канторвалом).

На сьогоднішній день необхідні і достатні умови того, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є канторвалом або є гомеоморфною до множини Кантора (з додатною мірою Лебега або нулевої міри Лебега та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) залишаються невідомими. Тому науковці розв'язують цю задачу для певних класів рядів (бігеометричних, мультигеометричних, рядів з узагальнених чисел Фібоначчі, рядів з певною умовою однорідності).

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k_1 \sin x + \cdots + k_m \sin x + \cdots + k_1 \sin x^n + \cdots + k_m \sin x^n + \ldots, \tag{2}$$

де $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$ – фіксовані дійсні числа та $x \in (0,1)$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_09.pdf

Позначимо $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$. При $0 < x < 1$ ряд (2) є збіжним, оскільки з нерівності $\sin x < x$ ми матимемо, що

$$K \sum_{n=1}^{\infty} \sin x^n < K \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{Kx}{1-x}.$$

Ми вивчаємо топологічні властивості множини $E(a_n)$ для ряду (2) залежно від значення параметрів $k_1, \ldots, k_m, x$.

Теорема 1. *Якщо ряд* (2) *задовольняє умову*

$$x \geq \frac{d}{K+d},$$

$$d = \max_{1 \leq j \leq m} d_j, \quad d_j = \frac{\pi}{2} k_j - k_{j+1} - k_{j+2} - \cdots - k_m,$$

то $E(a_n)$ *є відрізком.*

Теорема 2. *Якщо для ряду* (2) *існують натуральні числа* n_0 *та* n^* *такі, що кожне з чисел* $n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+n^*$ *може бути представленим у вигляді суми чисел* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *та параметр* x *задовільняє нерівність*

$$\frac{\pi}{2n^* + \pi} \leq x \leq \frac{2k_m}{K\pi + 2k_m},$$

то множина $E(a_n)$ *є канторвалом.*

Теорема 3. *Якщо для ряду* (2) *виконується умова*

$$x \leq \frac{l}{K+l},$$

$$l = \min_{1 \leq j \leq m} l_j, \quad l_j = \frac{2}{\pi} k_j - k_{j+1} - k_{j+2} - \cdots - k_m,$$

то $E(a_n)$ *є множиною канторівського типу.*

1. *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.
2. *Nymann J., Saenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – Vol. 83, № 1. – P. 1-4.

CANTORVALS AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

We study properties of the set of subsums for convergent series

$$k_1 \sin x + \cdots + k_m \sin x + \cdots + k_1 \sin x^n + \cdots + k_m \sin x^n + \ldots,$$

where $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ *are fixed positive integers and* $0 < x < 1$. *Depends on parameter* x *this set can be a finite union of closed intervals or Cantor-type set or even Cantorval.*

УДК 517.518

ПРО МНОЖИНУ НЕРУХОМИХ ТОЧОК ФУНКЦІЇ ЧАСТОТИ НУЛЯ ЧИСЕЛ, ЩО МАЮТЬ Q_S-ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Ростислав Кривошия, Дмитро Скакун

Кропивницький будівельний фаховий коледж, м.Кропивницький; Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м.Київ.

mostik19@gmail.com, skakund2020@gmail.com

Нехай $(q_0; q_1; ...; q_{s-1})$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [3], що для довільного дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність чисел (в подальшому цифр) $\alpha_n \in \{0; 1; ...; s-1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ така, що

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{\alpha_n} \cdot q_{\alpha_{n-1}} \cdot q_{\alpha_{n-2}} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_1}, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \ldots, \beta_{s-1} = q_0 + q_1 + ... + q_{s-2}$.

Рівність (1) називається Q_s-представленням дійсного числа x. Відповідне Q_s-зображення числа x має вигляд :

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Існує зчисленна множина чисел виду $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(0)}$, які мають два представлення і відповідно зображення. Нехай $N_k(x; j)$ — кількість цифр j серед цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Якщо існує границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_k(x; j)}{k}$$

то вона називається частотою цифри j Q_s-зображення числа x та позначається $\nu_j(x)$.

Теорема 1. *Існує нульмірна за Лебегом, континуальна, всюду щільна на* $[0; 1]$ *множина чисел* $x \in [0; 1]$ *таких, що*

$$\nu_0(x) = x,$$

при чому існують частоти цифр $1, 2, \ldots, s-1$ *числа* x.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_10.pdf

Теорема 2. *Нехай A — множина стохастичних векторів*

$$(p_{0\alpha}; p_{1\alpha}; \ldots; p_{(s-1)\alpha})$$

таких, що для кожного з них існує число $x(\alpha)$:

$$\nu_0(x(\alpha)) = x(\alpha),$$

$$\nu_j(x(\alpha)) = p_{j\alpha} \ \ \forall j \in \{1; 2; \ldots; s-1\}.$$

Множина точок з координатами $(p_{0\alpha}; p_{1\alpha}; \ldots; p_{(s-2)\alpha})$ є всюду щільною в одиничному $(s-1)$-вимірному кубі.

1. *Працьовитий М. В., Макарчук О. П., Карпенко О. В.* Про множину інваріантних точок функції частоти у двійковій системі зображення дійсних чисел // Науковий часопис НПУ. імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2010. – № 11. – С.182–199.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.
3. *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України — НПУ ім. Драгоманова. — 1998, № 1. — С.53–55.

ON A SET OF FIXED POINS OF ZERO-FREQUENCY FUNCTION FOR NUMBERS HAVING Q_S-REPRESENTATION

The talk examines the set of fixed points of the zero frequency function for the Q_s-representation of real numbers. It is shown that the corresponding set of points is continuous, dense everywhere and has Lebesgue measure zero.

УДК 512.64

МАТРИЦІ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ГРУПИ ЗЕЛІСКА

Володимир Щедрик

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я.С. Підстригача, Львів

shchedrykv@ukr.net

Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників, $R^{n\times n}$ – кільце $n\times n$ матриць над R. Для матриці $A \in R^{n\times n}$ існують такі оборотні матриці P, Q, що

$$PAQ = \Phi := \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, 0, \ldots, 0),$$

де $\varphi_k \neq 0$, $k \leq n$, причому φ_i є дільником φ_{i+1}, $i = 1, \ldots, k-1$. Поставимо у відповідність матриці A її групу Зеліска:

$$\mathbf{G}_A := \{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists S \in \mathrm{GL}_n(R) \quad \text{така, що} \quad H\,A = A\,S\,\} \leq \mathrm{GL}_n(R).$$

Дослідження цієї групи розпочалося в [1] у кільцях многочленних матриць за умови $A = \Phi$. Її структура та властивості у матричних кільцях над областями елементарних дільників вивчалася в [3]. Пропонована робота присвячена дослідженню матриць, групи Зеліска яких збігаються.

Теорема 1. *Виконується рівність* $\mathbf{G}_A = P^{-1}\mathbf{G}_\Phi P$.

Теорема 2. *Нехай матриці A та B асоційовані справа: $A = BU$, де $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тоді* $\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_B$.

Теорема 3. *Нехай c є елементом комутативного кільця R і $A \in R^{n\times n}$. Якщо*

1) c не є дільником нуля, то $\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_{Ac}$;

2) c є дільником нуля, то $\mathbf{G}_A \subseteq \mathbf{G}_{Ac}$.

Кільце R має стабільний ранг 1,5, якщо для кожної трійки $a,\ b,\ c \in R$, де $c \neq 0$, таких що $aR + bR + cR = R$ існує таке $r \in R$, що $(a + br)R + cR = R$.

Теорема 4. *Нехай*

$A = P\Phi Q_A^{-1}, \Phi := \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2),\ \varphi_1|\varphi_2, B = P\Psi Q_B^{-1}, \Psi := \operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2),\ \psi_1|\psi_2$ *– матриці над комутативною областю Безу стабільного рангу* $1,5$. *Тоді*

$$\mathbf{G}_\Phi \cdot \mathbf{G}_\Psi = P^{-1}\mathbf{G}_\Delta P, \quad \textit{де}\ \ \Delta := \operatorname{diag}\left(1,\ \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\psi_2}{\psi_1}\right)\right).$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_12.pdf

Нехай $U(R)$ – група одиниць кільця R. Для кожного $m \in R\backslash\{U(R), 0\}$ позначимо через R_m фактор-кільце R/mR. Для кожного розв'язного у R_m рівняння $ax = b$, де $a, b \in R_m$ позначимо через $\widetilde{\frac{b}{a}}$ його твірний розв'язок (див. [2]). Нехай

$$\Phi := \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, 0, \ldots, 0) \in R_m^{n\times n}, \tag{1}$$

де $\varphi_1|\varphi_2|\cdots|\varphi_k \neq 0$, $k \leq n$. Оскільки $\varphi_1|\varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то на підставі Наслідку 1 [2] $\varphi_i = \widetilde{\frac{\varphi_i}{\varphi_1}} \cdot \varphi_1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тоді

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \widetilde{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}\varphi_1, \ldots, \widetilde{\frac{\varphi_k}{\varphi_1}}\varphi_1, 0, \ldots, 0) =$$

$$= I\varphi_1 \cdot \operatorname{diag}(1, \widetilde{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}, \ldots, \widetilde{\frac{\varphi_k}{\varphi_1}}, \alpha_1, \ldots, \alpha_1) = I\varphi_1\Psi,$$

де

$$\Psi = \operatorname{diag}(1, \widetilde{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}, \ldots, \widetilde{\frac{\varphi_k}{\varphi_1}}, \alpha_1, \ldots, \alpha_1), \tag{2}$$

і $\alpha_1 = \frac{m}{(m,\ f_1)} \in Ann(\varphi_1)$, де f_1 – прообраз елемента φ_1 в R.

Наступний результат показує, що за певних умов і у випадку коли елемент c є дільником нуля групи $\mathbf{G}_A$ і $\mathbf{G}_{Ac}$ збігаються.

Теорема 5. *Нехай Φ і Ψ – матриці вигляду* (1) *і* (2)*, відповідно. Виконується рівність*

$$\mathbf{G}_\Phi = \mathbf{G}_\Psi.$$

1. *Зелиско В.Р* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – № 12. – С. 14– 21.
2. *Bovdi V., Shchedryk V.* Generating solutions of a linear equation and structure of elements of the Zelisko group // Linear Algebra and its Applications. - 2021. - **625**. - P. 55-67. https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.04.019.
3. *Shchedryk V.* Arithmetic of matrices over rings. - Kyiv: Akademperiodyka, 2021, 278 p. ISBN 978-966-360-430-5, https://doi.org/10.15407/akademperiodika.430.278

MATRICES AND RELATED ZELISKO GROUPS

The properties of the Zelisko group, that is, the matrices group that quasi-commute with a fixed matrix, are investigated.

УДК 512.64+512.55

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ $AX = YB$ У КІЛЬЦІ БЛОЧНО-ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Наталія Джалюк, Василь Петричкович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Нехай $R-$ комутативна область головних ідеалів. Надалі використовуватимемо позначення із праці [2], у якій було встановлено взаємозв'язки між еквівалентністю матриць у кільці $M(n,R)$ та в його підкільцях $M_{BT}(n_1,\dots,n_k,R)$ блочно-трикутних та $M_{BD}(n_1,\dots,n_k,R)$ блочно-діагональних матриць.

Еквівалентність блочних матриць використовується при дослідженні матричних рівнянь типу Сильвестра у добре відомому критерії Рота [4] розв'язності цих рівнянь. Критерій Рота було узагальнено багатьма авторами для матричних рівнянь Сильвестра та їх систем над різними кільцями. У праці [3] критерій Рота доведено для матричних рівнянь Сильвестра над комутативними кільцями головних ідеалів, а також встановлено зв'язок між еквівалентністю блочно-трикутної матриці з кількістю блоків більше двох і блочно- діагональної матриці з однаковими головними блочними діагоналями та існуванням розв'язку системи матричних рівнянь типу Сильвестра.

Нехай

$$A=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{Vmatrix} \in M_{BT}(n_1,\dots,n_k,R),$$

тобто A є верхньою блочно-трикутною матрицею та її діагональні блоки $A_{ii}\in M(n_i,R), i=1,\dots,k$, блоки над діагоналлю $A_{ij}\in M(n_i,n_j,R), i,j=1,\dots,k, i<j,$ а під діагоналлю – нульові блоки відповідних розмірів. $D(A)=\operatorname{diag}\{A_{11},\dots,A_{kk}\}-$ головна блочна діагональ матриці A. Аналогічну структуру мають матриці B та $D(B)$.

Нагадаємо, що матриці A і B називають еквівалентними у кільці $M(n,R)$, якщо існують оборотні матриці $P,\ Q\in GL(n,R)$ такі,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_13.pdf

що $PAQ = B$. Якщо матриці $P,\ Q \in GL_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, тобто є оборотними блочно-трикутними, або $P,\ Q \in GL_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$, тобто є оборотними блочно-діагональними, то матриці A і B називають еквівалентними у кільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних або у кільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць, відповідно. У статті [1] еквівалентність блочно-трикутної матриці A та її головної блочної діагоналі $D(A)$ автори називають блочною діагоналізовністю матриці A.

У цій праці встановлено умови існування розв'язку матричного рівняння $AX = YB$, де $A,\ B-$ відомі, $X,\ Y-$ невідомі матриці відповідних розмірів у кільці блочно-трикутних матриць $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Теорема 1. *Нехай блочно-трикутні матриці A і B є блочно діагоналізовні. Тоді матричне рівняння $AX = YB$, де $X,\ Y-$ невідомі матриці відповідних розмірів, має розв'язок у кільці $GL_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ тоді і тільки тоді, коли їхні головні блочні діагоналі $D(A)$ і $D(B)$ еквівалентні у кільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$.*

Вкажемо також умови існування розв'язку подібного типу системи матричних рівнянь.

Теорема 2. *Нехай головні блочні діагоналі $D(A)$ і $D(B)$ блочно-трикутних матриць A і B еквівалентні у кільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$. Тоді якщо $(\det A_{ii}, \det B_{i+j,i+j}) = 1,\ i = 1, \ldots, k-1,\ j = 1, \ldots, k-i$, то система матричних рівнянь $\sum_{t=i}^{j} A_{it}X_{tj} = \sum_{s=i}^{j} Y_{is}B_{sj},\ i \le j, i, j = 1, \ldots, k$, має розв'язок.*

1. *Dmytryshyn A., Kågström B.* Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2015. – **36**, No. 2. – P. 580–593.
2. *Dzhaliuk N.S., Petrychkovych V.M.* Equivalence of matrices in the ring $M(n, R)$ and its subrings // Ukrainian Mathematical Journal. – 2022. – **73**, No.12. – P. 1865–1872.
3. *Feinberg R. B.* Equivalence of partioned matrices // J. Res. bur. Stand. Sect. – 1976. – **80**, No. 1. – P. 89–97.
4. *Roth W.E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – No. 3. – P. 392–396.

SOLVABILITY OF MATRIX EQUATION $AX = YB$ IN THE RING OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

Necessary and sufficient conditions of solvability of matrix equation $AX = YB$ in the ring of block triangular matrices over principal ideals rings are established under the condition of block diagonalization of its coefficients. Conditions of solvability of system of matrix equations of a similar type are indicated also.

