

**МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ
МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ
СТРУКТУР**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ
СТРУКТУР**

**MATHEMATICAL PROBLEMS OF
MECHANICS OF
NONHOMOGENEOUS STRUCTURES**

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Математичні проблеми механіки неоднорідних структур

*Під загальною редакцією
академіка НАН України І.О. Луковського,
члена-кореспондента НАН України Г.С. Кіта
та члена-кореспондента НАН України Р.М. Кушніра*

Львів – 2014

Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – 412 с.

Збірник містить наукові праці, присвячені проблемам математичного моделювання в механіці деформівних твердих тіл; математичних методів механіки і термомеханіки; механіки неоднорідних твердих тіл та наномеханіки; механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями; динаміки неоднорідних середовищ; оптимізації та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем. Ці питання були обговорені на IX Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», яка проходила 15-19 вересня 2014 р. у Львові.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Редакційна колегія:

Головні редактори: акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. *І.О. Луковський*, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. *Г.С. Кіт*, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Кушнір*.

Заступники: д.ф.-м.н., проф. *О.Р. Гачкевич*, д.т.н., проф. *В.С. Попович*, д.ф.-м.н., проф. *Г.Т. Сулим*.

Відповідальні секретарі: к.ф.-м.н., ст.н.с. *В.С. Пакош*, к.ф.-м.н., доц. *І.М. Турчин*.

Члени редколегії: акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. *З.Т. Назарчук*; чл.-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. *О.Є. Андрейків*, д.т.н., проф. *В.С. Гудрамович*; д.т.н., проф. *В.В. Божидарнік*, д.ф.-м.н., проф. *О.Я. Григоренко*, д.ф.-м.н., проф. *Я.О. Жук*, д.ф.-м.н., проф. *В.Г. Карнаузов*, д.т.н., проф. *Л.В. Курпа*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Лобода*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Р.М. Мартиняк*, д.ф.-м.н., проф. *М.В. Марчук*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Михаськів*, д.т.н., проф. *В.В. Можаровський*, д.ф.-м.н., проф. *М.М. Николишин*, д.ф.-м.н., проф. *О.Г. Ніколаєв*, д.ф.-м.н., проф. *В.Г. Попов*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Б.В. Процюк*, д.ф.-м.н., проф. *М.П. Саврук*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Ю.В. Токовий*, д.ф.-м.н., проф. *В.Ф. Чекурін*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *А.В. Ясінський*.

Ухвалено до друку

Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

National Academy of Sciences of Ukraine
Національна академія наук України
Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics
Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача

Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures

Edited by
Academician of NASU I.O. Lukovs'kyi,
Corresponding Member of NASU H.S. Kit
and Corresponding Member of NASU R.M. Kushnir

Математические проблемы механики неоднородных структур

Под общей редакцией
академика НАН України І.А. Луковського,
члена-корреспондента НАН України Г.С. Кита
и члена-корреспондента НАН України Р.М. Кушнира

Lviv 2014
Львов 2014

Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures / Edited by I.O. Lukovs'kyi, H.S. Kit, R.M. Kushnir. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, 2014. – 412 p.

The collection contains scientific papers devoted to such problems: mathematical modelling in mechanics of deformable bodies, mathematical methods of mechanics and thermomechanics; mechanics of nonhomogeneous solids and nanomechanics, mechanics of contact interaction, bodies with cracks and thin inclusions; dynamics of nonhomogeneous media; optimization and design of elements of constructions and biomechanical systems. They were the subject to discussion on the IX International Conference «Mathematical Problems of Mechanics of nonhomogeneous Structures», held on 15-19 September 2014 in Lviv.

The book may be useful to scientists, to those working for a doctor's degree, post-graduate students, masters and students of corresponding specialities.

Математические проблемы механики неоднородных структур / Под общ. ред. И.А. Луковского, Г.С. Кита, Р.М. Кушнра. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2014. – 412 с.

Сборник содержит научные труды, посвященные проблемам математического моделирования в механике деформируемых твердых тел; математических методов механики и термомеханики; механики неоднородных твердых тел и наномеханики; механики контактного взаимодействия, тел с трещинами и тонкими включениями; динамики неоднородных сред; оптимизации и проектирования элементов конструкций и биомеханических систем. Эти вопросы обсуждались на IX Международной научной конференции «Математические проблемы механики неоднородных структур», которая проходила 15-19 сентября 2014 г. во Львове.

Для научных работников, докторантов, аспирантов, магистров и студентов, интересующихся соответствующими проблемами.

Editorial board

Editors-in-chief: *I.O. Lukovs'kyi, H.S. Kit, R.M. Kushnir*

Vice-editors-in-chief: *O.R. Hachkevych, V.S. Popovych, H.T. Sulym*

Executive secretaries: *V.S. Pakosh, I.M. Turchyn.*

International Editorial Board: *O.Ye. Andreykiv, V.V. Bozhydarnik, V.F. Chekurin, O.Ya. Grygorenko, V.S. Hudramovych, V.H. Karnaukhov, L.V. Kurpa, V.V. Loboda, M.V. Marchuk, R.M. Martynyak, V.V. Mozharovskii, V.V. Mykhas'kiv, Z.T. Nazarchuk, O.H. Nikolaev, M.M. Nykolyshyn, V.H. Popov, B.V. Protsyuk, M.P. Savruk, Yu.V. Tokovyi, A.V. Yasins'kyi, Ya.O. Zhuk.*

Рецензенти: *Я.М. Григоренко, д.т.н., проф., академік НАН України,
В.М. Максимович, д.ф.-м.н., проф.,
Я.Г. Савула, д.ф.-м.н., проф.*

ЗМІСТ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ
ТВЕРДИХ ТІЛ

Білуцак Юрій Пакет програм для комп'ютерного моделювання дифузії домішок у випадково неоднорідній шаруватій структурі	17
Боженко Богдан, Онишко Олексій, Хвастек Анна До питання моделювання фізико-механічного стану тіл з пам'яттю форми за термомеханічного навантаження	19
Боженко Богдан, Онишко Олексій, Станік-Беслер Аніда Моделювання та дослідження фазового і напруженого станів тіл з пам'яттю форми при мартенситних перетвореннях за наявності електричного поля	22
Вайсфельд Наталія, Журавльова Зінаїда Плоска змішана задача теорії пружності для напівнескінченної смуги	24
Вестяк Владимир, Тарлаковский Дмитрий Нестационарные функции Грина для электромагнитной толстостенной сферы	26
Власій Олеся, Чернуха Ольга Моделювання процесів гетеродифузії двома шляхами у випадково неоднорідному тришаровому тілі	29
Гачкевич Микола, Тріщ Богдан, Муліцка Івона Модель оптимізації режимів комбінованого нагріву скляних кусково-однорідних оболонок	31
Гачкевич Олександр, Ірза Євген, Можаровський Валентин Термонапружений стан виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів кусково-однорідних тіл канонічної форми за теплового навантаження ...	33
Гачкевич Олександр, Козакевич Тереза, Гаєк Максиміліан Моделювання фазового складу та напруженого стану сталевий пластини при дії рухомого розподіленого джерела тепла за регульованого теплообміну з довкіллям	35
Гачкевич Олександр, Кушнір Роман, Попович Василь Моделювання та оптимізація в термомеханіці неоднорідних тіл	37
Гачкевич Олександр, Равска-Скотнічни Анна, Чупик Ігор До моделювання напружено-деформованого стану локально нагрітої титанової обolonки обертання за врахування фазових перетворень	39
Грицина Ольга Вплив кривини на приповерхневу неоднорідність електро-механічних полів у тілах циліндричної геометрії	41
Гудрамович Вадим, Гарт Етері, Рябоконт Сергій Моделювання та дослідження впливу підкріплень прямокутних отворів на напружено-деформований стан пластини	43