УДК 510.22 + 51-71 + 517.98

ТЕОРЕМА ПРО НЕПОВЕРНЕННЯ ДЛЯ УНІВЕРСАЛЬНИХ КІНЕМАТИК ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Ярослав Грушка

Інститут математики НАН України, Київ

grushka@imath.kiev.ua

Теорія мінливих множин була побудована, зокрема, в роботах [1, 2] з метою напрацювання нового математичного апарату для розв'язання шостої проблеми Гільберта. В [3] на основі апарату теорії мінливих множин було введено поняття універсальної кінематики. Універсальні кінематики призначені для моделювання еволюції фізичних систем в рамках певного просторового оточення. З формальної точки зору універсальна кінематика являє собою мінливу множину "вкладену" в певне геометричне оточення, представлене сукупністю різних метричних, топологічних, лінійних, банахових, гільбертових та інших просторів разом з універсальними перетвореннями координат між інерційними системами відліку. Надалі будемо використовувати систему позначень і понять, введену в [2, 3].

Означення 1. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика.

1. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часододатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність, $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

2. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **слабко часопозитивною**, якщо існує хоч одна система відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ така, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ має місце співвідношення, $\mathfrak{l}_0 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

Можна довести, що бінарне відношення $\Uparrow^{+}_{\mathcal{F}}$ завжди є рефлексивним, проте, взагалі кажучи, не є ні симетричним ні транзитивним на множині $\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ систем відліку довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

Будемо уявляти, що в довільній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$ можуть існувати міжсистемні мандрівники. Такі мандрівники можуть скінченну кількість разів перескакувати з однієї системи відліку в іншу, що проходить повз них. Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **безумовно часонезворотною**, якщо жоден потенційний міжсистемний мандрівник, що почав свій шлях в довільній точці x довільної системи

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_14.pdf

відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ не може закінчити свій шлях в тій же самій точці x тієї ж самої системи відліку $\mathfrak{l}$ у минулому часі. Математично строге означення безумовної часонезворотності тут не наводиться з огляду на його громіздкість (див. [4]).

Теорема 1 (див. [4]). *Будь-яка слабко часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є безумовно часонезворотною.*

В доповіді також планується розглянути деякі застосування теореми 1 до універсальних тахіонових кінематик, побудованих на основі узагальнених перетворень Лоренца в сенсі Е. Рекамі – В. Ольховського – Р. Голдоні, а також узагальнених перетворень М. Хассані.

1. *Grushka Ya.I.* Changeable sets and their applications to construction the tachyon kinematics // Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. – 2014. – **11**, No. 1. – P. 192–227.
2. *Grushka Ya.I.* Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: ResearchGate. – 2017. – 208 p., https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521.
3. *Grushka Ya.I.* Kinematic changeable sets with given universal coordinate transforms // Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. – 2015. – **12**, No. 1. – P. 74–118.
4. *Грушка Я.І.* Про часонезворотність універсальних кінематик // Доповіді НАН України. – 2016. – № 7. – С. 14–21.

THEOREM OF NON RETURNING FOR UNIVERSAL KINEMATICS AND SOME ITS APPLICATIONS

In this talk we present Theorem of non returning for universal kinematics and its application for tachyon kinematics in the sense of E. Recami – V. Olkhovsky – R. Goldoni as well as M. Hassani.

УДК 512.55+512.64

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМ КІЛЬЦЕМ $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

Наталія Ладзоришин, Василь Петричкович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

natalja.ladzoryshyn@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Нехай $A_i, B_i \quad i = 1, 2$ — $n \times n$ матриці з елементами з квадратичного кільця $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$, $\mathcal{E}(a)$ — евклідова норма $a \in \mathbb{K}$. Пари матриць (A_1, A_2) і (B_1, B_2) називаємо (z,k)-еквівалентними, якщо існують така оборотня матриця S над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і оборотні матриці Q_1, Q_2 над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, що $A_1 = SB_1Q_1$, $A_2 = SB_2Q_2$. У [1, 2] відносно цієї еквівалентності для певних класів пар матриць (A, B) над квадратичним евклідовим кільцем з канонічними діагональними формами $D^A = diag(\mu_1^A, ..., \mu_n^A)$, $D^B = diag(\mu_1^B, ..., \mu_n^B)$, встановлено їх звідність до пари трикутних форм (T^A, T^B), тобто

$$T^A = SAQ_1 = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^A & \mu_2^A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}^A & t_{n2}^A & \cdots & \mu_n^A \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

де

$$t_{ij}^A = 0, \quad \text{якщо} \quad \mu_i^A = 1, \quad i, j = 1, ..., n, \quad j < i, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^A) < \mathcal{E}(\mu_i^A), \quad \text{якщо} \quad t_{ij}^A \neq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad j < i, \tag{3}$$

і

$$T^B = SBQ_2 = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^B & \mu_2^B & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}^B & t_{n2}^B & \cdots & \mu_n^B \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

де

$$t_{ij}^B = 0, \quad \text{якщо} \quad \mu_i^B = 1, \quad i, j = 1, ..., n, \quad j < i, \tag{5}$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^B) < \mathcal{E}(\mu_i^B), \quad \text{якщо} \quad t_{ij}^B \neq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad j < i. \tag{6}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_15.pdf

Пару матриць (T^A, T^B), де T^A і T^B матриці вигляду (1) і (4) з умовами (2), (3) і (5), (6), відповідно, називаємо стандартною парою пари матриць (A, B). Стандартні пари пар матриць визначаються неоднозначно.

Серед квадратичних кілець є евклідові квадратичні кільця, кільця головних ідеалів, які не є евклідовими, а також є квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів. Структура матриць над кожним із цих кілець суттєво відрізняється. Тому дослідження матриць, зокрема їх еквівалентностей, потребує окремого вивчення над кожним із них.

Розглянемо (z,k)-еквівалентність пар матриць (A, B) над квадратичним евклідовим уявним кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Число стандартних пар матриць над цим кільцем є скінченним. Ми встановлюємо оцінку числа стандартних пар для деякого класу пар матриць над цим квадратичним кільцем.

Нехай A і B — $n \times n$ матриці з елементами з квадратичного кільця $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Позначимо через $\mathbf{M}_{T^A}$ множину всіх матриць T^A вигляду (1) для яких виконуються умови (2), (3). Аналогічно, $\mathbf{M}_{T^B}$ — множина всіх трикутних матриць T^B вигляду (4) для яких виконуються умови (5), (6). Через $\mathbf{M}_{(T^A,T^B)}$ позначимо множину всіх пар матриць (T^A, T^B), де $T^A \in \mathbf{M}_{T^A}$, $T^B \in \mathbf{M}_{T^B}$.

Теорема 1. *Нехай* $\mathcal{E}(detA) < 4$, $\mathcal{E}(detB) < 4$ *і* $(\mathcal{E}(detA), \mathcal{E}(detB)) = 1$. *Тоді стандартною парою пари матриць* (A, B) *є кожна пара* (T^A, T^B) *із множини* $\boldsymbol{M}_{(T^A,T^B)}$ *і їх число є максимальним.*

1. *Ладзоришин Н. Б.* Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями // Карпатські матем. публ. – 2013. – **5**, № 1. – С.63—69.
2. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2014. – **76**, No 3. – P. 38—48.

EQUIVALENCE OF PAIRS OF MATRICES OVER THE QUADRATIC RING $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

The (z,k)-equivalence of pairs of matrices over the quadratic ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ *is investigated. It is established that the number of standard forms of pairs of matrices over this ring is finite and given bounds for this number.*

УДК 512.553.2

ВТОРИННО-МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ МОДУЛІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Марта Малоїд-Глєбова

Львівський національний університет ім. Івана Франка

marta.maloid-glebova@lnu.edu.ua

Нехай R – асоціативне кільце з $1 \neq 0$, M – лівий R-модуль. Той факт, що N є підмодулем M позначимо як $N \leq M$.

Означення 1. R-модуль M називається **вторинним модулем**, якщо $M \neq 0$ і ${}_RAnn(M) =_R Ann(M/N)$ для кожного власного підмодуля $N \leq M$.

Означення 2. Підмодуль N лівого R-модуля M називається **вторинним підмодулем**, якщо він сам по собі є вторинним модулем.

Множину усіх вторинних підмодулів модуля M позначаємо через $Spec^s(M)$ і називаємо **вторинним спектром** модуля M.

Означення 3. Модуль M називається **мультиплікаційним модулем**, якщо для кожного $N \leq M$ існує такий двосторонній ідеал I кільця R, що $N = MI$.

Означення 4. Модуль M називається **вторинно-мультиплікаційним модулем**, якщо або M не має жодних вторинних підмодулів, або для кожного вторинного підмодуля $S \leq M$ існує такий двосторонній ідеал I кільця R, що $S = MI$.

Теорема 1. *Нехай M – R-модуль. Такі властивості еквівалентні.*

1. *M є вторинно-мультиплікаційним модулем.*
2. *Для кожного підмодуля N модуля M і для кожного двостороннього ідеалу C кільця R, такого, що $N \subset (0 :_M C)$, існує двосторонній ідеал B кільця R, такий, що $C \subset B$ і $N = (0 :_M B)$.*
3. *Для кожного підмодуля N модуля M і для кожного двостороннього ідеалу C кільця R, такого, що $N \subset (0 :_M C)$, існує двосторонній ідеал B кільця R, такий, що $C \subset B$ і $N \subseteq (0 :_M B)$.*

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_16.pdf

Теорема 2. *Нехай R комутативне кільце і нехай M вторинно-мультиплікаційний R-модуль. Тоді якщо N є таким підмодулем модул M, що $Ann_R(N)$ є первинним ідеалом кільця R, то N є вторинним підмодулем модуля M.*

Теорема 3. *Нехай M вторинно-мультиплікаційний R-модуль. Тоді виконуються такі властивості:*

1. *Кожен підмодуль модуля M є цілком-інваріантним.*
2. *Якщо R комутативне кільце, то $End_R(M)$ є комутативним кільцем.*
3. *Кожен підмодуль модуля of M є вторинно-мультиплікаційним модулем.*

SECONDARY-MULTIPLICATION MODULES AND THEIR PROPERTIES

In this abstract we introduce the concept of a secondary-multiplication R-module and we obtain some related results.

УДК 512.64

РОЗКЛАД ОБОРОТНОЇ МАТРИЦІ У ДОБУТОК ДВОХ МАТРИЦЬ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 [3]. Позначимо: $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R, $GL_n(R)$ – повна лінійна група. Згідно з теоремою 1 із [2] R є областю елементарних дільників [5]. Відомо, що кожна матриця D над R еквівалентна діагональній матриці:

$$D \sim \Psi = diag(d_1, \ldots, d_n),$$

де $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Зауважимо, що символ " $\sim$ " позначає еквівалентність матриць, а позначення $a|b$ означає, що елемент a ділить елемент b. Матрицю $\Psi = diag(d_1, \ldots, d_n)$ називають канонічною діагональною формою, а елементи $d_1, \ldots, d_n$ – інваріантними множниками матриці D.

Нехай матриця $T \in M_n(R)$ зображена у вигляді добутку $T = DC$, де

$$T \sim \Gamma = diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \;\; \gamma_i | \gamma_{i+1}, \;\; i = 1, \ldots, n-1.$$

Розглянемо множину оборотних матриць

$$\mathbf{L}(\Gamma, \Psi) = \{L \in GL_n(R) \;\; | \;\; \exists L_1 \in M_n(R) : L\Gamma = \Psi L_1\}.$$

Ця множина називається породжуючою та була введена в роботі [7].

Одним з ефективних методів розв'язання матричних задач є зображення матриці у вигляді добутку кількох співмножників із заданими властивостями. У роботі [6] показано, що довільна оборотна матриця розкладається у добуток трьох трикутних матриць над комутативним кільцем Ерміта стабільного рангу 1. Пізніше, Х. Чен [4] узагальнив цей результат на некомутативний випадок. Розклад оборотної матриці другого порядку у добуток двох матриць з певних груп було отримано в [1]. В роботі [2] встановлено, що повна лінійна група розкладається у добуток трьох її підгруп, дві з яких є групи верхніх та нижніх унітрикутних матриць над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_17.pdf

Нехай $A, B \in M_n(R)$ – неособливі матриці з канонічними діагональними формами

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon),$$

$$B \sim \Delta = diag(1, \ldots, 1, \delta),$$

відповідно. Надалі символ (a, b) позначатиме найбільший спільний дільник елементів a та b.

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, $S = \|s_{ij}\|_1^n \in GL_n(R)$. І нехай*

$$\Omega = diag(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

де $\omega_i \mid \omega_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, та $\mathrm{E} \mid \Omega$, $\Delta \mid \Omega$. Для того, щоб $SL_A = L_B$, де $L_A \in \mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $L_B \in \mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ необхідно та достатньо, щоб $(a, b) \mid s_{n1}$, де $a = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)}$, $b = \frac{\delta}{(\delta, \omega_1)}$.

1. *Романів А., Щедрик В.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – 9. – С. 269–284.
2. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 та розкладність повної лінійної групи у добуток її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – 69, № 1. – С. 113–120.
3. *Щедрик В. П.* Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 6. – С. 849–860.
4. *Chen H.* Rings related to stable range conditions. – World scientific, 2011. – Vol 11 – 680 p.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
6. *Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T.* Products of three triangular matrices over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 2002. – 348. – P. 1–6.
7. *Shchedryk V. P.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – 2. – P. 79–98.

DECOMPOSITION OF AN INVERTIBLE MATRIX IN THE PRODUCT OF TWO MATRICES WITH GIVEN PROPERTIES

The necessary and sufficient conditions to decomposition of an invertible matrix in the product of two matrices with given properties over Bezout domains of stable range 1,5 are established.

УДК 517.5+511.72

G–ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Микола Працьовитий, Ірина Лисенко, Юлія Маслова

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Інститут математики НАН України

prats4444@gmail.com, iryna.pratsiovyta@gmail.com, julia0609mas@gmail.com

Нехай g_0–фіксоване число з проміжку $(0;\frac{1}{2}]$, $g_1 \equiv g_0 - 1$; $A \equiv \{0;1\}$ – алфавіт; $L \equiv A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту.

Теорема 1. *Для будь–якого числа $x \in [0;g_0]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що*

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i}\right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (1)$$

Подання числа x рядом (1) називається його G–представленням, а символічний запис $\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – G–зображенням.

Майже всі числа відрізка $[0;g_0]$ (за винятком зліченної множини) мають єдине G–зображення і називаються G–унарними, а числа зліченної всюди щільної множини мають два зображення (вони називаються G–бінарними). Має місце рівність: $\Delta^G_{c_1\ldots c_m01(0)} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m11(0)}$.

Специфічною особливістю G–зображення чисел є те, що оператор лівостороннього зсуву цифр зображення, означений рівністю

$$\omega(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$$

є неперервною функцією, а інверсор цифр

$$I(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$$

є ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.

Теорема 2. *Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то має місце формула взаємозв'язку G–зображення і класичного двійкового зображення*

$$\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^2_{0a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \qquad (2)$$

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{коли } \alpha_1 = 0; \\ 1, & \text{коли } \alpha_1 = 1; \end{cases} \quad a_{n+1} = \begin{cases} \alpha_{n+1}, & \text{коли } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - \text{парне}, \\ 1-\alpha_{n+1}, & \text{коли } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - \text{непарне}. \end{cases}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_18.pdf

Теорема 3. *Якщо* $g_0 = \frac{1}{2}$, *то для будь–якого натурального числа* a *існує набір нулів та одиниць* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *такий, що*

$$a = 2^n + \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{1+\sigma_k} a_k 2^{n-k}] \equiv (1a_1 \dots a_n)_G, \tag{3}$$

де $\sigma_1 = 0$, $\sigma_k = a_1 + ... + a_{k-1}$, *причому таких наборів існує рівно два.*

Теорема 4. *а) Якщо у* G*–зображенні натурального числа* a *більше цифр, ніж у* G*–зображенні натурального числа* b, *то* $a \geq b$.
б) Числа $a = (1a_1...a_{k-1}1a_{k+1}...a_n)_G$ *і* $b = (1a_1...a_{k-1}0b_{k+1}...b_n)_G$ *перебувають у відношенні*
1) $a \geq b$, *якщо* σ_k*–непарне,*
2) $a \leq b$, *якщо* σ_k*–парне.*

У доповіді описується геометрія зображення і розглядаються різні застосування G–зображення чисел у фрактальній геометрії, зокрема групи перетворень, що зберігають
а) хвости зображення чисел;
б) частоти цифр у зображенні числа;
в) фрактальну розмірність Гаусдорфа–Безиковича борелівських множин.

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. and Dynam. Sys. - 2004, 24. - P. 1-16.
2. *Pratsiovytyi M. V., Lysenko I. M., and Maslova Yu. P.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29(2020). Number 1. pp. 99-108.
3. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел і їх застосування. – К.: Наукова думка, 2022. — 316 с.
4. *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П., ТребенькоО.О.* G-зображення дійсних чисел і деякі його застосування // Нелінійні коливання, 2022. Том 25 № 4. – С.377-387.

G-REPRESENTATION OF REAL NUMBERS AND ITS APPLICATIONS

In the talk, we consider two-symbol encoding of real numbers from $[0; g_0]$ *with bases of different signs* $g_0 \in (0; \frac{1}{2}]$ *and* $g_1 \equiv g_0 - 1$*:*

$$[0; g_0] \ni x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$$

and its applications in fractal geometry and theory of groups of transformations of sets.

УДК 512.56

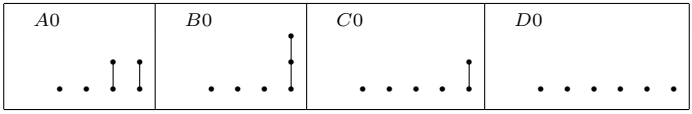
ПРО КОМБІНАТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН 6-ГО ПОРЯДКУ НАДСУПЕРКРИТИЧНОГО МІНІМАКСНОГО ТИПУ

Віталій Бондаренко, Мирослав Стойка, Марина Стьопочкіна

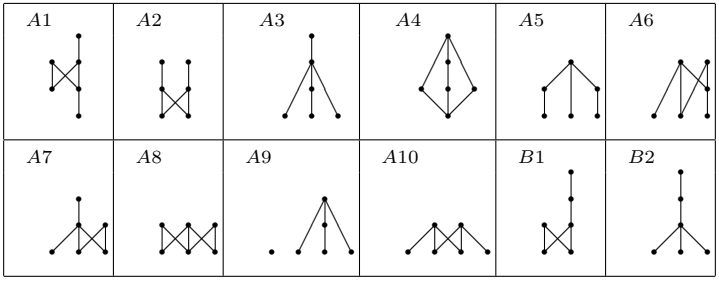
Інститут математики НАН України
Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II
Поліський національний університет

vitalij.bond@jmail.com, stoyka_m@yahoo.com, stmar@ukr.net

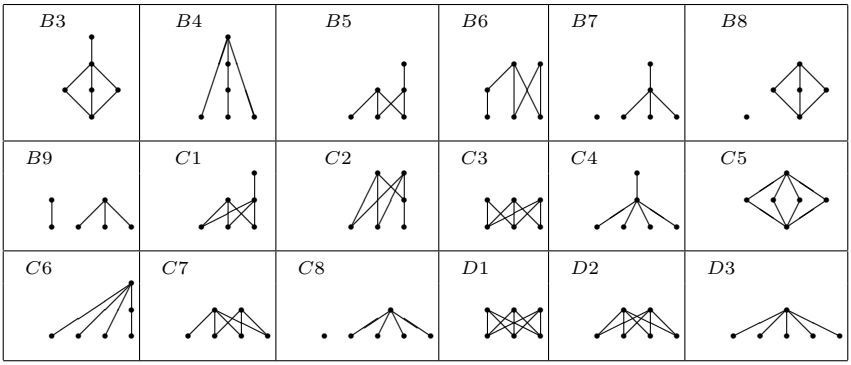
Якщо P – фіксована частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина, то кажуть, що довільна ч. в. множина має мінімаксний тип P, якщо вона мінімаксно ізоморфна [1] ч. в. множині P. Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин у спосіб, яким суперкритичні ч. в. множини відрізняються від критичних ч. в. множин, називаються надсуперкритичними [2]. Із опису таких ч. в. множин [2]) випливає, що їх найменший можливий порядок дорівнює 6 і (з точністю до ізоморфізму) задаються вони такою таблицею:



Ч, в. множини мінімаксного типів A_0–D_0 описано (з точністю до ізоморфізму) в [3]. Їх 30 (не рахуючи A_0–D_0), а саме:



http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_19.pdf



Ми вивчаємо їхні комбінаторні властивості.

Довжину шляху (знизу вгору) ч. в. множини S визначаємо по числу точок на ньому і позначаємо через $l_{min}(S)$ (відповідно, $l_{max}(S)$) довжину найкоротшого (відповідно, найдовшого) її шляху.

Позначимо через $[S]^{\sim}$ число всіх (з точністю до ізоморфізму) ч. в. множин, мінімаксно ізоморфних ч. в. множині S і покладемо $L_{min}(S) = min_{X\in[S]^{\sim}} l_{min}(X), \quad L_{max}(S) = max_{X\in[S]^{\sim}} l_{max}(X)$.

Теорема. *Нехай* $S \in \{A0, B0, C0, D0\}$. *Тоді* $L_{min}(S) = 1, L_{max}(S) = 4$ *і для довільного* $X \in [S]^{\sim}$, $1 \le l_{min}(X) \le 4$, $1 \le l_{max}(X) \le 4$.

1. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – №1. – P. 24-25.
2. *Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В.* 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, №2. – С. 17–25.
3. *Бондаренко В. М., М. Стьопочкіта М. В.* On posets of sixth order having oversupercritical MM-type // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2021. – **38**, №1. – С. 7–15.

ON COMBINATORIAL PROPERTIES OF POSETS OF 6TH ORDER OF OVERSUPERCRITICAL MINIMAX TYPE

We study combinatorial properties of the posets which are minimax isomorphic to the oversupercritical ones of order 6.

УДК 511.176, 512.643.2

ПРО КОМБІНАТОРНІ ТОТОЖНОСТІ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ЧИСЛАМИ ЛЕОНАРДО

Тарас Гой

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

taras.goy@pnu.edu.ua

Узагальнені числа Леонардо $\{\mathcal{L}_{k,n}\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$, задаються за допомогою рекурентного співвідношення [3]

$$\mathcal{L}_{k,0} = 1,\ \mathcal{L}_{k,1} = 1, \quad \mathcal{L}_{k,n} = \mathcal{L}_{k,n-1} + \mathcal{L}_{k,n-2} + k, \quad n \geq 2.$$

Розглянемо послідовність матриць Тьопліца–Гессенберга

$$A_n(a_0; a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

і відповідні визначники $D(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \det\big(A_n(1; a_1, a_2, \ldots, a_n)\big)$.

Ми досліджуємо деякі визначники Тьопліца–Гессенберга, елементами яких є числа $\mathcal{L}_{k,n}$. Наші дослідження є подальшим розвитком робіт [1,2], де отримані аналогічні комбінаторні тотожності для чисел Фібоначчі і Люка, які задовольняють рекурентне співвідношення $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$, з початковими умовами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ і $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, відповідно.

Теорема 1. *Для $n \geq 2$ справджуються тотожності:*

$$\begin{aligned} &D(-\mathcal{L}_{1,0}, -\mathcal{L}_{1,1}, \ldots, -\mathcal{L}_{1,n-1}) = 2(-1)^n F_{2n-2}, \\ &D(\mathcal{L}_{1,2}, \mathcal{L}_{1,3}, \ldots, \mathcal{L}_{1,n+1}) = 2F_{n+1}, \\ &D(\mathcal{L}_{1,3}, \mathcal{L}_{1,5}, \ldots, \mathcal{L}_{1,2n+1}) = 2F_{n+3}, \\ &D(\mathcal{L}_{2,2}, \mathcal{L}_{2,4}, \ldots, \mathcal{L}_{2,2n}) = 3(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, \\ &D(\mathcal{L}_{4,2}, \mathcal{L}_{4,3}, \ldots, \mathcal{L}_{4,n+1}) = 5F_{3n-1}, \\ &D(\mathcal{L}_{4,2}, \mathcal{L}_{4,4}, \ldots, \mathcal{L}_{4,2n}) = 10n - 5, \\ &D(\mathcal{L}_{5,2}, \mathcal{L}_{5,4}, \ldots, \mathcal{L}_{5,2n}) = 6L_{2n-1}. \end{aligned}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_20.pdf

Використовуючи формулу Труді [4, с. 214], формули з Теореми 1 можемо записати як тотожності, які включають суми добутків узагальнених чисел Леонардо та мультиноміальні коефіцієнти.

Теорема 2. *Для $n \geq 2$ справджується тотожності*

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s)\mathcal{L}_{1,0}^{s_1}\mathcal{L}_{1,1}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{1,n-1}^{s_n} = 2F_{2n-2},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|}p_n(s)\mathcal{L}_{1,2}^{s_1}\mathcal{L}_{1,3}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{1,n+1}^{s_n} = 2(-1)^n F_{n+1},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|}p_n(s)\mathcal{L}_{1,3}^{s_1}\mathcal{L}_{1,5}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{1,2n+1}^{s_n} = 2(-1)^n F_{n+3},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|}p_n(s)\mathcal{L}_{2,2}^{s_1}\mathcal{L}_{2,4}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{2,2n}^{s_n} = 3(-1)^{\lfloor\frac{3n-1}{2}\rfloor},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|}p_n(s)\mathcal{L}_{4,2}^{s_1}\mathcal{L}_{4,3}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{4,n+1}^{s_n} = 5(-1)^n F_{3n-1},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|}p_n(s)\mathcal{L}_{4,2}^{s_1}\mathcal{L}_{4,4}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{4,2n}^{s_n} = (-1)^n(10n-5),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|}p_n(s)\mathcal{L}_{5,2}^{s_1}\mathcal{L}_{5,4}^{s_2}\cdots\mathcal{L}_{5,2n}^{s_n} = 6(-1)^n L_{2n-1},$$

де $p_n(s) = \frac{|s|!}{s_1!\cdots s_n!}$, $|s| = s_1+\cdots+s_n$, $\sigma_n = s_1+2s_2+\cdots+ns_n$, *а підсумовування здійснюється для всіх цілих* $s_i \geq 0$, *які задовольняють діофантове рівняння* $s_1+2s_2+\cdots+ns_n = n$.

1. *Goy T., Shattuck M.* Fibonacci–Lucas identities and the generalized Trudi formula // Notes Number Theory Discrete Math. – 2020. – № 26(3). – P. 203–217.
2. *Goy T., Shattuck M.* Fibonacci and Lucas identities using Toeplitz–Hessenberg matrices // Appl. Appl. Math. – 2019. – № 14(2). – P. 699–715.
3. *Kuhapatanakul K., Chobsorn O.* On the generalized Leonardo numbers // Integers. – 2022. – № 22. – #A48.
4. *Muir T.* The theory of determinants in the historical order of development, Vol. 3. – Dover Publications, 1960.

ON COMBINATORIAL IDENTITIES INVOLVING GENERALIZED LEONARDO NUMBERS

We investigate some families of Toeplitz–Hessenberg determinants the entries of which are generalized Leonardo numbers. Using Trudi's formula, these determinant formulas may be rewritten as identities involving sums of products of the generalized Leonardo numbers and multinomial coefficients.

УДК 514.174

СПРАВЕДЛИВА ПРЕДСТАВИМІСТЬ СОЦІАЛЬНО ВІДДІЛЕНИХ ПІДМНОЖИН ПРЯМОЇ

Михайло Митрофанов, Олександр Равський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de

Як трапляється з лихами, пандемія COVID-19 зумовила математичну проблему. А саме, Сегал – Халеві сформулював наступне узагальнення проблеми з [1]. Маючи сім'ю множин соціально відділених людей, потрібно вибрати множину соціально відділених представників цієї сім'ї. При справедливому виборі з кожної множини сім'ї є вибраним рівно один представник. На жаль, виявляється, що, подібно до іншого результату з теорії соціального вибору, відомої теореми Ерроу [2], навіть у цій ідеалізованій простій математичній моделі у деяких випадках справедливий вибір часто є важкодосяжним, а то і неможливим. Тому повстає питання розв'язності проблеми справедливого вибору, яке лишається відкритим навіть для випадку сім'ї підмножин дійсної прямої. Ми розглядаємо наступний варіант проблеми. Підмножина дійсної прямої є *відділеною*, якщо відстань між будь-якими двома різними точками цієї множини є принаймні два. Послідовність $(k_1,...,k_n)$ натуральних чисел є *представимою,* якщо для будь-якої послідовності $(A_1,..., A_n)$ таких відділених множин, що $|A_i|=k_i$ для кожного *i,* існує така відділена *n-елементна* множина $\{a_1,..., a_n\}$, що a_i належить A_i для кожного *i.* Отримано характеризацію представимих послідовностей в термінах комбінаторики слів, що дало можливість описати представимі послідовності довжини не більше за п'ять, побудувати певні загальні конструкції та оцінки, та застосувати потужний комп'ютерний перебір.

1. *Segal-Halevi E.* Choosing representatives with spatial separation // Mathematics Stack Exchange, http://math.stackexchange.com/q/3702472
2. *Arrow K.J.* A difficulty in the concept of social welfare // Journal of Political Economy – 1950. – **58**, No. 4. – P. 328–346.

COMPLETE REPRESENTABILITY OF SOCIALLY DISTANT SUBSETS OF THE REAL LINE

We consider the following problem from combinatorial geometry, suggested by the COVID-19 pandemic. Given a family of sets of socially distant people, we have to choose a set of socially distant representatives of the family. Unfortunately, the fair choice is hard and even impossible in some cases, even for the real line case considered in the paper, although for it we obtained the problem reformulation in terms of combinatorics of words.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_03.pdf

UDC 512.628.2

QUASI-PRIME IDEALS OF NOETHERIAN SEMIRINGS

Ivanna Melnyk

Ivan Franko National University of Lviv

ivannamelnyk@yahoo.com

This work is devoted to the investigation of commutative semirings with derivations and ascending chain condition.