Гуменчук Орест, Можаровський Валентин, Маринович Анджей Моделювання термомеханічної поведінки шаруватих тіл сферичної конфігурації зі складниками різної прозорості за теплового опромінення . . .	46
Земсков Андрей, Тарлаковский Дмитрий Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для слоя	48
Ивасько Роман, Казарян Карен, Станик-Бэслер Анида Математическое моделирование при электромагнитном способе низкотемпературной термообработки изделий из ферритовых материалов	51
Ірза Євген, Козярска Анна, Метельські Анджей До побудови моделі оптимізації теплових режимів термообробки елементів конструкцій	53
Калосров Стефан, Самодуров Андрей Решение задачи электровязкоупругости для пьезопластинок	55
Козакевич Тереза, Асташкін Володимир, Равска-Скотнічни Анна До моделювання та оптимізації залишкових фазового та напруженого станів в тонких сталевих пластинах за високотемпературного нагріву . .	57
Куреннов Сергей Упрощенная двумерная модель клеевого соединения. Новый подход	59
Кушнір Роман, Токовий Юрій Енциклопедія з температурних напружень	60
Левін Віктор, Мітраков Володимир Місцеві напружено-деформовані стани складчастих систем	62
Мазнев Александр, Бычкова Татьяна Условия существования трех линейных инвариантных соотношений в задаче о движении неавтономного гиростата	64
Марчук Михайло, Харченко Володимир, Клименко Дмитро, Хом'як Микола Математична модель та метод розрахунку шаруватих композиційних оболонок обертання з розшаруваннями	66
Можаровский Валентин, Кузьменков Дмитрий Методика, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле при заданных областях контакта и действующем давлении	68
Моїсєєнко Ігор, Сторожев Валерій Аналітико-числовий аналіз проблеми поширення пружних хвиль вздовж виготовлених з низькосиметричних кристалів циліндрів гладких криволінійних перерізів	71
Мусій Роман, Стасюк Галина, Тарлаковский Дмитрий Моделювання та дослідження термонапруженого стану електропровідного шару за дії гармонічного за поперечною координатою електромагнітного поля в режимі з імпульсним модульним сигналом	73
Мусій Роман, Стасюк Галина, Шимчак Юзеф Математичне моделювання термомеханічної поведінки електропровідного шару за неоднорідної нестационарної електромагнітної дії	75

Нагірний Тарас, Сенік Юлія Дослідження структурної та приповерхневої неоднорідностей у електропровідному півпросторі	78
Нагірний Тарас, Червінка Костянтин Моделювання геометричної неоднорідності поверхні за локально градієнтного підходу	80
Немировский Юрий, Федорова Наталия Эффективные криволинейные структуры армирования термоупругих плоских конструкций	82
Процюк Борис, Синюта Володимир Вплив тепловіддачі на температурне поле двошарового циліндра, зумовлене рухомим нормально розподіленим джерелом тепла	86
Ревенко Віктор Визначення розподілу напружень на лінії з'єднання двох прямокутних пластин	88
Солодяк Михайло, Тарлаковский Дмитро, Гасвська Любов, Казарян Карен До опису фізико-механічних полів у електропровідних феромагнітних тілах за дії квазіусталених електромагнітних полів	90
Терлецький Ростислав, Турій Оксана, Брухаль Мар'ян Моделювання напруженого стану в системі шарів різної прозорості за теплового опромінення	92
Терлецький Ростислав, Турій Оксана, Гаєк Максиміліан Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваної багатошарової пластини за з'єднання складових шарів частково прозорими прошарками	94
Турчин Ігор, Хома Василь Нестационарний торцьовий розігрів півсмуги з покриттям	96
Тучапський Роман Про один підхід до чисельного розв'язування деяких задач узагальненої теорії нетонких анізотропних пружних оболонок	98
Хом'як Микола, Хом'як Леонід Моделювання напружено-деформованого стану автохтону з урахуванням швидкості насування та повзкості	99
Чернуха Ольга, Гончарук Володимир, Давидок Анастасія Моделювання процесів термодифузії з урахуванням розпаду частинок у випадково неоднорідній шаруватій смузі	102
Чупик Ігор, Муліцка Івона До врахування поліморфних перетворень і релаксаційних явищ при моделюванні напруженого стану титанової обolonки обертання за локального нагріву	104
Rushchitsky Jeremiah Auxetic materials: necessity of refining the foundations of classical theory of elasticity	106
Savruk Mykhaylo, Kazberuk Andrzej Solution of the eigenvalue problems of the plane elasticity theory for orthotropic and quasi-orthotropic wedges	107
Tokovyy Yuriy, Lozynskyy Yuriy, Aizikovitch Sergey, Ma Chien-Ching Solution of mixed boundary-value problems of elasticity and thermoelasticity for anisotropic inhomogeneous solids	109

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ І ТЕРМОМЕХАНІКИ

Дробенко Богдан, Будз Степан, Асташкін Володимир Просторовий напружено-деформований стан елементів діючого енергетичного обладнання	112
Дробенко Богдан, Бурик Олександр Залишкові напруження в елементах будівельних конструкцій після пожежі	113
Карнаухов Василь, Козлов Володимир, Киричок Іван Вплив температури дисипативного розігріву на вимушені коливання непружних тіл	115
Луковський Іван Тензорне формулювання крайових задач нелінійної теорії коливань рідини в нахилених циліндричних резервуарах	118
Малець Романна, Шинкаренко Георгій Постановка і розв'язуваність варіаційної задачі термopужних тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення	124
Махоркін Ігор, Мاستикаш Любов Застосування імпульсних функцій до розв'язування центрально-симетричних квазістатичних задач термopужності термочутливих тіл	126
Можаровский Валентин, Кузьменков Дмитрий, Марьяна Наталия Разработка инженерных методов расчета слоистых трибологических систем из композиционных материалов с учетом функционально-градиентных и термочувствительных свойств	128
Ніколаєв Олексій, Танчік Євген Модель напружено-деформівного стану односпрямованого волокнистого композиту	130
Ніколаєв Олексій, Танчік Євген Неосесиметричний пружний стан простору з витягнутими сфероїдальними порожнинами	132
Пастернак Ярослав, Пастернак Роман, Сулим Георгій Метод конформних відображень у побудові інтегральних рівнянь та фундаментальних розв'язків плоских задач термоелектропружності	134
Петров Олександр, Черняков Юрій, Стебляно Павло Методи розв'язання нестационарних задач для складових пластин	135
Поліщук Олександр Метод ітерацій по підобластям чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь теорії потенціалу	137
Поліщук Олександр Про виділення особливостей в інтегральних рівняннях для потенціалів простого та подвійного шару	140
Попович Василь, Вовк Оксана Дослідження термopужного стану контактуючих півпросторів з миттєвими тепловиділеннями на межі дотику	142
Процюк Борис Інтегро-алгебричні рівняння одновимірних задач термopужності для кусково-неоднорідних циліндричних тіл	146

Процюк Борис, Горун Олег Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла	148
П'янило Ярослав, Васюник Марія, Васюник Іван Аналіз деяких методів розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом	150
П'янило Ярослав, Твардовська Софія, Лопух Назар Використання дробових похідних за часом для дослідження хвильових процесів у пористих тілах	152
Ракоча Ірина, Попович Василь Математичне моделювання та визначення термopружного стану кусково-однорідного за осьюовою координатою термочутливого циліндра за складного нагрівання	153
Стасюк Богдан Експериментальне та теоретичне визначення ефективних модулів пружності фібробетону	156
Сулим Георгій, Галазюк Віталій, Попіль Оксана Центральносиметрична задача термopружності для необмеженого тіла при заданому початковому розподілі температури у сферичній області	159
Сухорольський Михайло Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца . . .	160
Фесенко Ганна Мішана задача теорії пружності для шару за дії внутрішньої зосередженої сили	163
Чекурін Василь, Бойчук Юрій Ітераційний метод розв'язування нелінійних задач кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі . .	165
Чекурін Василь, Васьо Наталія Визначальні співвідношення методу фотопружних покривів для неруйнівного визначення напружень у твердих тілах	167
Чиж Анатолій Система рівнянь теплопровідності для циліндричної оболонки	169
Шевчук Віктор Вплив нестационарного нагрівання на температурне поле пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям	171
Шевчук Віктор, Гаврись Олександр, Шевчук Павло Визначення температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання	173
Щербакова Юнна Порівняльний аналіз НДС у двошарових трансверсально ізотропних тілах з різними пружними властивостями	175

МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ ТА НАНОМЕХАНІКА

Азізов Талаят, Вільданова Надія Значення нелінійних деформаційних характеристик бетону при просторовому розрахунку конструкцій	177
---	-----