A differential ideal I of the semiring R is called *quasi-prime* if there exists a multiplicatively closed subset S of R such that I is maximal differential ideal such that $I \cap S = \varnothing$. For a subset A of R the set $A_{\#} = \left\{a \in R \,\middle|\, a^{(n)} \in A \text{ for all } n \in \mathbb{N}_0\right\}$ is called the *differential* of A. A differential k-ideal P of R is called *differentially prime* if for any $a, b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$, $ab^{(k)} \in P$ follows $a \in P$ or $b \in P$.

Theorem 1. *Let R be a Noetherian semiring. If the k-ideal P of R is differentially prime, then P is a primary k-ideal of R.*

Theorem 2. *For every differential k-ideal I of the Noetherian semiring R the following are equivalent:*

1. *I is a quasi-prime k-ideal;*
2. *I is a differentially prime k-ideal;*
3. *$I = P_{\#}$ for some prime k-ideal P of R.*

1. *Keigher W. F.* Quasi-prime ideals in differential rings // Houston J. Math. – 1978. –**4**, No. 3. – P. 379–388.
2. *Melnyk I.* On the radical of a differential semiring ideal // Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math. – 2016. – **82**. – P. 163–173.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_11.pdf

УДК 515.1, 517

ПРО ПЕРЕТИН СІМЕЙСТВ УЛЬТРАФІЛЬТРІВ

Дмитро Селютін

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

seliutin2020pg@student.karazin.ua

Нехай Ω — непорожня множина, $\mathfrak{F}$ — непорожня сім'я непорожніх підмножин на Ω. Сім'ю $\mathfrak{F}$ називають фільтром на множині , якщо

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. якщо $A,\ B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \supset A$, то $D \in \mathfrak{F}$

Фільтр $\mathfrak{U}$ називають ультрафільтром на множині , якщо для будь-якого фільтру $\mathfrak{F}$ на Ω такого, що $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{U}$, насправді $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$.

Для сімейства підмножин W множини натуральних чисел будемо використовувати наступне позначення для перетину всіх елементів цього сімейства: $\cap W = \{B \subset \mathbb{N} :\ B \in U \text{ для всіх } U \in W\}$.

Означення 1. Будемо говорити, що сім'я вільних ультрафільтрів W презентує фільтр $\mathfrak{F}$, якщо $\cap W = \mathfrak{F}$.

Теорема 1. [1] *Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на множині натуральних чисел. Тоді існує сімейство ультрафільтрів W на множині натуральних чисел таке, що $\cap W = \mathfrak{F}$ і W має потужність не більше, ніж континуум.*

Теорема 2. [1] *Нехай $W_1\, W_2$ — скінченні сімейства ультрафільтрів на множині натуральних чисел такі, що $\cap W_1 = \cap W_2$. Тоді $W_1 = W_2$.*

1. *Kadets V., Seliutin D., Tryba J.* Conglomerated filters and statistical measures // J. Math. Anal. Appl. – 2022.– **509**, No. 1. – 125955.

ON THE INTERSECTION OF FAMILIES OF ULTRAFILTERS

In this article, we study a special types of filters on the set of natural numbers, namely, ultrafilters — maximal elements of the set of natural numbers by inclusion. We consider families of ultrafilters, intersections of elements of these families. An interesting question is the unity of the representation of the filter in the form of an intersection of ultrafilters.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_21.pdf

UDC 514.174

COMPLETE REPRESENTABILITY OF SOCIALLY DISTANT SETS

Mykhailo Mytrofanov, Alex Ravsky

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de

As it happens with calamities, the COVID-19 pandemic suggested a mathematical problem. Namely, Segal-Halevi formulated the following generalization of the combinatorial geometry problem from [2]. Given a family of sets of socially distant people, we have to choose a set of socially distant representatives of the family. On the other hand, to ensure inclusion, diversity, and equity, the set of representatives is required to be complete, that is each set of the family provides exactly one representative. Unfortunately, it turns out that similarly to the other result from the theory of social choice, the famous Arrow's theorem [1], even in this idealized simple mathematical model, the fair choice is hard and even impossible in some cases. Therefore there arises the decidability question of the fair choice problem, which remains open.

Now let us speak formally. Let X be a metric space. A subset $A \subseteq X$ is *separated*, if the distance between each two distinct points of A is at least 2. Given a natural number n, a sequence $(a_1, \dots, a_n)$ of distinct points of X is *separated*, if the set $\{a_1, \dots, a_n\}$ is separated. A sequence $(k_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{N}^n$ is *representable*, if for any sequence $(A_i)_{i\in[n]}$ of separated sets with $|A_i| = k_i$ for each $i \in \{1, \dots, n\}$, the Cartesian product $\prod_{i=1}^{n} A_i$ contains a separated sequence.

Our aim is to investigate general properties of representable sequences and to detect the latter for a few simple spaces X, namely, when X is the real line or the plane, both endowed with the Euclidean metric, or the plane endowed with the ℓ_∞ metric.

1. *Arrow K.J.* A Difficulty in the Concept of Social Welfare// Journal of Political Economy. – 1950. – **58**, № 4. – P. 328–346, https://web.archive.org/web/20110720090207/http://gatton.uky.edu/Faculty/hoytw/751/articles/arrow.pdf.
2. *Segal-Halevi E.* Choosing representatives with spatial separation // Mathematics Stack Exchange, http://math.stackexchange.com/q/3702472.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_22.pdf

UDC 517

APPROXIMATION RELATIONS ON THE POSETS OF PSEUDOULTRAMETRICS

Svyatoslav Nykorovych

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

svyatoslav.nyk@gmail.com

Recall that a poset $(D, \leq)$ is directed (resp., filtered) if for all $d_1, d_2 \in D$ there is $d \in D$ such that $d_1, d_2 \leq d$ (resp., $d_1, d_2 \geq d$).

Definition 1. An element x_0 is called to be way below an element x_1 (or approximates x_1 from below) in a poset $(X, \leq)$ (denoted $x_0 \ll x_1$) if for every non-empty directed subset $D \subset X$ such that $x_1 \leq \sup D$ there is an element $d \in D$ such that $x_0 \leq d$.

Definition 2. An element x_0 is called to be way above an element x_1 (or approximates x_1 from above) in a poset $(X, \leq)$ (denoted $x_0 \gg x_1$) if for every non-empty filtered subset $D \subset X$ such that $x_1 \geq \inf D$ there is an element $d \in D$ such that $x_0 \geq d$.

Obviously $x_0 \ll x_1$ or $x_0 \gg x_1$ imply respectively $x_0 \leq x_1$ or $x_0 \geq x_1$. A poset is called continuous if each element is the least upper bound of the directed set of all elements approximating it from below (resp., the greatest lower bound of the filtered set of all elements approximating it from above). In this paper we are not interested in "way above" relation and adopt the following definition.

Definition 3. An element x_0 is called weakly way below an element x_1 in a poset $(X, \leq)$ (denoted $x_0 \prec\!\!\ll x_1$) if for every non-empty directed subset $D \subset X$ such that $x_1 = \sup D$ there is an element $d \in D$ such that $x_0 \leq d$.

The partial orders on the set $PsU(X)$ of all pseudoultrametrics on X and its subsets $CPsU(X)$ and $LCPsU(X)$ are defined pointwise: a pseudoultrametric d_1 precedes a pseudoultrametric d_2 (written $d_1 \leq d_2$ or $d_2 \geq d_1$) if $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ holds for all points $x, y \in X$. The trivial pseudometric $d \equiv 0$ is the least element of $PsU(X)$, $CPsU(X)$, and of $LCPsU(X)$. We write $d_1 < d_2$ or $d_2 > d_1$ if $d_1 \leq d_2$ and $d_1 \neq d_2$ (this does not mean that $d_1(x, y) < d_2(x, y)$ for all x, y).

Theorem 1. *Let d, d_0 be pseudoultrametrics on X, $d_0 \notin CPsU(X)$. Then d_0 is not weakly way below d (hence is not way below d) neither in $PsU(X)$ nor in $LCPsU(X)$.*

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_23.pdf

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВИРІШЕННЯ ВАЖЛИВИХ ДЛЯ ОБОРОНИ І БЕЗПЕКИ ДЕРЖАВИ ЗАВДАНЬ, ВКЛЮЧАЮЧИ КІБЕРБЕЗПЕКУ

УДК 504.3.054

ПІЛОТНА СИСТЕМА АНАЛІЗУ НЕВІДОМИХ ДЖЕРЕЛ РАДІОАКТИВНИХ ЗАБРУДНЕНЬ В АТМОСФЕРІ ЗАСОБАМИ ОБЕРНЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Роман Синкевич, Світлана Майстренко, Костянтин Хурцилава, Тарас Донцов-Загреба, Іван Ковалець

Інститут проблем математичних машин та систем НАН України

sunkevu4@gmail.com, ik@env.com.ua

У роботі подано пілотну версію системи аналізу невідомих джерел радіоактивних атмосферних забруднень у випадку їх детектування мережами моніторингу. Прикладами таких подій можуть бути численні випадки детектування йоду-131 у Європі, наприклад, у 2011, 2016, 2017 роках, або випадок детектування рутенію-106 невідомого походження на території більшої частини Євразії у 2017 р. [1]. Розташування можливих джерел аналізується шляхом мінімізації функції якості, яка характеризує відмінність розрахованих концентрацій від вимірів залежно від координат, часу початку і тривалості джерела. Функцією якості є коефіцієнт кореляції вимірів і розрахунків, взятий зі знаком мінус, тому за апроксимації постійної інтенсивності джерела або залпового викиду розраховані концентрації не залежать від обсягів викиду і визначаються лише просторовими координатами і часовими параметрами джерела. Для розрахунку значень концентрації при довільних параметрах джерела використовується функція рецептор-джерело, побудована шляхом розв'язання спряжених рівнянь моделі атмосферного перенесення [1]. В роботі подано застосовані методи моделювання, функціонал системи та результати тестування з використанням даних вимірів.

1. *Kovalets I.V., Romanenko O., Synkevich R.* Adaptation of the RODOS system for analysis of possible sources of Ru-106 detected in 2017 // J. Env. Rad. – 2020. – 106302. – P. 220–221. – doi: 10.1016/j.jenvrad.2020.106302.

PILOT SYSTEM OF ANALYSIS OF UNKNOWN SOURCES OF RADIOACTIVE POLLUTION IN THE ATMOSPHERE USING INVERSE MODELING

We present a pilot version of the system for analyzing unknown sources of radioactive atmospheric pollution in the case of their detection by monitoring networks. The report presents the underlying modeling methods, functionality of the system and results of testing using measurement data.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_05.pdf

УДК 620.179.1.001.5

МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИФРОВИХ ДВІЙНИКІВ РЕАКЦІЇ БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД НА ДИНАМІЧНІ ВПЛИВИ

Олександр Трофимчук, Юрій Калюх, Володимир Дунін, Сергій Кураш

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

Trofymchuk@nas.gov.ua, kalyukh2002@gmail.com,
vladimirdunin87@gmail.com, zuvs2004@gmail.com

У 2022 р. проблема системної оцінки динамічних впливів на цивільну та промислову забудову в Україні набула особливої гостроти у зв'язку з загарбницькою війною російської федерації. У зв’язку з цим математичне моделювання та розрахунки будівель необхідно проводити в умовах «прогресуючого обвалення»: у графічну модель будівлі необхідно включати один або кілька її фрагментів, які були зруйновані внаслідок влучання ракет, снарядів, мін тощо (рис. 1, 2). При цьому можливі такі три випадки: будівля повністю зруйнована та відновленню не підлягає (1); будівля частково зруйнована та підлягає відновленню (2); будівля зовні виглядає непошкодженою, але знаходилася в зоні бойових дій і зазнавала динамічних впливів (3). В останніх двох випадках необхідно враховувати впливи ґрунтових і повітряних ударних хвиль (динамічні впливи) на погіршення технічного стану будівлі та кількісну оцінку падіння її життєвого ресурсу.

При математичному моделюванні напружено-деформованого стану (НДС) будівлі (рис. 1, 2) ми стикаємося з декількома типами труднощів. По-перше, це побудова першого етапу цифрового двійника – цифрової моделі будівлі з урахуванням зміни в її геометрії (пошкодження або відсутність елементів конструкцій). Це вимагає детальних натурних обстежень частково зруйнованої будівлі та врахування результатів обстеження в побудові цифрової моделі.

По-друге, це коректне визначення початково-крайових умов. До крайових умов, крім геометричних характеристик будівлі, належать також фізико-механічні характеристики (ФМХ) всіх її конструктивних елементів. Наприклад, при обстеженні методами неруйнівного контролю будівлі (рис. 1) були виявлені розбіжності між проектними та реальними марками бетону її конструктивних елементів. До початкових умов належать реальні акселерограми в місці розташування будівлі для проведення її прямого динамічного розрахунку. Таким чином, виникає необхідність розробки таких гібридних систем

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_01.pdf

моделювання напружено-деформованого стану будівель та споруд, що піддалися дії бойових вибухів, які використовували б інформаційні технології (IoT) при проведенні досліджень. Крім традиційних пакетів прикладних програм LIRA 9.4 або SCAD, потрібні IoT-системи датчиків неруйнівного контролю з дослідження міцнісних і вібраційних характеристик будівлі та грунтової основи. Така IoT-система за допомогою хмарних технологій об’єднана в одну інформаційну мережу та дозволяє в онлайн-режимі отримувати необхідну інформацію, що висвітлює особливості конкретної будівлі. І це є другим етапом побудови цифрового двійника досліджуваної будівлі.

Рис. 1 Загальний вигляд будинку по проспекту Лобановського, 6А після влучання ракети

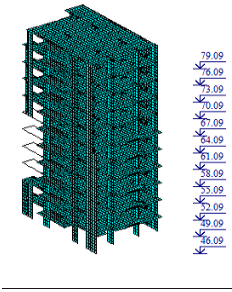


Рис 2. Цифрова модель будівлі по проспекту Лобановського, 6А в м. Києві з елементами ушкоджень в межах 18–21 поверхів

У подальшому потрібно також вирішити ще низку питань: (1) ідентифікація розрахункової моделі, (2) вибір коректної програми для розрахунку, яка спроможна враховувати нелінійну зміну ФМХ та НДС конструкції будівлі при вибухових димічних впливах, та ін. (3), (4), (5), … , (N).

В доповіді буде наведено три приклади застосування запропонованої методології: для будівлі на рис. 1 (м. Київ); житлового комплексу «Під дубом», побудованого поблизу Львівської залізничної дороги на сейсмоопорах (м. Львів); будівлі «Дім молодіжної творчості», що регулярно зазнає впливу промислових вибухів на кар’єрі ПГЗК (м. Кривий Ріг).

THE SIMULATION OF A RESPONSE OF BUILDINGS AND STRUCTURES TO DYNAMIC INFLUENCES USING THE DIGITAL TWINS

In 2022, the problem of systematic assessment of dynamic impacts on civil and industrial development in Ukraine became particularly acute because of the aggressive war of the russian federation. The report will give three examples of application of the methodology of digital twins: for the building hit by a rocket in Kyiv (Fig. 1); the residential complex built on seismic supports near the railway in Lviv; the building regularly exposed to the effects of industrial explosions near the quarry of the Southern Mining and Processing Plant in Kryvyi Rih.

УДК 004.3+519.681.5

ПРОБЛЕМА РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ ОБЧИСЛЕНЬ ПІД ЧАС АГРЕГОВАНОГО ОЦІНЮВАННЯ АВТОТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ ВЕЛИКОГО МІСТА

Михайло Яджак, Олександр Поліщук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка

yadzhak_ms@ukr.net, od_polishchuk@ukr.net

Автотранспортна система (АТС) великого міста є прикладом реальної складної мережевої системи із частково впорядкованим рухом потоків. У ній лише певна частина потоків проходить за визначеним графіком. Відомі математичні моделі [2] достатньо повно описують процеси, що протікають в АТС у некритичних умовах її функціонування, але не можуть вирішити низку важливих проблем, наприклад, не допустити або усунути перевантаження шляхів у години пік, попередити причини виникнення заторів тощо. У цьому випадку застосування методів інтерактивного оцінювання поведінки систем із повністю впорядкованим рухом потоків [1] є не зовсім зручним через наявність значної кількості негативних випадкових впливів (дорожньо-транспортні пригоди, кліматичні умови, загрози терористичного акту, початок військових дій, техногенні аварії, протестні акції населення тощо), які порушують усталений режим функціонування. Тому для оцінювання стану та процесу функціонування АТС міста в [3] була запропонована інтерактивна методика на основі методів U-статистик. Ця методика поєднує локальне, прогностичне та агреговане оцінювання об'єктів АТС міста і використовує значні обсяги даних, які надходять неперервно практично в режимі реального часу. Отже, для ефективної реалізації згаданої методики на сучасних обчислювальних засобах потрібно розробляти та досліджувати відповідні паралельні алгоритми, зокрема і для здійснення агрегованого оцінювання.

Загалом, залежно від кінцевої мети, у даному випадку можна виділити декілька процедур агрегованого оцінювання, в яких узагальнені висновки будуються для сукупностей локальних оцінок стану шляху та/або роботи світлофорів на ньому. Перерахуємо ці висновки для розглянутих процедур:
1) висновки $V1$–$V4$, які характеризують відповідно стан елементарних ділянок, ребер, підмереж районів (з урахуванням пріоритетності ребер) та всієї інфраструктури АТС міста (з урахуванням пріоритетності районів);
2) $V5$–$V8$: про ефективність роботи на шляхах міста окремих світлофорів, сві-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_02.pdf

тлофорів регульованих перехресть, районів (з урахуванням пріоритетності перехресть), міста (з урахуванням пріоритетності районів);
3) $V9$–$V11$, які характеризують поточну завантаженість елементарних ділянок, ребер, окремого маршруту (з урахуванням пріоритетності ребер);
4) $V12$–$V14$: про поточну роботу окремих світлофорів, світлофорів регульованих перехресть, маршруту (з урахуванням пріоритетності світлофорів);
5) $V15$–$V17$, які характеризують поточний стан елементарних ділянок, ребер та автошляхів окремого району (з урахуванням пріоритетності ребер);
6) $V18$–$V20$: про поточну роботу окремих світлофорів, світлофорів регульованих перехресть, окремого району міста (з урахуванням пріоритетності світлофорів);
7) $V21$–$V24$, що характеризують поточний стан елементарних ділянок, ребер, підмереж усіх районів та автошляхів міста загалом (за пріоритетністю ребер);
8) $V25$–$V28$: про поточну роботу окремих світлофорів, світлофорів регульованих перехресть, усіх районів та міста (за пріоритетністю світлофорів).

У [4] запропонована ефективна алгоритмічна конструкція організації паралельних обчислень для побудови лише узагальнених висновків $V1$–$V4$ і $V5$–$V8$. Тому нами пропонуються та досліджуються алгоритмічні конструкції для паралельного виконання обчислень під час формування висновків $V9$–$V28$. При цьому враховується, що деякі процедури агрегованого оцінювання можна реалізувати одночасно, до того ж окремі висновки можуть бути сформовані одночасно для декількох однотипних об'єктів міста (перехресть, маршрутів, районів). Для побудованих паралельних алгоритмів агрегованого оцінювання одержано оцінки прискорення, які підтверджують їх високу ефективність. Ці алгоритми є сукупностями фрагментів у вигляді автономних гілок, тому їх легко відобразити для реалізації на сучасних обчислювальних засобах зі спільною та розподіленою пам'яттю.

1. *Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: IV. Інтерактивне оцінювання // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 1. – С. 7–16.
2. *Швецов В.И.* Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.
3. *Polishchuk O.D., Yadzhak M.S.* Analyzing operation efficiency of a city transportation system by the *U*-statistics methods. I. Interactive evaluation of continuous monitoring results // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – **58**, No. 3. – P. 440–449.
4. *Polishchuk O.D., Yadzhak M.S.* Optimization of interactive evaluation of operation efficiency of the city's transport system by methods of *U*-statistics // arXiv.2212.14560 [physics.soc-ph]. – 2022. – 12 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.14560

THE PROBLEM OF COMPUTATIONS PARALLELIZATION FOR THE AGGREGATIVE EVALUATION OF A BIG CITY'S MOTOR TRANSPORT SYSTEM

Aggregated evaluation procedures for analysis of operation quality of the big city's motor transport system using U-statistics methods are considered. Effective parallel algorithms for the realization of these procedures on modern computing means are proposed. Speedup estimates for these algorithms are obtained.

УДК 519.711.7:519.816

ПРО УРАЗЛИВІСТЬ СКЛАДНИХ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ ТА МІЖСИСТЕМНИХ ВЗАЄМОДІЙ

Олександр Поліщук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

od_polishchuk@ukr.net

Кожна природна або створена людиною система є уразливою до багатьох внутрішніх та зовнішніх негативних впливів. Серед основних видів таких впливів насамперед можна виділити цілеспрямовані атаки та нецільові ураження складних мережевих систем та міжсистемних взаємодій [1]. Відмінною рисою цілеспрямованих атак є їх умисність та штучний характер. Особливістю уражень цього типу є наявність цілі атаки, спрямованої на завдання якнайбільшої матеріальної та/або моральної шкоди атакованій системі, та зловмисника, який цю атаку здійснює. На відміну від цілеспрямованих атак, до нецільових уражень можна віднести різнорідні неумисні негативні впливи природного або штучного характеру, виникнення та наслідки яких людина не може своєчасно передбачити. У 2020–2022 роках людство зіштовхнулося з двома глобальними викликами, перший з яких (пандемія Covid-19) є яскравим прикладом загальносистемного нецільового ураження, а другий (напад рф на Україну) – цілеспрямованої атаки та викликаної нею загрози світової продовольчої, енергетичної, фінансової кризи і зворотних всеосяжних санкцій стосовно держави-агресора, негативні наслідки яких торкнулися практично усіх країн світу. Різнорідні негативні впливи можуть бути локальними, груповими або загальносистемними, умовно передбачуваними або неочікуваними, централізованими або децентралізованими, поширюватися із різною швидкістю та бути спрямованими на ураження структури та/або процесу функціонування системи чи міжсистемних взаємодій. Особливістю сучасних досліджень стійкості мережевих систем (МС) до різнорідних негативних впливів є розроблення сценаріїв послідовного ураження групи найважливіших зі структурного погляду вузлів мережі, хоча очевидно, що одночасна атака на таку групу або загальносистемна атака, яка у тій або іншій мірі вражає усі елементи МС, є значно небезпечнішою для будь-якої реальної мережевої системи [3]. Корисність таких сценаріїв полягає у тому, що вони, даючи картину можливого розвитку атаки, дозволяють розробляти ефективні засоби захисту від неї. Що не менш важливо, сценарії цілеспрямованих атак часто задають ефективні алгоритми протидії поширенню нецільових уражень (методи захисту від поширення комп'ютерних вірусів є подібними

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_03.pdf

до заходів протидії розгортанню епідемій небезпечних інфекційних захворювань і т.ін.), а способи боротьби з нецільовими ураженнями можуть підказувати дієві сценарії реалізації цілеспрямованих атак. Аналізуючи загрози, які можуть порушити структуру або дестабілізувати процес функціонування реальних МС, та розробляючи відповідні засоби їх захисту, дослідники часто абстрагуються від джерел цілеспрямованих атак та нецільових уражень, які можуть бути і внутрішніми, і зовнішніми по відношенню до системи. Водночас, блокування таких джерел є одним із дієвих засобів захисту як окремої МС, так і процесу міжсистемних взаємодій загалом, адже своєчасна нейтралізація терористичної або хакерської групи чи розроблення вакцин та ліків від небезпечних інфекційних захворювань може запобігти тій шкоді, яку вони можуть заподіяти.

У доповіді на підставі структурної моделі багатошарової мережевої системи (БШМС), яка описує процеси міжсистемних взаємодій, побудована модель її агрегат-мережі та введені поняття серцевин різних типів. Виділення таких складових дає змогу визначати найважливіші за тими або іншими ознаками компоненти багатошарової мережі, які потребують першочергового захисту. Побудовані ефективні сценарії послідовних та одночасних групових, а також загальносистемних атак на структуру БШМС. Однак, структурні показники далеко не завжди адекватно відображають функціональну важливість окремих складових БШМС, а отже структурні сценарії, які базуються на таких показниках, можуть виявитися не найефективнішими. До того ж, на рівні структурного підходу достатньо важко кількісно проаналізувати наслідки уражень, заподіяних цілеспрямованою атакою, та розробити стратегії відновлення процесу функціонування уражених елементів, підсистем або багатошарової системи загалом. Для подолання цього недоліку в роботі розроблена потокова модель міжсистемних взаємодій [2], на підставі якої сформована модель агрегат-мережі БШМС та введені поняття потокових серцевин різних типів. Виділення таких складових дають змогу визначати найважливіші з функціонального погляду компоненти багатошарової мережі, які потребують першочергового захисту. Побудовані значно ефективніші порівняно зі структурними сценарії послідовних та одночасних групових, а також загальносистемних атак на процес функціонування багатошарових мережевих систем.

1. *Polishchuk O.* "About group and system-wide lesions of complex network systems and intersystem interactions", arXiv: 2211.11207 [physics.soc-ph], 2022.
2. *Polishchuk O.* "Flow model of intersystem interactions and influence of components of multilayer network systems", arXiv: 2302.02134 [physics.soc-ph], 2023.
3. *Polishchuk O.* "Strategies for protecting of multilayer networks from group and system-wide targeted attacks", arXiv: 2211.15090 [physics.soc-ph], 2022.

ABOUT VULNERABILITY OF COMPLEX NETWORK SYSTEMS AND INTERSYSTEM INTERACTIONS

The main types of lesions of complex network systems and intersystem interactions are analyzed. Effective scenarios of group and system-wide attacks on the structure and operation process of multilayer network systems have been developed.

UDC 519.21

INFINITESIMAL OPERATOR FOR THE CONTINUOUS TIME MARKOV MODULATED POISSON PROCESS

Serhiy Semenyuk

Lviv Polytechnic National University

semenyuk@gmail.com

Markov Modulated Poisson Processes (MMPP) [1] are commonly used to capture the burstiness and temporal correlation in network traffic patterns (in network traffic modeling), to describe the volatility of financial asset prices (in financial modeling), to model the spread of infectious diseases and to analyze the effectiveness of various interventions (in epidemiology). Alongside, it can be used for modeling an intrusion detection system (IDS) by representing the behavior of a network traffic as a sequence of states, where each state is associated with a Poisson arrival rate.

Let's consider MMPP as a two-component process $(x(t), N(t))$. Here, the process $x(t) = x_t, t \geq 0$ is uniformly ergodic Markov process in the standard phase space $(X, \boldsymbol{X})$ with infinitesimal operator (generator) [2]:

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X), \tag{1}$$

where $\mathbf{B}$ denotes Banach space of real bounded functions with supremum norm $||\varphi|| = \max\limits_{x \in X} |\varphi(x)|$. Let process $x(t)$ have stationary distribution $\pi(C)$, $C \in \boldsymbol{X}$.

The Poisson process $N(t) = N_t, t \geq 0$ is defined as the counting process of the number of events that have occurred up to time t. The arrival rate of events at time t is given by $\lambda(x(t))$, i.e. rate parameter is modulated by the state process.

In other words, the continuous-time Markov-modulated Poisson process is a stochastic process that counts the number of events that occur in a Poisson process, where the arrival rate of events is modulated by a Markovian state process.

The probability of a random variable $N(t)$ being equal to k is given by:

$$P[N(t) = k] = \frac{\Lambda^k(t)}{k!} e^{-\Lambda(t)}, \tag{2}$$

where $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x(t))dt$ is the cumulative arrival rate up to time t, where $\lambda(x(t))$ is the arrival rate of events at time t when the Markov process is in state $x(t)$. For such a process the following holds true:

$$\begin{aligned} &P[N(t+h) - N(t) = 0] = 1 - \Lambda(h) + o(h), \\ &P[N(t+h) - N(t) = 1] = \Lambda(h) + o(h), \\ &P[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h), h \to 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Lemma 1. *Infinitesimal operator for the continuous time Markov Modulated Poisson Process* (x_t, N_t) *has the form:*

$$L\varphi(x,N) = Q\varphi(x,N) + \lambda(x)(R\varphi(x,N) - I\varphi(x,N)), \tag{4}$$

where $R\varphi(x,N) = \varphi(x,N+1)$ *and* $I\varphi(x,N) = \varphi(x,N)$ *- an identity operator.*

Proof. Similar to [3] the definition of the infinitesimal operator is used. Then the conditional mathematical expectation is calculated and with the usage of the Poisson process properties and Markov process generator definition (1) the resulting formula (4) is obtained. ■

The infinitesimal operator is useful for analyzing the statistical properties of the process, such as its moments, correlation functions, and steady-state behavior. It can also be used to derive the stochastic differential equations that describe the dynamics of systems that are perturbed by MMPP noise.

1. *Fischer W., Meier-Hellstern K.* The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook // Performance evaluation. – 1993. – **18**, No. 2. – P. 149—171.
2. *Korolyuk V.S, Limnius N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Scientific, 2005. – 330 p.
3. *Semenyuk S.A., Chabaniuk Ya. M.* Fluctuations of a stochastic system under an asymptotic diffusive perturbation // Cybern. Syst. Anal. – 2008. – **44**. – P. 716–721

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_04.pdf

УДК 004.3+519.681.5

ПРО ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОГНОСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ СКАЛАДНОЇ СИСТЕМИ

Марія Тютюнник

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

tyutmi@ukr.net

Елементи складної системи, перебуваючи в режимі експлуатації, зазнають постійного впливу внутрішніх та зовнішніх чинників, у тому числі непередбачуваних та несприятливих умов функціонування і, унаслідок цього пришвидшуються процеси їх старіння та «зношуваності» [2].