Дзюба Анатолій, Лотохова Олена, Прокопало Євген Вплив напрямку ор- тотропії матеріалу на стійкість циліндричних оболонок	179
Калиняк Богдан Забезпечення нульових радіальних термонапружень у не- однорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характе- ристик матеріалу	181
Николишин Мирон, Дзюбик Андрій, Базилевич Любов Визначення за- лишкових напружень в околі кільцевого зварного шва у промислових резервуарах циліндричної форми з плоским днищем	184
Савельєва Екатерина, Синчило Сергей, Симчук Ярослав Кубически не- линейные поперечные плоские волны в нанокompозитных материалах	186
Сеньків Леся Визначення напруженого стану у зоні зварного спірального шва у магістральних трубопроводах	188
Токова Людмила, Ясінський Анатолій Вплив на напружений стан багато- шарового термочутливого циліндра зміни термомеханічних властивос- тей шарів на поверхнях їх поділу	190
Трач Володимир, Подворний Андрій Стійкість циліндричних анізотроп- них оболонок при крученні в тривимірній постановці	191
Турчин Ігор, Колодій Юрій Осесиметричні квазістатичні напруження в плиті з покриттям при змішаних умовах нагрівання	194
Чекурін Василь, Постолак Леся Математична модель для неруйнівного магнітопружного методу визначення залишкових зварювальних на- пружень у трубопроводі	196
Швець Роман, Яцків Олесь, Бобик Богдан Ідентифікація набору теплофі- зичних параметрів у валах з тонким приповерхневим шаром	198

ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Босяков Сергей, Мселати Абдуфтах Фрхат Моделирование винтовой оси при начальных перемещениях корня зуба в линейно упругой перио- донтальной связке	200
Демидюк Мирослав, Литвин Богдан Параметрична оптимізація біотехніч- ної системи “Людина – екзоскелетон”	202
Дзюбик Людмила Рівновага випалювального матеріалу в корпусі оберто- вого агрегату	204
Дробенко Богдан, Будз Степан, Асташкін Володимир Структурна складо- ва напружень у скляних тілах за неперервного охолодження	206
Лохов Валерий, Няшин Юрий, Тропин Василий Моделирование и управ- ление ростовыми деформациями в живых системах	208

Немировский Юрий Равнопрочные по Треска гибридные диски газовых турбин	210
Няшин Юрий, Лохов Валерий Исследование влияния патологий зубочелюстной системы на мозговое кровообращение	214
Попадюк Ігор, Шацький Іван, Шопа Василь, Величкович Андрій Оптимізація оболонкових віброзахисних пристроїв за критерієм максимального поглинання енергії зовнішніх впливів	216
Сафронова Інга Дослідження поведінки гнучких пружних оболонкових елементів конструкцій	218
Сенченков Ігор, Червінко Ольга, Якименко Сергій Оцінка довговічності циліндричних тіл при багатошаровому наплавленні і подальшому циклічному термомеханічному навантаженні	219
Яджак Михайло Застосування сучасних засобів виконання високопродуктивних обчислень для розв'язання алгоритмічно складних задач	221
Янковский Андрей Оптимальное пространственное армирование композитного упругого тела по критерию интегральной податливости при фиксированном расходе фазовых материалов	224
Ясінський Анатолій, Єрохова Ольга Оптимізація нестационарних температурних напружень у заданому перерізі півпростору, що перебуває в стані плоскої деформації	227
Lytwyn Bohdan, Demydyuk Myroslav, Berbyuk Victor Calculation of dynamical characteristics of human gait with below-knee prosthesis	229

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Андрейків Олександр, Кухар Володимир, Яворська Надія Розрахункова модель росту тріщин високотемпературної повзучості в тонкостінних елементах конструкцій за нейтронного опромінення	232
Андрійчук Роман, Кіт Григорій Напружений стан півпростору з защемленою межею за тепловиділення у паралельній до неї круговій області ..	234
Антоненко Ніна Контактна задача про скрут двошарової основи з пружними зв'язками між шарами	237
Афанасьева Ольга, Тарлаковский Дмитрий, Федотенков Григорий Пространственная нестационарная контактная задача для двух сферических оболочек	239
Бедрій Василь Двовісний згин ізотропної пластини з криволінійним отвором і наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням контакту її берегів	242

Белова Ольга, Дзюба Анатолій Вплив пошкодження контура квадратного отвору на величину критичного навантаження циліндричної оболонки	244
Васюта Ростислав Кручення циліндричного зразка з осесиметричним U-подібним вирізом	246
Гуртовий Олексій, Жук Дмитро Дослідження умов спряження в уточненому аналізі згину ортотропної балки з обмеженою повздовжньою тріщиною	248
Гуртовий Олексій, Тинчук Сергій Дослідження впливу розшарувань на напружено-деформований стан плит на жорсткій основі	251
Діхтяренко Юлія, Дякон Валерій Вплив пластичності матеріалів на умови зрушення тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу двох середовищ	253
Дудик Михайло, Кіпніс Леонід Контакт берегів міжфазної тріщини за наявності бічної зони передруйнування	255
Дудик Михайло, Феньків Володимир, Хазін Геннадій Напружено-деформований стан біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина	256
Івантишин Наталія, Ліснічук Андрій Вплив включень на втомну міцність структурно неоднорідних матеріалів	257
Івасько Наталія, Кіт Григорій Плоска деформація півбезмежного тіла з тепловиділенням у паралельній до його межі стрічковій області	259
Камінський Анатолій, Кіпніс Леонід, Поліщук Тетяна, Хазін Геннадій Про концентрацію напружень біля кінців тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ	261
Козачок Олег, Чумак Костянтин, Слободян Богдан Контакт текстурованих тіл з урахуванням різних видів адгезійної взаємодії поверхонь міжконтактних зазорів	263
Кравець Володимир, Осів Ярема Визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у двовимірному тілі з криволінійною тріщиною за імпульсного навантаження	265
Крива Надія, Бойко Андрій Пластичне відшаровування півбезмежного включення скінченної ширини за умов неідеального контакту	268
Кривий Олександр Про один критерій руйнування кусково-однорідних трансверсально-ізотропних тіл із міжфазними дефектами	271
Кузь Ігор, Кузь Ольга, Пиз Назарій Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з двома перпендикулярно розташованими розрізами з урахуванням зміцнення та розвантаження	273
Лещук Олександр, Євдокимов Іван Чисельне моделювання росту тріщин в кераміці на основі карбіду бору	275

Маковійчук Микола Про згин пластини з частково залікованою тріщиною на пружній основі	277
Максимович Олесь, Божидарнік Віктор Напруження біля системи крайових тріщин у анізотропній пластинці з отвором	278
Максимук Олександр, Сачук Юрій Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу	281
Николишин Мирон, Махоркін Микола Зведення задачі про напружений стан циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною під дією змінного в часі навантаження до системи сингулярних інтегральних рівнянь ..	283
Николишин Мирон, Опанасович Віктор, Куротчин Леся Напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з міжфазною ненаскрізною тріщиною за наявності пластичних зон	286
Онишкевич Володимир, Сулим Георгій Теплопередача через жорстке тіло в пружну півплощину	288
Опанасович Віктор, Звізло Іван, Слободян Микола Двовісний згин пластини з пружною круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів	290
Опанасович Віктор, Слободян Микола Згин ізотропної пластини з двома рівними співвісними наскрізними тріщинами з урахуванням ширини області контакту їх берегів та за наявності пластичних зон у їх вершинах	292
Острик Володимир Закрита півнескінченна тріщина на межі пружної смуги і жорсткої стінки	294
Прокопишин Ігор Числове дослідження контакту пружних тіл з урахуванням поверхневих вінклерівських шарів та кулонівського тертя	296
Реут Віктор, Роговський Станіслав Тріщина в нерозрізній смуговидній пластині	298
Рудавський Денис, Бас Віктор Кінетика росту поверхневої втомної тріщини в кільці буксового підшипника	300
Саврук Михайло, Чорненко Андрій Періодична система криволінійних тріщин в квазіортотропній площині	303
Середницька Христина, Мартиняк Ростислав Ефективний міжфазний термоопір біматеріалу з регулярною системою тріщин на поверхні розмежування	306
Сибіль Юрій Чисельне моделювання стаціонарних температурних полів в тривимірних тілах з теплопроникними тріщинами	308
Силованюк Віктор, Юхим Роман, Ліснічук Андрій Модель зародження втомної тріщини у матеріалі в околі включення	310