Своєчасне виявлення ризиків збоїв у функціонуванні елементів системи дозволяють здійснити методи прогностичного оцінювання [1]. У цьому разі методи прогностичного аналізу дають змогу виявити ризики виникнення незадовільних оцінок стану та якості функціонування елемента і, таким чином, запобігти аварійним ситуаціям в окремих елементах, складових системи чи системі загалом на підставі передісторій локальних оцінок характеристик. Для прискорення цього процесу нами буде запропоновано підходи до оптимізації за часом процедури прогностичного оцінювання.

У цій роботі розглянуто методи оцінювання, які дозволяють спрогнозувати (на коротко- або довготривалий термін) як саму оцінку, так і поведінку характеристики елемента.

Зазначимо, що стосовно формування висновків на різних рівнях ієрархії системи визначальним є локальне оцінювання. Інформація, що надходить у локальні центри обробки у вигляді масивів, зазвичай може містити неточні або суттєво спотворені дані. Тому, перш ніж використовувати такі масиви для локального оцінювання елементів складних систем, їх потрібно попередньо опрацювати і переважно в режимі реального часу [3].

Зазвичай локальні оцінки отримують під час неперервного моніторингу та планових оглядів. Останні часто рознесені в часі. Тому прогноз локальних оцінок для реально функціонуючих складних систем дозволяє в більш повній мірі сформувати висновки про стан та якість функціонування елементів системи до наступного планового огляду.

Процедура короткострокового прогнозування значень оцінки характеристики елементів будується на передісторії $\{e(t_j)\}_{j=1}^{J}$, $J \geq 2$ оцінок цієї ха-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm11_06.pdf

рактеристики, одержаних під час здійснення послідовності планових досліджень у моменти часу $t_j \in [0,T]$, $j = \overline{1,J}$ за період T.

Прогностичний аналіз уточнених бальних оцінок дозволяє визначити момент часу, коли понятійна оцінка зменшиться на одиницю.

Процедура прогностичного оцінювання поведінки характеристики елемента на підставі екстраполяційного підходу дозволить спрогнозувати її поточкові значення. З метою усунення потенційних ризиків збоїв у функціонуванні елементів системи цю процедуру особливо важливо здійснювати для тих характеристик, для яких одержано негативний прогноз оцінки на момент наступного планового огляду.

Довгострокове прогнозування на підставі використання апарату часових рядів передбачає опрацювання даних кількох періодів планових досліджень.

Оптимізація за часом процедури довгострокового прогнозування передбачає одночасне співставлення оцінкам $e(t_j)$, одержаних в момент часу t_j, відповідних часових рядів Y_j, $j = \overline{1,\widetilde{J}}$. При цьому процедура прогнозування кожного часового ряду Y_j на інтервалі $[\widetilde{J}, J]$, де $\widetilde{J} < J$, $j = \overline{\widetilde{J},J}$, $J = T / j$ передбачає попередню обробку, що зводиться до фільтрації ряду з метою зменшення збурень методом експоненційного згладжування.

Зменшити час прогностичного оцінювання можна унаслідок одночасного виконання описаних процедур для певної кількості оцінок, а також шляхом прогнозування поведінки декількох характеристик елементів у паралельному режимі. З цією метою нами запропоновано ефективні алгоритмічні конструкції.

1. *Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем. Частина II. Локальне та прогностичне оцінювання // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 2. – С. 26–38.
2. *Pankratova N.D.* System strategy for guaranteed safety of complex engineering systems // Cybernetic and Systems Analysis. – 2010 – № 2. – P. 243–251.
3. *Yadzhak M.S., Tyutyunnyk M.I.* An optimal algorithm to solve digital filtering problem with the use of adaptive smoothing // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – **49**, № 3. – P. 449–456.

ABOUT SOME APPROACHES TO OPTIMIZING THE PREDICTIVE EVALUATION OF COMPLEX SYSTEM OBJECTS

The importance of predictive evaluation is justified. Such evaluations are grounded on the prehistory of local evaluations. Approaches to parallelization of the procedure for predicting the estimates and behavior of the system objects' characteristics are considered.

UDC 004.056

INVESTIGATION OF SERVER VULNERABILITIES ON WEBAPP USING CROSS-PLATFORM NODE.JS

Nazarii Dzhaliuk

Lviv Polytechnic National University

nazarii.dzhaliuk.kb.2019@lpnu.ua

Node.js applications are increasing in number and they are no different from other frameworks and programming languages. Node.js applications are prone to all kinds of web application vulnerabilities. Node.js itself is a secure platform – but many third-party open source packages in the ecosystem may not be. In the Node.js threat model, there are trusted elements such as the underlying operating system. Currently, any package can access powerful system resources such as network access.

Packages are used through Node Package Manager (npm) and are susceptible to many different types of vulnerabilities and other Node.js licensing and security risks, opening up the housed applications to a lot of risks. All code running into a node process has the ability to load and run additional arbitrary code by using eval() (or its equivalents). All code with file system write access may achieve the same thing by writing to new or existing files which are loaded.

Node.js has an experimental policy mechanism to declare the loaded resource as untrusted or trusted. However, this policy is not enabled by default yet. Policies are a security feature intended to allow guarantees about what code Node.js is able to load. The use of policies assumes safe practices for the policy files such as ensuring that policy files cannot be overwritten by the Node.js application by using file permissions.

1. *Node.js* v20 Policy, https://nodejs.org/api/permissions.html#policies
2. *Node.js* treat model, https://github.com/nodejs/node/blob/main/SECURITY.md#the-nodejs-threat-model
3. *OWASP* Node.js security, https://cheatsheetseries.owasp.org/cheatsheets/Nodejs_Security_Cheat_Sheet.html

ДОСЛІДЖЕННЯ УРАЗЛИВОСТЕЙ ВЕБ-ДОДАТКІВ НА СТОРОНІ СЕРВЕРА ПРИ ЗАСТОСУВАННІ КРОС-ПЛАТФОРМОВОГО СЕРЕДОВИЩА NODE.JS

Кросплатформове середовище Node.js спроектовано так, що воно має повний доступ до системних ресурсів, що несе загрозу при використанні сторонніх залежностей, наприклад з репозиторію прт. Щоб вирішити цю проблему, було запропоновано експериментальну можливість видачі дозволів процесу Node.js для обмеження доступу до системних ресурсів.

СУЧАСНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ В ГАЛУЗІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

УДК 004.3+519.681.5

ПРО ВИКЛАДАННЯ ОСНОВ ПАРАЛЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ В ГАЛУЗІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

Михайло Яджак

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Львівський національний університет імені Івана Франка

yadzhak_ms@ukr.net

Зараз математичні методи широко використовуються для дослідження процесів та явищ у різноманітних сферах людської діяльності [1, 4]. У більшості випадків такі дослідження пов'язані з пошуком, відбором, зберіганням та опрацюванням у режимі реального часу великих обсягів інформації про досліджувані об'єкти [2, 5]. Класичні послідовні методи та алгоритми не завжди дозволяють отримати шуканий розв'язок задачі за прийнятний час або виробити необхідні рекомендації для прийняття управлінських рішень у критичних ситуаціях.

Протягом останніх 20-ти років у світі спостерігався значний стрибок у розвитку комп'ютерної техніки, комунікаційних технологій та відповідного програмного забезпечення [3]. Загальнодоступними стали високопродуктивні обчислювальні системи та сервіси програмування паралельних алгоритмів для різних типів архітектур (комп'ютерів з багатоядерними процесорами, кластерів, графічних процесорів, розподілених високопродуктивних середовищ тощо). Загалом суттєво розвинувся такий напрямок, як паралельне програмування, який вивчає як архітектуру паралельних обчислювальних систем, так і методи організації та програмні засоби реалізації на них паралельних обчислень під час розв'язання важливих задач науки і техніки. Завдяки цьому напрямку з'явилися ефективні паралельні алгоритми для розв'язання конкретних задач, а також цілі класи принципово нових алгоритмів, яскравими представниками яких є нейромережні, систолічні та квазісистолічні алгоритми. Одним із важливих результатів паралельного програмування є встановлення факту, що багато із традиційних послідовних алгоритмів не мають ефективних паралельних аналогів.

Отже, з викладеного випливає, що знання основ паралельного програмування є важливими під час застосування математичних методів для дослід-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma12_01.pdf

жень із використанням сучасних апаратних і програмних засобів. Тому для навчання студентів університетів у галузі прикладної математики та інформатики необхідно розробляти, впроваджувати та постійно удосконалювати відповідні навчальні курси.

У зв'язку з цим нами розроблено курс «Паралельні обчислення та засоби їх реалізації», який читається магістрам за спеціальністю «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» на кафедрі прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка» та бакалаврам (4-й курс) за спеціальністю «Комп'ютерні науки» на кафедрі інформаційних систем Львівського національного університету імені Івана Франка. Значну увагу в курсі приділено вивченню архітектурних особливостей сучасних обчислювальних систем, застосуванню методів розпаралелювання ациклічних та циклічних ділянок алгоритмів і програм, а також оцінюванню паралельних алгоритмів. Розглядаються загальні методи синтезу паралельних алгоритмів. У межах курсу вивчаються та досліджуються паралельні методи і алгоритми розв'язання задач лінійної алгебри, цифрової фільтрації [6] та систолічні алгоритми обчислень. Обговорюються проблеми побудови оптимальних за швидкодією та використанням пам'яті алгоритмів [7].

Окремі розділи з паралельного програмування викладаються нами для аспірантів першого року навчання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за напрямками підготовки «Математика» та «Прикладна математика» в межах курсу «Сучасні обчислювальні методи математики і механіки».

1. *Гачкевич О.Р., Кушнір Р.М.* Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 7–24.
2. *Попов О.В.* Комп'ютерні методи дослідження математичних моделей з розрідженими структурами даних // Автореф. дис. … д. ф.-м. н., спец. 01.05.02. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2021. – 32 с.
3. *Список* найпотужніших обчислювальних систем світу. [Електр. ресурс]. – Режим доступу: http://www.top500.org
4. *Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N.V.* Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, Is. 2. – P. 174–188.
5. *Polishchuk O., Polishchuk D., Tyutyunnyk M., Yadzhak M.* Big data processing in complex hierarchical network systems I: Structures and information flows // AASCIT Communications. – 2016. – **3**(3). – P. 112–118.
6. *Yadzhak M.S.* Parallel algorithms for data digital filtering // Cybernetics and Systems Analysis. – 2023. – **59**, No. 1. – P. 39–48.
7. *Yadzhak M.S., Tyutyunnyk M.I.* An optimal algorithm to solve digital filtering problem with the use of adaptive smoothing // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – **49**. – P. 449–456.

ON TEACHING THE BASICS OF PARALLEL PROGRAMMING FOR APPLICANTS OF HIGHER EDUCATION IN APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

The nesessity of teaching the basics of parallel programming for higher education applicants in the field of applied mathematics and computer science is substantiated. The developed course «Parallel computations and means of their realization» is briefly described.

УДК 004.3+519.681.5

ЗАСТОСУВАННЯ ЕВРИСТИЧНИХ ПІДХОДІВ У ВИКЛАДАННІ ОПЕРАЦІЙНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ

Ольга Терендій, Оксана Грицай, Артем Марущак

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»

ovterendiy@gmail.com, oksana.d.hrytsai@lpnu.com, artem.marushchak.pz.2021@lpnu.ua

Мотивацією у викладанні математичних дисциплін для інженерних технічних спеціальностей є можливість застосування теоретичних знань і набутих навичок у дисциплінах, що безпосередньо стосуються спеціальності. Важливим аспектом при цьому є застосування евристичних (дослідницьких підходів), що з однієї сторони дозволяють здобувачам освіти поглибити свої знання математичних дисциплін, а з іншої – формують компетентності, необхідні для наукової роботи. Про такі методи викладання неодноразово згадано у багатьох дослідженнях, зокрема у роботах [1, 2, 4, 5]. Зокрема, емпіричні підходи викладання використовуються при вивченні студентами принципів розпаралелювання у дисципліні «Операційні системи» [6, 7]. Наприклад, в одній з лабораторних робіт [3] потрібно дослідити ефективність і потенційне прискорення алгоритму заданої програми, розпаралеленої на кілька потоків, що виконуються на заданній кількості процесорів згідно зі законом Амдала:

$$S_p = (\beta + (1-\beta)/p)^{-1}\ ;\ \lim_{p\to\infty}(1-\beta)/p \to 0;\ \lim_{p\to\infty} S_p \to 1/\beta\,.$$

Для дослідження обрано обчислення значень великого (~ 50000000) масиву залежностей через функції косинусів та синусів. Запропоновано розпаралелення на 4 потоки, які поетапно виконувались на різній кількості процесорів (від 1 до 16). Результатом дослідження повинен бути аналіз пришвидшення виконання заданого алгоритму в залежності від використання кількості потоків і процесорів.

Для отримання очікуваного результату, студенти виконували дослідження кілька разів. Як результат виконання такого дослідження студентами отримано певні залежності, що дозволяють оцінити ефективність виконання задачі заданою кількістю потоків на різній кількості процесорів. Результати одного із досліджень подано на рис. 1.

Отже, студенти знайомляться зі задачами розпаралелення, досліджують ефективність застосування розпаралелення через математичні закони і самостійно робять висновки щодо данного дослідження. Такий евристичний підхід до виконання лабораторної роботи дозволяє закріпити математичні знання і навички, зрозуміти їх застосування в професійній діяльності та сформувати основи наукового мислення. Крім того, евристичний підхід дозволяє і практичне застосування отриманих знань у наступних дисциплінах та у професійній діяльності.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma12_02.pdf

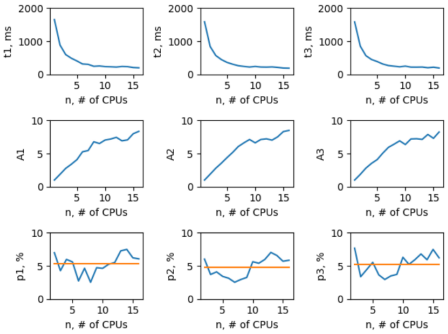


Рис. 1 Результати дослідження за законом Амдала виконання модельної задачі з врахуванням розпаралелення на кілька потоків

1. *Кіяновська Н.М.* Теоретико-методичні засади використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні вищої математики студентів інженерних спеціальностей у Сполучених Штатах // Електроний ресурс: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1809/1809.09557.pdf (дата зверн. 11.04.2023).
2. *Романчук Я.П.* Деякі новітні методи викладання вищої математики // Сучасна наука: проблеми і перспективи (частина ІІІ): матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції. – Київ: МЦНіД, 2020. – С. 49–51.
3. *Яковина В.С., Грицай О.Д., Майхер В.Ю., Семенишин Н.О.* Ознайомлення та керування процесами в операційних системах для персонального комп'ютера. Windows // Метод. вк. лаб. роб. № 1 з дис. «Операційні системи» для студ. першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 121 – Інженерія програмного забезпечення / Укл.: В.С. Яковина, О.Д. Грицай, В.Ю. Майхер, Н.О. Семенишин – Львів: 2020 – 25 с.
4. *Abuasad Salah* Methods of Teaching Modern Mathematics: Chapter 2: Curriculum of Mathematics., 2020. – P. 22-37. Електроний ресурс: https://www.researchgate.net/publication/344481783_Methods_of_Teaching_Modern_Mathematics_Chapter_2_Curriculum_of_Mathematics (дата зверн. 11.04.2023).
5. *Greefrath G., Vorhölter K.* Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries. In: Teaching and Learning Mathematical Modelling. ICME-13 Topical Surveys. – Springer, Cham., 2016 – 42 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
6. *Mamoona Naz* Trends and challenges in operating systems – from parallel computing to cloud computing. Concurrency Computat.: Pract. Exper. (2011). Електроний ресурс: https://www.academia.edu/2308694/Trends_and_challenges_in_operating_systems_from_parallel_computing_to_cloud_computing (дата зверн. 11.04.2023)
7. *Sabih Jamal* Operating System for Parallel Computing: Issues and Problems. 2014. Електроний ресурс: https://www.researchgate.net/publication/326177320_Operating_System_for_Parallel_Computing_Issues_and_Problems (дата зверн. 11.04.2023)

APPLICATION OF HEURISTIC APPROACHES IN TEACHING OPERATING SYSTEMS FOR PARALLELIZATION PROBLEMS

The motivation in teaching mathematical disciplines for engineering technical specialties is the possibility of applying theoretical knowledge and acquired skills in disciplines directly related to the specialty. An important aspect in this case is the use of heuristic (research approaches), which on the one hand allow students to deepen their knowledge of mathematical disciplines, and on the other hand form the competencies necessary for scientific work.