Скальський Валентин, Почапський Євген, Клим Богдан, Сімакович Олександр Знаходження координат джерела акустичної емісії на поверхні тонкостінної сфери	313
Скородинський Ігор, Максимук Олександр Реакція в'язкопружного шару, зчепленого з жорсткою основою, на дію нормального розподіленого навантаження	315
Сулим Георгій, Опанасович Віктор, Яцик Ігор Згин пластини Рейсснера з двома паралельними незсунутими наскрізними однаковими тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів	317
Сулим Георгій, Пастернак Ярослав, Томашівський Михайло Термопружність анізотропного півпростору із тріщинами та тонкими включеннями	320
Черняков Юрій, Шевельова Алла, Шевченко А. Смуга локалізації пластичної деформації в однорідному матеріалі та на інтерфейсі між двома матеріалами	321
Farukh F., Zhao L.G., Jiang R., Reed P., Proppentner D., Shollock B. XFEM-based prediction of fatigue crack growth for a nickel superalloy at elevated temperature	324
Viun O., Labesse-Jied F., Loboda V., Lapusta Y. Pre-fracture zones for a limited permeable crack in an interlayer between magneto-electro-elastic materials	326

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

Барняк Михайло, Луковський Іван Визначення динамічних характеристик капілярної рідини в рухомому циліндрі	329
Бутрак Іванна Динамічні КІН поблизу пологого тонкостінного включення у полі гармонічної пружної хвилі	331
Бутрак Іванна, Жбординський Ігор, Михаськів Віктор Динамічні напруження за падіння гармонічної пружної хвилі на двоперіодичний масив податливих дискових включень	333
Васюник Зоряна Дослідження характеру збудження неоднорідних структур в системах реакції-дифузії	335
Глухов Юрій Про одну динамічну задачу для шаруватого півпростору з початковими напруженнями	337
Горячко Тарас, Лесик Оксана, Пакош Віра, Якімов Федір Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених композитних циліндричних панелей	339

Григоренко Александр, Лоза Игорь Кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в полых неоднородных цилиндрах	341
Жук Ярослав Врахування мікроструктурних перетворень в матеріалі в задачі про термічне імпульсне опромінення півпростору	343
Іванків Катерина Дифузійна нестійкість та числовий аналіз нелінійної трикомпонентної системи типу реакція-дифузія	345
Кирилова Ольга Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з жорстким включенням при коливаннях в умовах плоскої деформації	350
Кравчишин Оксана, Чекурін Василь Моделювання взаємодії пружних хвиль із пористим газо- та водонасиченим шаром	352
Крутій Юрій Вимушені поперечні коливання прямого стержня постійного перерізу з урахуванням сил опору при гармонічному навантаженні ..	354
Кунець Ярослав, Матус Валерій, Міщенко Віктор, Пороховський Василь Взаємодія SH-хвилі із пружним включенням за наявності тонкостінного міжфазного дефекту низької жорсткості	356
Кунець Ярослав, Матус Валерій, Рабош Роман Ефекти розсіювання імпульсів SH-хвиль тонким п'єзоелектричним включенням	358
Куриляк Дозислав, Лисечко Віктор Розсіювання плоскої звукової хвилі на скінченному м'якому (жорсткому) конусі	359
Курпа Лідія, Тимченко Галина Исследования геометрически нелинейных колебаний многослойных пластин сложной формы со слоями различной толщины	361
Курпа Лідія, Шматко Тетяна Нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною формою плану	363
Лаушник Ігор, Михаськів Віктор, Слободенюк Тетяна Особливості ковзного динамічного контакту матриці та сферичного включення	366
Марчук Михайло, Пакош Віра, Харченко Володимир Вільні коливання шаруватих композитних пластин-смуг за дискретного розгляду податливих до трансверсальних зсуву та стиснення складових	368
Назарчук Зіновій, Войтко Мирон, Куриляк Дозислав Про вплив імпедансу дефекту з'єднання на характеристики резонансного розсіювання пружної SH-хвилі	370
Николишин Мирон, Дівесв Богдан, Глобчак Михайло, Тарасюк Уляна Моделювання звукопоглинаючих властивостей шаруватих пластин з використанням теорії Тимошенка	373

Носок Віталій, Сторожев Валерій Аналіз крайового резонансу при збудженні трипарціальних антисиметричних хвиль біля краю ортотропного півшару з гнучким нерозтяжним покриттям граней	375
Оксенчук Ніна, Сенченков Ігор, Доля Олена Порівняння лінійного і нелінійного правил сумішей при визначенні непружних характеристик багатофазних матеріалів в динамічних задачах	377
Онишко Любов, Осечко Анатолій Пружне кільце під дією параболічно розподілених динамічних зусиль	379
Осетров Андрій Визначення власних частот та форм коливань перфорованих пологих оболонок та пластин методом R-функцій з використанням сплайн-апроксимації	382
Перепічка Василь Динаміка пружного стержня з зовнішнім в'язкопластичним опором при ударних навантаженнях	384
Попов Всеволод Розв'язання динамічної контактної задачі, що зводиться до сингулярного інтегрального рівняння з двома нерухомими особливостями	385
Питула Назар Оптимізація усталених режимів транспортування газу ..	387
Сердюченко Анатолій Розв'язки у збуреннях крайових задач про власні коливання балок і пластин з довільними граничними умовами	389
Соляр Тетяна Визначення напруженого стану у шаруватих кільцевих пластинках під динамічним навантаженням	391
Топільницький Володимир, Велика Оксана, Ляковська Соломія, Кусий Ярослав Дослідження динамічних процесів у нелінійних дискретно-неперервних механічних системах оброблення і транспортування	393
Хотенко Олена Числовий аналіз квадратично нелінійної хвилі Релея ...	396
Шопа Тетяна Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множинними отворів та включень довільної конфігурації	398
Datsko Bohdan, Podlubny Igor, Meleshko Vitaliy Running auto-waves in fractional order dissipative systems	400
Diveyev Bohdan, Martyn Yevhen, Cherchyk Gennadij, Dorosh Ihor Constructions dynamic parameters identification by means of elastically attached masses	402
Meleshko Vitaliy, Prytula Zoya, Datsko Bohdan Mathematical modelling of nonlinear dynamics in brusselator model with super-diffusion	404
Алфавітний покажчик	407

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

УДК 517.958:532.72

ПАКЕТ ПРОГРАМ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЇ ДОМІШОК У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ ШАРУВАТІЙ СТРУКТУРІ

Юрій Білушак

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна*

Розробка ефективних підходів до математичного моделювання процесів масоперенесення у багатофазних шаруватих структурах за випадкового розташування фаз, розвиток методів розв'язування відповідних стохастичних контактних-крайових задач та побудова алгоритмів для кількісного дослідження згаданих процесів відноситься до актуальних питань математичного моделювання. На цій основі базується прогнозування процесів масоперенесення домішкових атомів в тілах шаруватої структури таких як біметалічні композити, наприклад мідь-вольфрам або залізо-хром для забезпечення високої електропровідності при високих температурах експлуатації в елементах залізо-бетонних конструкцій, об'єктах природного середовища тощо.

Для розв'язання контактних-крайових задач дифузії домішкових частинок в тілах стохастичної шаруватої структури розроблено підхід, який базується на зведенні контактної задачі дифузії до еквівалентного рівняння масоперенесення в усьому тілі, отриманні розв'язку інтегро-диференціального рівняння методом послідовних наближень та усередненні його за ансамблем конфігурацій фаз. Отримано оцінку для суми залишкових членів ряду Неймана. Для числового дослідження усередненої концентрації домішки в шаруватих структурах розроблений програмний комплекс, який використовує методи числового інтегрування подвійних інтегралів у квадратурах Ньютона-Котеса, трапецій і прямокутників тощо.

Програмний засіб «Ro-cons» призначений для кількісного і якісного аналізу усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації частинок, що мігрують у двофазних стохастично неоднорідних шаруватих тілах, і визначення дисперсії та функції кореляції поля концентрації, знаходження порівняльних розподілів усередне-

ної концентрації та других моментів поля концентрації залежно від різних значень характеристик середовища.