УДК 539.3

ІНТЕРАКТИВНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ ЗАКЛАДУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Тетяна Соляр, Тимофій Пасічник, Ірина Комар

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

t_solyar@ukr.net

Розглядаються підходи до трактування та класифікацій інтерактивних технологій викладання математики та механіки у вищій школі. Розкрито суть та особливості методів інтерактивної взаємодії студентської аудиторії та викладача. Проаналізовано роль інноваційних підходів до викладання в умовах як аудиторного, так і дистанційного навчання.

Зміни життя у світі сьогодні вимагають і змін мети та призначення сучасної освіти. Знижується функціональна значущість традиційної організації навчання, передача «готових» знань від викладача до слухача перестає бути основним завданням навчального процесу. Все більш актуальними стають технології взаємодії викладача зі студентом, засновані на оптимальному виборі методів навчання, реалізація яких в конкретних умовах освітньої установи дає високий рівень якості підготовки студента – майбутнього фахівця.

Сучасні методи навчання математики і механіки постійно еволюціонують залежно від потреб сучасного світу та розвитку технологій. Ці методи забезпечують найбільш активну участь студентів у навчальному процесі та дозволяють їм розуміти і застосовувати математичні закономірності у реальному житті. Вони дають можливість взаємодіяти між собою та з викладачем, обмінюватися думками, висловлювати свої ідеї і розвивати навички співпраці та комунікації. Інтерактивні технології викладання стимулюють студентів до активної участі у навчальному процесі. Інтерактивні методи викладання використовуються у будь-якому форматі навчання – від традиційних лекцій до практичних занять та інтернет-курсів. Викладач виконує координуючу та консультативну роль, а студенти виступають рівноправними суб'єктами навчання, кожен з яких може мати власну думку, яка має право на існування [1].

Мета інтерактивної взаємодії багатокомпонентна та включає такі аспекти: створення умов для залучення всіх здобувачів освіти до процесу пізнання; надання можливості кожному розуміти і рефлексувати з приводу того, що він знає і думає; створення атмосфери співпраці, взаємодії, кооперації; створення

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma12_03.pdf

комфортних умов навчання, які б викликали у кожного здобувача освіти відчуття своєї успішності, інтелектуальної спроможності, захищеності, значущості; продуктивне навчання, постійний взаємозв'язок з прикладами з життя, предметом діяльності, застосуванням отриманих знань у повсякденні [2]. Одним з таких методів є проблемне навчання, яке включає в себе використання реальних ситуацій та задач для навчання математичних концепцій та вирішення наукових проблем. Студенти працюють у групах, щоб опрацьовувати ці задачі та застосувати свої знання у подальшій практичній роботі [3].

Практико-орієнтоване навчання також є важливим серед ресурсних та оптимальних форм інтерактивної взаємодії всіх учасників освітнього процесу. Воно є основою професійної підготовки студентів у вищій школі, тому його застосування має бути однією з головних цілей педагогів. Цей метод сприяє розвитку креативності та ініціативності здобувачів освіти, підвищує їхню мотивацію до навчання та сприяє підготовці фахівців з потрібними знаннями та практичним досвідом. Основною перевагою практико-орієнтованого навчання є можливість створення прямих зв'язків між теоретичними знаннями та їх практичним застосуванням. Це дає змогу студентам бути більш компетентними у своїй професійній діяльності та готуватися до виконання реальних задач. Інноваційним і ефективним є також і використання онлайн-курсів. У галузі математики та механіки викладачі мають великий вибір дистанційних освітніх онлайн-платформ з відповідними курсами як для ознайомлення з новим матеріалом, так і для закріплення і контролю знань студентів. Такі ресурси можуть допомогти студентам зосередитися на конкретних темах та використовувати різноманітні форми навчання.

Отже, інтерактивні методи викладання є інноваційним підходом до підготовки сучасного фахівця, забезпечують найповнішу залученість студентів до навчального процесу та сприяють рівноправним можливостям для вияву власної активності, ініціативи, участі у різноманітних видах діяльності, усвідомлення власної значущості та самоцінності.

1. *Актуальні* проблеми професійної освіти: навчально-методичний посібник / укл. О.А. Дубасенюк. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2018. – 352 с.
2. *Професійна* освіта: проблеми і перспективи / ІПТО НАПН України. – Київ: ІПТО НАПН України – 2018. – Випуск 14. – 108 с.
3. *Сілаєва І.Є.* Технології навчання професії: навчально-методичний посібник. – Біла Церква: БІНПО, 2017. – 64 с.

INTERACTIVE LEARNING TECHNOLOGIES IN THE EDUCATIONAL PROCESS OF HIGH SCHOOLS

Approaches to the interpretation and classification of interactive technologies for teaching mathematics and mechanics in higher education are considered. The essence and features of the methods of interactive interaction between the student audience and the teacher are revealed. The role of innovative approaches to teaching in the conditions of both classroom and distance learning is analyzed.

УДК 519.6

ІДЕНТИФІКАЦІЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ ІНФЕКЦІЙНОГО ЗАХВОРЮВАННЯ З УРАХУВАННЯМ СОРБЦІЙНОЇ ТЕРАПІЇ ТА ДИФУЗІЙНИХ ЗБУРЕНЬ

Андрій Бомба, Сергій Барановський

Національний університет водного господарства та природокористування

abomba@ukr.net, svbaranovsky@gmail.com

Застосування адсорбційних препаратів для виведення токсинів і патогенних елементів з організму є досить давнім, поширеним та ефективним методом в медичній практиці. Терапевтична дія адсорбентів пов'язана зі здатністю поглинати та утримувати речовини з навколишнього середовища, що забезпечується пористою структурою окремих частинок адсорбентів. Зазначимо, що адсорбенти здатні поглинати і виводити з організму не лише токсини, але і вірусні елементи, що при комплексному застосуванні з іншими терапевтичними заходами підвищує ефективність лікування інфекційних захворювань. Механізм дії адсорбційних препаратів має дифузійну природу, що істотно відрізняється від механізму дії фармакологічних чи імунологічних препаратів. Ефективність такої дії залежить від внутрішньої структури, зокрема, пористості, а також від розмірів частинок адсорбенту. Тому якісне прогнозування та оптимізація динаміки інфекційного захворювання в умовах сорбційної терапії потребує, зокрема, розробки нових модифікацій відомих та добре вивчених моделей із застосуванням спеціальних підходів, які забезпечують урахування ефектів дифузійного розсіювання діючих чинників процесу в організмі та в середині частинок адсорбенту. Авторами в [1] була запропонована модифікація моделі вірусної інфекції, яка враховує вплив дифузійних збурень діючих чинників на розвиток процесу захворювання, а в [2] – узагальнення моделі противірусної імунної відповіді для комплексного урахування дифузійних збурень та різного роду зосереджених впливів, що забезпечує можливість прогнозувати динаміку вірусної інфекції в умовах ін'єкцій розчинів лікарських препаратів.

Поряд з розробкою нових модифікованих моделей вірусної інфекції з урахуванням адсорбційної терапії та дифузійних збурень не менш важливою проблемою є також ідентифікація параметрів дифузійного розсіювання діючих чинників у таких модифікаціях. З метою вирішення цієї проблеми пропонується описувати динаміку модельних компонент процесу інфекційного захворювання з урахуванням адсорбційної терапії, дифузійних збурень та зосереджених випливів, наприклад, у простій (для зручності викладок) області $G = \{(x, y, z, t):\ (x, y, z) \in \tilde{G},\ 0 < t \le T < \infty\}$ такою задачею:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma13_01.pdf

$$
\begin{gathered}
V_t'=\omega_V+\beta V-\gamma FV+\varepsilon D_V\left(V_{xx}''+V_{yy}''+V_{zz}''\right)-\delta^2 D_W^*\left(W_r'\right)\big|_{r=R},\\
W_t=\delta^2 D_W\left(W_{rr}''+2W_r'/r\right),\\
C_t'=\xi(m)\alpha F(t-\tau)V(t-\tau)-\mu_C(C-C^*)+\varepsilon^2 D_C\left(C_{xx}''+C_{yy}''+C_{zz}''\right),\\
F_t'=\omega_F+\rho C-(\mu_f+\eta\gamma V)F+\varepsilon D_F\left(F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}\right),\\
m_t'=\sigma V-\mu_m m+\varepsilon^2\left(m_{xx}+m_{yy}+m_{zz}\right),\\
V(x,y,z,\tilde t)=V^0(x,y,z,\tilde t),\ \ F(x,y,z,\tilde t)=F^0(x,y,z,\tilde t),\ \ -\tau\le\tilde t\le 0,\\
C(x,y,z,0)=C^0(x,y,z),\ \ m(x,y,z,0)=m^0(x,y,z),\ \ L\Omega\big|_{\partial\tilde G}=0,\\
W(x,y,z,r,0)=0,\ \ W_r'(x,y,z,0,t)=0,\ \ W(x,y,z,R,t)=\kappa V(x,y,z,t),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

де V, F, C, m – відповідно концентрації антигенів, антитіл, імунологічних клітин та міра ураження органу-мішені в момент часу t у точці (x,y,z) деякого обмеженого середовища $\tilde G$; W – концентрації антигенів в мікропорах частинок адсорбенту у формі кулі радіуса R; $\kappa>0$ – константа адсорбційної рівноваги; $\delta^2 D_W$ – коефіцієнт дифузійного розсіювання в мезопорах частинок сорбенту, $\delta^2 D_W^*$ – коефіцієнт, що характеризує вплив дифузійного розсіювання у мікропорах частинок адсорбенту на дифузійне розсіювання антигенів в організмі ε, δ – малі параметри; L – оператор граничних умов (I-го, II-го, чи III-го роду); $\Omega=(V,C,F,m)$. Інші параметри аналогічні до [1].

Ставиться і розвязується задача ідентифікації та оптимізації невідомих коефіцієнтів дифузійниго розсіювання при різних додаткових умовах перевизначення, наприклад, заданих густинах дифузійних потоків в деякій характерній точці, заданих значень похідних шуканих функцій у початковий момент часу ті ін.

1. *Bomba A. Ya.* Modeling small-scale spatial distributed influences on the development of infectious disease process // Mathematical Modeling and Computing. – 2020. – 7, No. 2. – P. 310–321.
2. *Baranovsky S.V., Bomba A.Ya., Lyashko S.I.* Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – **58**, No. 4. – P. 576–592.

IDENTIFICATION AND OPTIMIZATION OF INFECTIOUS DISEASE MODEL PARAMETERS TAKING INTO ACCOUNT SORPTION THERAPY AND DIFFUSION PERTURBATIONS

For the model of the dynamics of a viral infection in the conditions of adsorption therapy, an approach is proposed for the identification of diffusion scattering parameters with different types of functional dependence of diffusion coefficients and given redefinition conditions

УДК 539.4: 621.81

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК НЕРУЙНІВНИМ МЕТОДОМ КОНТРОЛЮ В ПРОЦЕСІ ЇХ ВИГОТОВЛЕННЯ

Валерій Сатокін

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля

info@yuzhnoe.com

При виготовленні циліндричних оболонок застосовують технології з різним рівнем відпрацювання, використання матеріалу, часом виготовлення, рівнем контролю геометрії, вартістю тощо. Однією з перспективних та ефективних є технологія ротаційного розкочування, яку застосовують на Державному підприємстві «КБ «Південне».

При відпрацюванні технології ротаційного розкочування циліндричних оболонок виявилось, що після загартовування оболонки в ній виникають суттєві напруження, внаслідок яких вона геометрично деформується. Постало питання пошуку шляхів усунення таких дефектів. Для цього було проведено порівняльне дослідження напружено-деформованого стану (НДС) циліндричних оболонок, виготовлених точінням і розкочуванням.

Дослідження виконано методами неруйнівного контролю. Для аналізу фізико-механічного стану виготовлених циліндричних оболонок, наявності залишкових деформацій та порівняльного аналізу точених і розкочених оболонок застосовано розроблений в ДП «КБ «Південне» у жовтні 2014 року метод галогена [1]. Цей метод неруйнівного контролю фізико-механічного стану конструкцій дає змогу в режимі реального часу візуально ідентифікувати наявність відхилень у геометрії конструкцій та наявність і рівень залишкових деформацій. Відмінністю методу галогена від інших методів неруйнівного контролю є простота використання і відсутність потреб у спеціальному обладнанні: потрібен лише телефон із камерою і світлодіодним підсвічуванням, якими обладнані всі смартфони.

На рисунку 1 показано аналіз методом галогена точеної циліндричної оболонки. Аналіз світлового сліду (виділено еліпсом) показує, що середня лінія світлового сліду є паралельною до осі циліндричної оболонки. Проведений аналіз НДС циліндричних оболонок, виготовлених точінням показав, що геометрія оболонки співпадає з фізичними напрямками властивостей матеріалу – «вздовж прокату» та «поперек прокату».

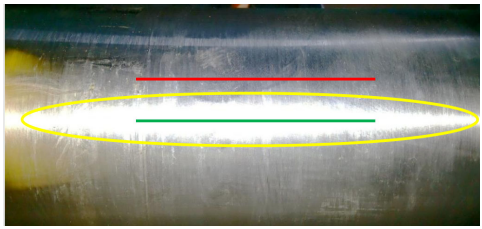


Рис. 1. Аналіз методом галогена точеної циліндричної оболонки

На рис. 2 показано аналіз методом галогена циліндричної оболонки виготовленої методом ротаційного розкочування. Аналіз світлового сліду (виділено еліпсом) показує, що середня лінія світлового сліду не є паралельною до осі циліндричної оболонки. Фінальна геометрія оболонки відрізняється від фізичних напрямків властивостей матеріалу – «вздовж прокату» та «поперек прокату», що ускладнює термічну обробку циліндричних оболонок для отримання необхідних властивостей матеріалу.