Розроблений комплекс програм «Ro-conc» реалізовано на мові Pascal в середовищі Delphi XE2 Starter Edition. Пакет надається одним файлом Ro-conc_installation.exe, розмір якого складає 2,76 Мб. Результатом роботи програми є розрахунок і виведення результатів в табличному вигляді, а також побудова порівняльних графіків отриманих результатів і розрахунок 3-D поверхонь дисперсії та функції кореляції поля.

На рис. 1 проілюстровано форму для розрахунку усередненого поля концентрації H в різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0.001; 0.005; 0.01; 0.05; 0.1; 0.5; 0.75$ для $v_{Ni} = 0.2$ в композитному матеріалі $\alpha Fe - Ni$ з характерною товщиною нікелевих прошарків $\bar{h}_{Ni} = 0.001$.

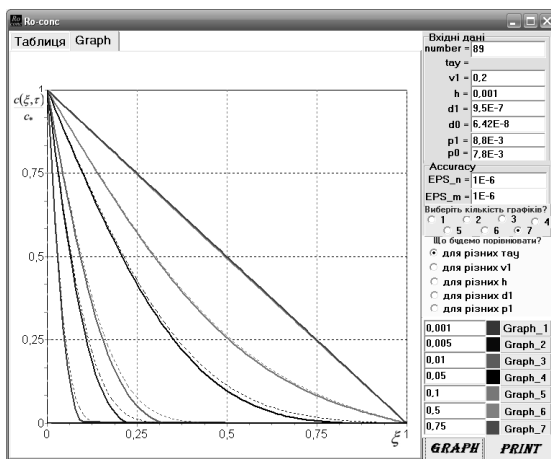


Рис. 1 Приклад роботи модуля пакету для обчислення усередненої концентрації H в шаруватій структурі $\alpha Fe - Ni$

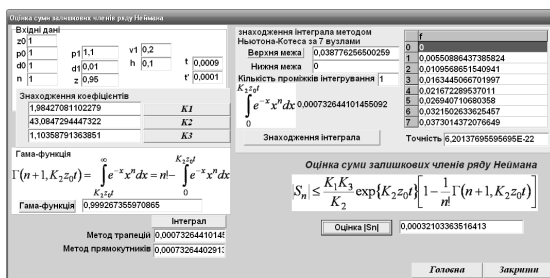


Рис. 2 Кінцевий результат роботи модуля пакету “Оцінка суми залишкових членів ряду Неймана”

Модуль програми для оцінки суми залишкових членів ряду Неймана, у вигляді якого знайдено розв'язки, розроблено для роботи в інтерактивному режимі. Форма його подана на рис. 2.

Верифікація розробленого пакету програм «Ro-conc» проведена на комп'ютерному моделюванні насичення H шаруватих структур $\alpha Fe - Ni$ і $Fe - Cu$ та зміцненні поверхні такого шаруватого композиту як $\alpha Fe - Ni$ насиченням атомами вуглецю.

SOFTWARE FOR SIMULATION OF ADMIXTURE DIFFUSION IN RANDOMLY NONHOMOGENEOUS STRATIFIED STRUCTURE

Software is designed for study admixture diffusion processes in two-phase stratified bodies with randomly disposed inclusions by the uniform, gamma-, exponential, erlangian and χ^2 -distributions. It takes an opportunity of finding an estimation of sum of remainder terms of Neumann series as well as quantitative characteristics of the second moments of admixture concentration fields.

УДК 539.3:536.424

ДО ПИТАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНОГО СТАНУ ТІЛ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ ЗА ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Богдан Боженко, Олексій Онишко, Анна Хвастек

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополь, 45036, Польща;*

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна*

Поширене використання в окремих галузях науки і техніки (зокрема, в медицині та космічних дослідженнях) сплавів з пам'яттю форми, в яких в певних діапазонах температур можуть відбуватися мартенситні перетворення, викликає потребу побудови математичної моделі для опису фазового та напруженого станів елементів конструкцій, виготовлених з таких матеріалів (що, як правило, експлуатуються в умовах складних теплових та механічних навантажень) з використанням сучасного математичного апарату, зокрема теорії розмитих множин.

Основні положення такої моделі сформульовані в роботах [2, 3]. В загальному випадку приймається, що в будь-який момент часу тіло складається з областей $V_1, V_2, \dots, V_5$. В області V_1 є лише аустенітна фаза ($\Xi = 0$), у V_2 аустеніт перетворюється в мартенсит ($\delta\Xi > 0$), у V_3 є тільки мартенсит ($\Xi = 1$), у V_4 проходить обернене перетворення ($\delta\Xi < 0$), в області V_5 матеріал характеризується певним незмінним у часі фазовим розподілом ($\Xi = \Xi^* = \text{const}$, $\delta\Xi = 0$).

Узагальнене рівняння Гібса і рівняння стану, сформульовані для розширеного простору параметрів стану, описують множину можливих (допустимих) станів. Фізично реалізований стан при фіксованих значеннях деформацій і температури визначається умовою мінімуму вільної енергії F відносно ступеня повноти мартенситного перетворення Ξ [1]. З цієї умови випливає, що в областях протікання фазового перетворення V_2 і V_4 виконується залежність

$$\partial F / \partial \Xi = 0. \quad (1)$$

Для встановлення умов протікання прямого мартенситного перетворення введемо функцію навантаження $f^M = f^M(\Xi, T, e, e_i)$, яка в області V_2 утворення мартенситу задовольняє умову

$$f^M(\Xi, T, e, e_i) = -K_{\xi}^M(\Xi - \Xi_0) - K_{t\xi}^M(T - T_0) + K\beta^M e / \rho + G\beta'^M e_i / \rho = 0, \quad (2)$$

а в тій частині тіла, де перетворення не відбувається – $f^M < 0$.

Якщо в певному термодинамічному стані виконується умова (2), то при нескінченно малому відхиленні від нього можливі такі випадки:

1. Мартенситне перетворення відбувається: $\Xi < 1$, $\delta\Xi > 0$, $f^M + \delta f^M = 0$. Звідси випливає, що

$$\delta f^M = -K_{\xi}^M \delta\Xi - K_{t\xi}^M \delta T + K\beta^M \delta e / \rho + G\beta'^M \delta e_i / \rho = 0. \quad (3)$$

Крім того, враховуючи, що $\delta\Xi > 0$, і поклавши $K_{\xi}^M > 0$, отримаємо

$$\delta f'^M = -K_{t\xi}^M \delta T + K\beta^M \delta e / \rho + G\beta'^M \delta e_i / \rho > 0. \quad (4)$$

2. Мартенситне перетворення не відбувається: – $\delta\Xi = 0$. Як наслідок – $\delta f^M < 0$. Легко бачити, що в цьому випадку δf^M збігається з $\delta f'^M$ так, що виконується умова $\delta f'^M < 0$.

Для опису переходу мартенситу в аустеніт (оберненого перетворення) введемо функцію навантаження

$$f^A(\Xi, T, e, e_i) = -K_{\xi}^A(\Xi - \Xi_0) - K_{t\xi}^A(T - T_0) + K\beta^A e / \rho + G\beta'^A e_i / \rho. \quad (5)$$

Аналогічно, як для прямого перетворення, вважаємо, що в області V_4 , де відбувається перетворення мартенситу в аустеніт, виконується умова $f^A(\Xi, T, e, e_i) = 0$, а там, де відсутні умови для такого перетворення – $f^A > 0$. При цьому достатні умови перетворення формулюються подібно, як у попередньому випадку.

Таким чином, необхідні й достатні умови, які визначають належність точки тіла до певної характеристичної області фазового стану, мають вигляд

$$\begin{aligned} V_1 : \Xi = 0, \delta\Xi = 0, f^M < 0, \delta f^M = \delta f'^M < 0; \\ V_2 : \Xi < 1, \delta\Xi > 0, f^M = 0, \delta f^M = 0, \delta f'^M > 0; \\ V_3 : \Xi = 1, \delta\Xi = 0, f^A > 0, \delta f^A = \delta f'^A > 0; \\ V_4 : \Xi > 0, \delta\Xi < 0, f^A = 0, \delta f^A = 0, \delta f'^A < 0; \\ V_5 : \Xi = \Xi^*, 0 < \Xi^* < 1, \delta\Xi = 0, f^M < 0, \delta f^M = \delta f'^M < 0, \\ f^A > 0, \delta f^A = \delta f'^A > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Зазначимо, що врахування зв'язку характеристик зміни форми тіла (інтенсивності напружень і деформацій) та параметрів мартенситного перетворення в ньому, запропоноване в даній моделі, дозволяє повніше описати наявну в тілах з пам'яттю форми специфіку термомеханічних та структурних процесів.

1. Асташкін В.І., Будз С.Ф., Онишко О.Є. Кількісний опис фізико-механічних процесів у матеріалах з пам'яттю форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – № 4. – С. 60-66.
2. Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б. Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 14-17.
3. Онишко О., Боженко Б., Новацький В. Моделювання термомеханічних явищ в матеріалах з пам'яттю форми // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Матер. VI Міжнар. наук. конф. (Львів, 26-29. 05. 2003). – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2003. – С. 71-73.

FOR QUESTION THE MODELING OF PHYSICAL-MECHANICAL STATE OF SOLIDS WITH SHAPE MEMORY UNDER THERMOMECHANICAL LOADING

For a mathematical model of quantitative description of a thermomechanical behavior of shape memory alloys the necessary and sufficient conditions for direct and reverse phase transformations are formulated.

УДК 539.3:536.424

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ФАЗОВОГО І
НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ ТІЛ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ ПРИ
МАРТЕНСИТНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ ЗА НАЯВНОСТІ
ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ**

Богдан Боженко, Олексій Онишко, Аніда Станік-Беслер

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополе, 45036, Польща;*

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна*

В даний час в багатьох областях науки і техніки знаходять застосування сплави з пам'яттю форми, в яких в певному температурному інтервалі за дії теплового і механічного навантаження відбувається твердофазне структурне перетворення. Зокрема, вони успішно використовуються в медицині, а саме у фіксаторах при лікуванні переломів. Як ефективний засіб отримання потрібних деформацій, зумовлених нагрівом, зручно використовувати електричне поле [5]. При цьому за такого нагріву виникає ряд нових ефектів в елементах зі сплавів з пам'яттю форми, які (зокрема, в мартенситній фазі) виявляють магнітні властивості [4]. Тому актуальним є питання моделювання та дослідження фазового і напруженого станів тіл з пам'яттю форми при мартенситних перетвореннях за наявності електричного поля.

В роботі [2] на основі проведених раніше розробок [1, 3] запропоновано модель для кількісного опису термомеханічної поведінки твердих тіл, виготовлених зі сплавів з пам'яттю форми, в області мартенситного перетворення (як прямого, так і оберненого) при силовому і температурному навантаженні з врахуванням дії електричного поля, побудовану з використанням методів механіки суцільного середовища та термодинаміки нерівноважних процесів за врахування електричного стану відповідної термодинамічної системи. В основу термодинамічного опису системи покладено гіпотезу локальної термодинамічної рівноваги. За параметри стану, що відображають теплові процеси, вибрано абсолютну температуру T та питому ентропію S . Мартенситне перетворення характеризується відносним вмістом мартенситу Ξ та питомою спорідненістю перетворення A . Механічні впливи, пов'язані із зміною об'єму, враховуються через

інваріанти тензора напружень σ і тензора деформацій e ; механічні впливи, пов'язані із зміною форми тіла – відповідно через інваріанти σ_i та e_i [1]. За параметри стану, що відповідають процесу електропровідності, вибрано електричний потенціал Φ та електричний заряд одиниці маси ω [3]. За функцію термодинамічного стану вибрана вільна енергія $F = F(e, e_i, T, \Xi, \Phi)$. Записане узагальнене рівняння Гібса для областей тіла, в яких відбувається фазове перетворення, та одержана система рівнянь стану моделі.

В даній роботі на цій основі з допомогою відомої методики [1, 3] з використанням балансових співвідношень, рівнянь стану, співвідношень Коші та рівнянь Максвелла одержана наступна система диференціальних рівнянь моделі для областей протікання фазового перетворення відносно розв'язуючих функцій – вектора переміщень $\mathbf{u}$, температури T , відносного вмісту мартенситу Ξ та електричного потенціалу Φ :

$$\begin{aligned} 3\rho_0 \left(\partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2 \right) = & -2G\beta' \nabla \xi \cdot \hat{\mathbf{e}} / e_i + 2G\beta' \xi \nabla e_i \cdot \hat{\mathbf{e}} / e_i^2 - K\nabla (\alpha t + \eta \varphi) + \\ & + \left[K - 2G(e_i - \beta' \xi - \eta' \varphi) / e_i \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) / 3 - \left[K\beta - 2G\beta' (\nabla \cdot \mathbf{u}) / 3 \nabla \xi \right] + \\ & + \left(K - 2G\beta' \xi / e_i^2 \right) \nabla e_i + \left[\rho_0 C (\varphi - \gamma t - K_{\varphi \xi} \xi) + \eta K \nabla \cdot \mathbf{u} \right] [\mathbf{E} + \mu_0 (\partial \mathbf{u} / \partial \tau) \cdot \mathbf{H}] + \\ & + \mu_0 \left[\lambda (\mathbf{E} - \nabla \varphi + \mu_0 (\partial \mathbf{u} / \partial \tau) \cdot \mathbf{H}) \right] \cdot \mathbf{H} + G(e_i - \beta' \xi) \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] / e_i, \\ \kappa \nabla^2 t = & \partial t / \partial \tau + K^* \partial (\nabla \cdot \mathbf{u}) / \partial \tau - K_{t\xi}^* \partial \xi / \partial \tau - K_{\varphi}^* \partial \varphi / \partial \tau - \\ & - \lambda^* \left[\mathbf{E} - \nabla \varphi + \mu_0 (\partial \mathbf{u} / \partial \tau) \cdot \mathbf{H} \right]^2, \\ \lambda \nabla^2 \varphi = & (\partial / \partial \tau + \lambda / \varepsilon_0) \left[\rho_0 C (\varphi - \gamma t - K_{\varphi \xi} \xi) + \right. \\ & + \eta K \nabla \cdot \mathbf{u} \left. \right] + \lambda \mu_0 \nabla \left[(\partial \mathbf{u} / \partial \tau) \cdot \mathbf{H} \right], \\ \text{rot } \mathbf{H} = & \varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial \tau) + \left[\rho_0 C (\varphi - \gamma t - K_{\varphi \xi} \xi) + \right. \\ & + \eta K \nabla \cdot \mathbf{u} \left. \right] (\partial \mathbf{u} / \partial \tau) + \lambda \left[\mathbf{E} - \nabla \varphi + \mu_0 (\partial \mathbf{u} / \partial \tau) \cdot \mathbf{H} \right], \text{ rot } \mathbf{E} = -\mu_0 (\partial \mathbf{H} / \partial \tau), \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = & \mathbf{0}, \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_0 C (\varphi - \gamma t - K_{\varphi \xi} \xi) + \eta K \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ K_{t\xi} t - & K\beta e / \rho_0 - G\beta' e_i / \rho_0 + K_{\varphi \xi} \varphi + K_{\xi} \xi = 0. \end{aligned}$$

Така система після доповнення відповідними початковими і граничними умовами, є вихідними для аналізу напружено-деформованого стану тіл, виготовлених зі сплавів з пам'яттю форми, за дії термосилового навантаження, а також електричного поля, та параметрів на-
явних зв'язаних полів.

1. Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б. Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформованих твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 14-17.
2. Боженко Б., Гачкевич О., Онишко О., Станік-Беслер А. Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з пам'яттю форми за врахування дії електричного поля // Сучасні проблеми механіки та математики. В 3-х т. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2013. – Т. 1. – С. 76-78.
3. Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наукова думка, 1978. – 232 с.
4. Auricchio F., Bessoud A.-L., Reali A., Stefanelli U. A three-dimensional phenomenological model for magnetic shape memory alloys // GAMM-Mitt. – 2011. – V. 34, No. 1. – P. 90-96.
5. Musialek J., Filip P., Nieslanik J. Titanium-nickel shape memory clamps in small bone surgery // Arch. Orthop. Trauma Surg. – 1998. – V. 117. – P. 341-344.

MODELING AND RESEARCH OF THE PHASE AND STRESS STATE OF SOLIDS WITH SHAPE MEMORY UNDER MARTENSITIC TRANSFORMATIONS AND ELECTRIC FIELD

The differential resolving system for the proposed before model of quantitative description of a thermomechanical behavior for electroconductive shape memory materials with use of stress and strain tensor invariants is written.