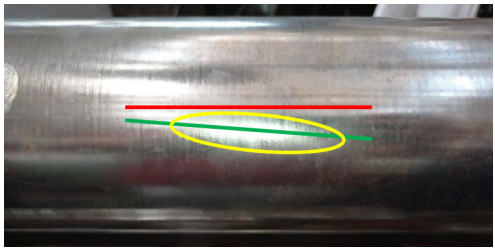


Рис. 2. Аналіз методом галогена розкатаної циліндричної оболонки

Розкочування однакову (рівну) кількість часу за годинниковою стрілкою і проти неї, або використання складного валу, половина якого обертається за, а половина проти годинникової стрілки, дає змогу мінімізувати у циліндричних оболонках скручування і вигинання після гартування.

1. *Сатокин В.В., Мусиенко П.Б.* Виртуальные испытания корпуса сопла РДТТ // Космическая техника. Ракетное Вооружение. – 2015. – № 3. – С. 46–49.

ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STAT OF CYLINDRICAL SHELLS VIA THE NON-DESTRUCTIVE CONTROL METHOD DURING THE FABRICATION

A comparative analysis by the "method halohena" of the stress-strain state of cylindrical shells processed by sharpening and rotary pinning-outs is performed. The recommendations on control of the state of cylindrical shells in the process of their making are formulated with regard to the removal of defects of making, and creation of cylindrical shells with homogeneous mechanical properties and geometry.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Авдонін Костянтин 293
Адлуцький Віктор 185
Акімов Дмитро 233
Андрейків Олександр 223
Андрійчук Михайло 237
Андрійчук Роман 209
Антоненко Ніна 35
Архипенко Костянтин 181

Б

Бабуров Володимир 221
Барабаш Галина 103
Баранов Ігор 263
Барановський Олександр 303
Барановський Сергій 444
Бардин Тетяна 109
Бартіш Михайло 239
Бедзір Олександр 153
Безугла Анна 87
Біланик Ірина 313
Білущак Юрій 275
Бобилєв Дмитро 283
Бовгира Ростислав 247
Боднар Дмитро 313
Боженко Богдан 33
Бойчук Олена 99
Бомба Андрій 444
Бондар Іванна 351
Бондаренко Віталій 417
Бондарський Олександр 97
Борачок Ігор 383
Борейко Наталія 99
Борисенко Максим 99
Бродяк Оксана 357
Будз Степан 227
Буйських Костянтин 225
Буртняк Іван 353
Бутрак Іванна 161

В

Вайсфельд Наталя 37, 77
Василишин Андрій 179
Васильків Іван 137
Васільєв Кирил 111
Величкович Андрій 192
Венгринюк Олег 63
Вербіцький Віктор 234
Вінсковська Андріана 324
Вовк Оксана 121
Возняк Ольга 347
Волчаньскі Томаш 43
Волянська Ірина 369

Г

Гарматій Галина 123, 135
Гарт Етері 271, 273
Гачкевич Микола 31, 33
Гачкевич Олександр 25, 33, 41, 43
Гентош Оксана 361
Глобчак Михайло 135
Глухов Юрій 69
Гнатик Богдан 291
Гой Тарас 419
Горечко Олександр 39
Городецька Наталія 201
Грабчак Геннадій 355
Григоренко Олександр 87, 99
Грицай Оксана 440
Грицина Мар’ян 125
Грицина Ольга 125
Грушка Ярослав 407
Гузик Надія 357
Гуменчук Орест 41

Д

Даниленко Кирило 57
Даляк Тарас 140
Дацишин Олександра 141
Демидов Олександр 151
Демидюк Мирослав 213
Деркач Олег 207
Джалюк Наталія 405
Дзьоба Ігор 63
Дзюба Анатолій 217
Дияк Іван 191

Дільний Володимир 324
Довжик Михайло 49
Долінська Ірина 223
Донцов-Загреба Тарас 426
Дробенко Богдан 108, 109, 227
Дронь Віталій 347
Дудик Михайло 145
Дунін Володимир 427
Дяченко Олександр 341
Дяченко Тетяна 221

Є

Євстигнеєв Борис 237

Ж

Жбадинський Ігор 205
Жоголева Надія 197
Жук Олександр 199
Жук Петро 235
Жук Ярослав 199
Жукова Наталія 67
Журавльова Зінаїда 37

З

Заболотний Ярослав 311
Заболоцький Тарас 289
Заводовська Надія 39
Загороднюк Андрій 299
Задворний Євгеній 225
Заіка Володимир 294
Захарчук Віктор 231
Звізло Іван 179
Звірко Ольга 63
Звягін Нікіта 223
Зеліско Галина 391
Зінчук Любов 101
Зражевська Віра 112
Зражевський Григорій 112
Зуєв Олександр 245

І

Івантишин Наталія 177
Івасюк Галина 367
Івасько Наталія 45
Івасько Роман 45
Іліка Світлана 243
Ільків Володимир 369, 373
Ірза Євгеній 119

К

Казарян Карен 115
Казмірчук Роман 231
Калиняк Богдан 123
Калоша Юлія 245
Калюх Юрій 427
Камінський Анатолій 145
Карвацький Дмитро 399
Карпінос Борис 51
Кваснюк Олексій 187
Кирилова Ольга 167
Кіндрацький Богдан 219
Кіпніс Олександр 173
Кічмаренко Ольга 382
Клименко Дмитро 108, 211, 221, 233
Кобельський Сергій 65
Ковалець Іван 426
Ковальчук Ольга 239
Козакевич Тереза 43
Козлов Володимир 101
Козярска Анна 31
Кольцов Дмитро 393
Коляда Ростислава 389
Комар Ірина 444
Коменда Наталя 215
Кононов Юрій 71, 73
Косович Ігор 253
Костробій Петро 131
Кравець Володимир 187, 189
Кравченко Олег 263
Кравчук Леонід 225
Кравчук Оксана 141
Крайнічук Галина 285
Крачилова Вікторія 234
Кривий Олександр 175, 181
Кривошия Ростислав 401
Крикун Іван 257
Кузь Антон 375
Кузьо Тарас 326
Кулик Віктор 335
Кулик Ганна 335
Кулик Костянтин 79
Кунець Ярослав 193, 209

Кураш Сергій ... 427
Курилко Олександр ... 265
Куротчин Леся ... 171
Курпа Лідія ... 194
Кутнів Мирослав ... 123
Кушнір Роман ... 25, 31, 53

Л

Лагодзінський Олександр ... 377
Ладзоришин Наталія ... 409
Латиш Андрій ... 295
Лебеденко Яна ... 267
Левченко Максим ... 185
Лелюх Юрій ... 101
Лисенко Ірина ... 415
Лінник Ганна ... 194
Ліпец Себастьян ... 63
Літвін Роман ... 219
Лобода Володимир ... 185
Ловейкін Юрій ... 327
Лоза Ігор ... 87
Лозинська Віра ... 301
Лопушанська Галина ... 380
Луценко Алла ... 386
Лянце Ганна ... 279

М

Мазурик Роман ... 79, 85, 393
Майко Наталія ... 337
Майстренко Світлана ... 426
Макаров Володимир ... 337
Макарчук Олег ... 315
Маковійчук Микола ... 140
Максимук Олександр ... 137
Максимюк Володимир ... 251
Малицька Ганна ... 353
Малоїд-Глєбова Марта ... 411
Маркович Богдан ... 89
Марущак Артем ... 440
Марченко Григорій ... 141
Марчук Михайло ... 108, 249
Маслова Юлія ... 415
Матвій Олександр ... 243
Матус Валерій ... 209
Махоркін Микола ... 149
Мединський Ігор ... 347, 349
Мельник Наталія ... 81, 115
Мельник Орест ... 389
Мисов Костянтин ... 195
Митрофанов Михайло ... 421
Михалюк Юрій ... 107
Михаськів Віктор ... 161, 205
Мікуліч Олена ... 215
Міхлін Юрій ... 267, 269
Міщенко Віктор ... 193
Моісеєнко Світлана ... 294
Моринь Стефан ... 81
Мороз Руслана ... 265
Морозов Юрій ... 175
Мусій Роман ... 81, 115
М’яус Ольга ... 380

Н

Нагірний Тарас ... 59, 229
Назаренко Володимир ... 49, 173
Назаренко Олег ... 165
Настасяк Святослав ... 223
Новосад Зоряна ... 319

О

Огородник Наталія ... 239
Онишкевич Володимир ... 103
Онишко Любов ... 187
Ориняк Ігор ... 57, 75, 79, 85, 393
Острик Володимир ... 183

П

Пакош Віра ... 249
Пасічник Галина ... 349
Пасічник Олена ... 380
Пасічник Тимофій ... 442
Пастернак Ярослав ... 53, 107, 179
Патлашинська Світлана ... 107
Перепічка Василь ... 203
Петриченко Артур ... 324
Петричкович Василь ... 405, 409
Петров Олександр ... 83
Петрук Олег ... 326
Пилявець Ігор ... 285
Пирч Назар ... 395
Піддубна Лариса ... 243
Подворний Андрій ... 97

Поліщук Олександр 429, 431
Польовий Олег 294
Пономаренко Олександр 143
Попов Всеволод 151, 167, 169
Попович Дмитро 117
Попович Роман 388
Пороховський Василь 209
Постолакі Леся 261
Працьовитий Микола 303, 305, 415
Прикарпатський Анатолій 361
Притула Зоя 277
Притула Мирослав 277
Притула Назар 277
Прокіп Володимир 389
Прокопишин Іван 191
Прокопишин Ігор 191
Процах Наталія 367
Процеров Юрій 77
Процюк Борис 133
Пукальський Іван 359
П'янило Галина 279
П'янило Ярослав 277, 279, 281

Р

Рабош Роман 193
Равський Олександр 421
Радченко Євгеній 285
Ратушняк Софія 305
Ревенко Віктор 105
Редчиць Дмитро 294
Репетило Софія 333
Решітник Юлія 145
Рижа Ірина 131
Рожок Лілія 110
Романів Андрій 413
Ромащенко Володимир 93
Рудавська Ірина 141
Рябічев Вячеслав 337

С

Савка Іван 371
Савка Степан 117
Саврук Михайло 187
Савченко Олена 207
Сад Олександр 215
Салімов Руслан 317
Сапожніков Володимир 382
Сатур Оксана 363
Сачук Юрій 137
Свірчевський Орест 223
Святенко Ярослав 73
Селютін Дмитро 423
Семенча Олексій 271
Сеник Юлія 89
Сенченков Ігор 91
Сердюк Анатолій 307, 309
Сердюк Марія 345
Середницька Христина 155, 157
Сибіль Юрій 163
Силованюк Віктор 177
Симотюк Михайло 373
Синкевич Роман 426
Сіренко Володимир 108, 217
Скакун Дмитро 401
Скородинський Ігор 255
Слободян Микола 171
Слоньовський Ярослав 373
Соболь Тетяна 201
Соколенко Ігор 307
Соляр Ольга 147, 159
Соляр Тетяна 147, 442
Сперкач Світлана 87
Станік-Беслєр Аніда 45
Стеблянко Павло 83
Степаненко Надія 335
Степанюк Тетяна 309
Стефанчук Марія 317
Стехун Анжела 165
Стойка Мирослав 417
Сторожук Євген 251
Страп Наталія 369
Стьопочкіна Марина 417
Суворова Ірина 263
Сукретна Анна 327
Сулим Георгій 53, 111, 179
Сурганова Юлія 269

Т

Тарасовська Світлана 93
Твардовська Софія 281
Терендій Ольга 440
Терлецький Ростислав 41

Терьохін Богдан 273
Ткаченко Ірина 35
Ткачук Дмитро 231
Токовий Юрій 127, 129
Толкачов Андрій 77
Тополюк Юрій 287
Торський Адріан 81
Трапезон Кирило 47
Трапезон Олександр 47
Трач Володимир 97
Третяк Тетяна 107
Трофимчук Олександр 427
Тучапський Роман 55
Тютюнник Марія 435

Ф

Феник Микола 339
Феофентов Микола 225
Філіпов Максим 177
Фратавчан Тоня 367

Х

Халецький Богдан 315
Хапко Роман 383
Харенко Світлана 251
Харченко Валерій 95
Харченко Володимир 108, 211, 212, 249
Химко Ольга 277
Хіміч Олександр 61
Хом’як Микола 108, 249
Хорошун Леонід 67
Хурцилава Костянтин 426

Ц

Цяпа Олександр 289

Ч

Чекурін Василь 91
Червінка Костянтин 59, 229
Червінко Ольга 91
Черевко Ігор 241, 243
Чернега Ірина 321
Чернишенко Іван 251
Чернуха Ольга 275
Черняков Юрій 83
Чирков Олександр 95
Чорненький Андрій 189
Чорноіван Юрій 145
Чучвара Анастасія 275

Ш

Шаваровський Богдан 397
Шацький Іван 192
Шваб’юк Володимир 231
Шевцов Микола 155
Шевчук Віктор 113
Шикула Олена 67
Широков Володимир 137
Шматко Тетяна 194
Шопа Василь 153

Щ

Щедрик Володимир 403
Щербак Тетяна 201
Щур Тетяна 241

Ю

Юдін Гліб 75
Юзв’як Микола 129

Я

Яджак Михайло 429, 438
Яшан Богдан 359

B

Baziv Nataliia 320
Boiko Dmytro 136
Buhrii Oleh 378
Buryachenko Kateryna 343

D

Dzhaliuk Nazarii 437

F

Fedorchuk Vasyl 376
Fedorchuk Volodymyr 376

H

Hnatiuk Oleksandr 365

K

Kholyavka Oksana 378
Kmit Iryna 379

Kozachenko Tetiana 259
Kravtsiv Viktoriia 322
Kuchminska Khrystyna 296
Kuduk Grzegorz 329, 331
Kyrylych Volodymyr 365

L

Leshchenko Dmytro 259

M

Martsinkiv Maria 323
Melnyk Ivanna 422
Milchenko Olha 365
Mohylyak Ivan 134
Mytrofanov Mykhailo 424

N

Nykorovych Svyatoslav 425

P

Pasichnyy Mykola 292
Pelykh Volodymyr 381
Perkowski Dariusz 136
Popovych Dmytro 134

R

Ravsky Alex 424

S

Semenyuk Serhiy 433

T

Taistra Yurii 381
Tokovyy Yuriy 136

V

Vasylyshyn Svitlana 298
Vasylyshyn Taras 325

Y

Yaselskyi Andrii 322

Z

Zahorodniuk Vasyl 325

Національна академія наук України

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики – 2023

Наукові праці

Комп'ютерна верстка та технічне редагування
Романа Івaська та Антона Кузя

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060
тел.: +380 (32) 263-83-77, **факс**: +380 (32) 263-62-70

E-mail: thermomechanics.conference@gmail.com
Web: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2023