УДК 539.3

ПЛОСКА ЗМІЩЕНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НАПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ

Наталія Вайсфельд, Зінаїда Журавльова

*Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, м. Одеса, 65082, Україна*

Розглядається пружна (модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона μ) напівнескінченна смуга $0 < x < a, 0 < y < \infty$, одна грань якої є жорстко закріпленою, а на іншій задані умови гладкого контакту

$$\begin{aligned} u_x(0, y) = u(0, y) = 0, u_y(0, y) = v(0, y) = 0, \\ u_x(a, y) = u(a, y) = 0, u'_y(a, y) = v'(a, y) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На смугу діє нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, 0) = -p(x), \tau_{yx}(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Ставиться за мету визначити переміщення та напруження, що

задовольняють крайовим умовам (1), (2) та рівнянням рівноваги

$$\begin{aligned}\mu_* u''(x, y) + u^{\bullet\bullet}(x, y) + \mu_0 v^{\bullet}(x, y) &= 0, \\ v''(x, y) + \mu_* v^{\bullet\bullet}(x, y) + \mu_0 u^{\bullet}(x, y) &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

де $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, $\mu_* = \mu_0 + 1$.

До рівнянь рівноваги (3) та крайових умов (1) застосовані інтегральні $\sin$ - та $\cos$ - перетворення Фур'є, що привело до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант, яку переформульовано у вигляді векторної крайової задачі

$$L_2[\mathbf{y}(x)] = \mathbf{f}, \quad U_i[\mathbf{y}(x)] = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Тут L_2 – диференціальний оператор другого порядку, $\mathbf{y}(x)$ – вектор компонентами якого є Фур'є-трансформанти переміщень, U_i – крайові функціонали ($i = 0$ відповідає значенню на краю $x = 0$, а $i = 1 - x = a$), $\mathbf{f} = ((3 - \kappa)(\kappa + 1)^{-1}\chi'(x), -\beta(\kappa + 1)(\kappa - 1)^{-1}\chi(x))^T$, β – параметр інтегрального перетворення, κ – стала Мусхелішвілі. Невідома функція $\chi(x)$ визначена з залежності $\chi(x) = v(x, 0)$.

Розв'язок векторної крайової задачі побудовано шляхом застосування апарату матричного диференціального числення, що дозволило знайти загальний розв'язок однорідного векторного рівняння. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння сконструйовано шляхом побудови матричної функції Гріна, зображення якої отримано у формі білінійного розвинення. Невідомі сталі у розв'язку визначено із застосування крайових функціоналів (4). Після обернення інтегрального перетворення Фур'є переміщення напівнескінченної смуги визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_0^a \int_0^a \chi'(\xi) f_1(x, \xi, \beta) \cos \beta y d\xi d\beta, \\ v(x, y) &= \int_0^a \int_0^a \chi'(\xi) f_2(x, \xi, \beta) \sin \beta y d\xi d\beta,\end{aligned}\quad (5)$$

де $f_i(x, \xi, \beta)$, $i = 1, 2$ – відомі функції. Невідому функцію $\chi'(\xi)$ знайдено задовольняючи першу з умов (2). Після підстановки переміщень (5) в цю умову та відокремлення слабо збіжних частин інтегралів отримано сингулярне інтегральне рівняння

$$\int_0^a \chi'(\xi) \left[\frac{1}{|\xi - x|} + \varphi(\xi, x) \right] d\xi = r(x), \quad 0 < x < a, \quad (6)$$

яке розв'язано методом ортогональних поліномів. Для встановлення характеру особливості розв'язку на кінцях проміжку інтегрування задачу інтерпретовано як задачу для клину, на гранях якого задано

умови різного типу. При $\mu = 1/4$ отримаємо особливість розв'язку $\alpha = -0.205$ на обох кінцях проміжку. Виходячи з цього невідому функцію з (6) знаходимо у вигляді ряду за поліномами Якобі

$$\chi'(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^{\alpha} (1 - \xi)^{\alpha} P_k^{\alpha, \alpha}(1 - 2\xi). \quad (7)$$

Невідомі коефіцієнти розкладу визначаємо за стандартною схемою методу ортогональних поліномів, збіжність якого доведено за схемою [1].

Проведено дослідження нормальних напружень на бічних границях півнескінченної смуги в залежності від величини навантаження.

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

A PLANE MIXED ELASTICITY PROBLEM FOR A SEMI STRIP

The mixed plane elasticity problem for a semistrip is solved. The solving method is based on the method of the integral transformations. The one-dimensional boundary problem is reformulated in the form of a vector boundary problem, where the components of the unknown vector are the transformations of the displacements. The solution in the transformations' domain is constructed with the help of the matrix differential calculation apparatus and apparatus of Green's matrix function. The inverting of the integral transformations leads to the formulas for the displacements with the unknown function. The singular integral equation is constructed for its estimation. This equation is solved by the orthogonal polynomial method. The field of the displacements and stresses are investigated at the different kinds of the loading.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЫ

Владимир Вестяк, Дмитрий Тарлаковский

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) – МАИ,
Волоколамское шоссе, 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 125993,
Российская Федерация;

Научно-исследовательский институт механики Московского
государственного университета им. М.В. Ломоносова,
Мичуринский пр-т, 1, г. Москва, В-192, 119192, Российская Федерация

Рассматривается осесимметричная задача об определении электромагнитного поля в движущейся толстостенной сфере. Использоу-

ется линеаризованная модель изотропного проводника с учетом обобщенного закона Ома [1], которой соответствует записанная в безразмерном виде следующая замкнутая система соотношений в сферической системе координат r, θ, ϑ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi < \vartheta \leq \pi$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= -\dot{H}, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH)}{\partial r} = \eta_e^2 (\gamma j_\theta + \dot{E}_\theta), \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H \sin \theta)}{\partial \theta} &= \eta_e^2 (\gamma j_r + \dot{E}_r), \quad \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + E_\theta \operatorname{ctg} \theta + 2E_r \right) = \rho_e, \\ j_r &= E_r + H_0 \dot{v} + \dot{u}/\gamma, \quad j_\theta = E_\theta - H_0 \dot{u} + \dot{v}/\gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь E_r, E_θ и j_r, j_θ – координаты векторов напряженности электрического поля и плотности тока; H – ненулевая компонента напряженности магнитного поля; H_0 – ее значение в начальном состоянии; ρ_e – плотность поверхностных зарядов; $u(r, \theta, \tau)$ и $v(r, \theta, \tau)$ – заданные нормальное и тангенциальное перемещения; точками обозначены производные по времени τ ; η_e и γ – физические характеристики среды.

Предполагается, что начальные условия нулевые, а на границах толстостенной сферы выполняются следующие равенства ($r_0 < r_1$):

$$v(r_0, \theta, \tau) = v(r_1, \theta, \tau) = E_\theta(r_0, \theta, \tau) = E_\theta(r_1, \theta, \tau) = 0. \quad (2)$$

Из (1) вытекают следующие соотношения для ρ_e и H (Δ – оператор Лапласа):

$$\dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = -l_p(\dot{u}, \dot{v}); \quad (3)$$

$$\eta_e^2 (\ddot{H} + \gamma \dot{H}) = \Delta \dot{H} - r^{-2} \dot{H} \sin^{-2} \theta + l_H(\ddot{u}, \ddot{v}), \quad (4)$$

где (нижний индекс после запятой указывает на производную)

$$l_p(u, v) = r^{-2} \left[r^2 (\rho_{e0} \dot{u} + \gamma H_0 \dot{v}) \right]_{,r} + r^{-1} \left[(\rho_{e0} \dot{v} - \gamma H_0 \dot{u}) \sin \theta \right]_{,\theta} \sin^{-1} \theta,$$

$$l_H(u, v) = \eta_e^2 r^{-1} \left[(r \rho_{e0} v)_{,r} - \rho_{e0} u_{,\theta} \right] - \gamma \eta_e^2 H_0 \left[u_{,r} + r^{-1} (v_{,\theta} + v \operatorname{ctg} \theta + 2u) \right].$$

Полагая далее $H_0 \equiv 0$, из (1) и (2) получаем, что функция $H(r, \theta, \tau)$ должна удовлетворять таким граничным условиям:

$$r^{-1} (rH)_{,r}(r_0, \theta, \tau) = r^{-1} (rH)_{,r}(r_1, \theta, \tau) = 0. \quad (5)$$

Для решения задачи функции u , E_r , j_r , ρ_e раскладываются в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$, а v , E_θ , j_θ , H – в ряды по полиномам Гегенбауэра $S_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$. Коэффициенты $H_n(r, \tau)$ записываются в интегральном виде (звездочка обозначает свертку по времени):

$$H_n(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}(r, \xi, \tau) * l_H[\dot{u}_n(\xi, \tau), \dot{v}_n(\xi, \tau)] d\xi. \quad (6)$$

Здесь G_{Hn} – объемная функция Грина, изображение по Лапласу которой удовлетворяет следующей краевой задаче (индекс « L » указывает на трансформанту; s – параметр преобразования; $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака):

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \quad r^{-1} \left(r G_{Hn}^L \right)_{,r} \Big|_{r=r_0, r_1} = 0, \\ \Delta_n G = r^{-2} \left[\left(r^2 G_{,r} \right)_{,r} - n(n+1) \right], \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}. \quad (7)$$

Показано, что решение этой задачи имеет вид отношения экспоненциальных многочленов аргумента s_e . Оно раскладывается в ряд по экспонентам (в пространстве оригиналов ему соответствует конечная сумма), коэффициенты которого являются рациональными функциями. Это позволяет найти оригиналы в аналитическом виде с помощью теоремы Эфроса и теоремы разложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-08-00928) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

1. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media // Encyclopedia of Thermal Stresses. – V. 2. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – P. 1064-1071.

GREEN'S FUNCTIONS FOR NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC THICK-WALLED SPHERE

An analytical solution of the problem of unsteady axisymmetric electromagnetic field in moving along a given law thick-walled sphere. It uses the series expansions of the angle, the Laplace transform and Green's functions of the machine.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ГЕТЕРОДИFUЗІЇ ДВОМА ШЛЯХАМИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНОМУ ТРИШАРОВОМУ ТІЛІ

Олеся Власій, Ольга Чернуха

*Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника»,
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна;*

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна*

Внаслідок поширення у довкіллі забруднень, яке значною мірою визначається процесами дифузії, актуальним є дослідження процесів масоперенесення домішкових речовин у стохастично неоднорідних дрібнодисперсних середовищах. В роботі розглянуто тришарове тіло товщиною z_0 , яке складається з двох твердих фаз – фази Ω_1 , яка містить випадково розташований прошарок товщиною h фази Ω_2 . У кожній з фаз домішкова речовина мігрує двома шляхами і супроводжується процесами типу сорбції-десорбції. Прийнято, що об'ємна частка фази Ω_1 набагато більша за об'ємну частку іншої фази. Випадковою величиною вважається координата верхньої межі прошарку $z = z_1$. При вертикальній гетеродифузії концентрація домішок визначається з системи рівнянь з випадковими функціями просторової координати в коефіцієнтах [1]:

$$\begin{aligned} \rho(z) \frac{\partial c_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[d_1(z) \frac{\partial c_1}{\partial z} + d_3(z) \frac{\partial c_2}{\partial z} \right] - k_1(z)c_1 + k_2(z)c_2, \\ \rho(z) \frac{\partial c_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[d_2(z) \frac{\partial c_2}{\partial z} + d_4(z) \frac{\partial c_1}{\partial z} \right] - k_2(z)c_2 + k_1(z)c_1, \end{aligned} \quad (1)$$

де $c_i = c_i(z, t)$, $i = 1, 2$ – випадкові концентрації домішки на швидкому ($i = 1$) та повільному ($i = 2$) шляхах перенесення частинок; $\rho(z)$ – випадкова густина тіла; $d_i(z)$, $i = 1, 2$ – випадкові кінетичні коефіцієнти дифузії в i -ому стані; $d_i(z)$, $i = 3, 4$ – випадкові коефіцієнти, що відповідають за перехресну дифузію частинок домішки на різних шляхах міграції; $k_i(z)$ – випадкові коефіцієнти інтенсивності переходу домішкових частинок зі швидкого шляху міграції на повільний ($i = 1$) і зворотного переходу ($i = 2$). Густина середовища, кінетич-

ний коефіцієнт дифузії та коефіцієнти інтенсивності переходу вважаємо сталими в об'ємі кожної з фаз.

На шукані функції накладено такі крайові умови:

$$c_1(z, t)|_{t=0} = 0, \quad c_2(z, t)|_{t=0} = 0; \quad (2)$$

$$c_1(z, t)|_{z=0} = \alpha c_0, \quad c_2(z, t)|_{z=0} = (1 - \alpha)c_0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3)$$

$$c_1(z, t)|_{z=z_0} = 0, \quad c_2(z, t)|_{z=z_0} = 0. \quad (4)$$

За допомогою введення «функції структури» $\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij}, \\ 0, & z \notin \Omega_{ij}, \end{cases}$

(де Ω_{ij} – i -ий шар j -ої фази) [1] з використанням матричного подання задачі (1)–(4) отримано таку крайову задачу:

$$L_0 \{c(z, t)\} = (L_0 - L) \{c(z, t)\}, \quad (5)$$

$$c(z, t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c(z, t)|_{z=0} = \begin{pmatrix} \alpha c_0 \\ (1 - \alpha)c_0 \end{pmatrix}, \quad c(z, t)|_{z=z_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{де } L_0 = \rho^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} - D^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - K^{(1)}, \quad c(z, t) = \begin{pmatrix} c_1(z, t) \\ c_2(z, t) \end{pmatrix}, \quad D^{(j)} = \begin{pmatrix} d_1^{(j)} & d_3^{(j)} \\ d_4^{(j)} & d_2^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$K^{(j)} = \begin{pmatrix} -k_1^{(j)} & k_2^{(j)} \\ k_1^{(j)} & -k_2^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad L = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n_j} \left[\rho^{(j)} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial t} - D^{(j)} \eta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - [D(z)]_1 \times \right. \\ \left. \times (\delta(z - z_1) - \delta(z - (z_1 + h))) \frac{\partial}{\partial z} - K^{(j)} \eta_{ij} \right], \quad [D]_1 = \begin{pmatrix} d_1^{(2)} - d_1^{(1)} & d_3^{(2)} - d_3^{(1)} \\ d_4^{(2)} - d_4^{(1)} & d_2^{(2)} - d_2^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Неоднорідність середовища розглянуто як внутрішні джерела і крайову задачу (5)–(6) зведено до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок якої отримано методом послідовних наближень у вигляді рядів Неймана [1]. Усереднення полів концентрації здійснено за ансамблем конфігурацій фаз та отримано відповідні розрахункові формули. Проведено числовий аналіз, на основі якого встановлено основні залежності вказаних полів від фізико-хімічних характеристик середовища.

1. Чапля Є., Чернуха О. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – К.: Наук. думка, 2009. – 302 с.

MODELING HETERODIFFUSION PROCESSES BY TWO WAYS IN A STOCHASTICALLY NONHOMOGENEOUS THREE-LAYERED BODY

The processes of heterodiffusion by two ways in a two-phase multicompo-

nent body with a randomly disposed sublayer are studied. The mathematical model of mass transfer is proposed with allowing for the processes of sorption-desorption and initial boundary value problem is formulated using physical coefficients as functions of random nonhomogeneous inner structure. A solution is obtained in the form of Neumann series and it is averaged over the ensemble of phase configurations with the uniform distribution function. Numerical analysis is carried out and it is established general regularities of heterodiffusion processes in the random three-layered body.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ КОМБІНОВАНОГО НАГРІВУ СКЛЯНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК

Микола Гачкевич, Богдан Тріщ, Івона Муліцка

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Озімска, 75, м. Ополь, 45370, Польща*

При різних видах цільової термообробки скляних кусково-однорідних оболонкових елементів сучасної техніки широко використовують комбінований нагрів – конвективним способом та джерелами тепла, які часто створюються електромагнітним випромінюванням (ЕМВ) інфрачервоного частотного діапазону, зокрема, тепловим опроміненням зі спектром в області часткової прозорості скла.

При оптимізації режимів нагріву за використання теплового електромагнітного випромінювання (як одного з джерел нагріву при комбінованому способі нагріву) запропонований алгоритм оптимізації уточнюється постановкою прямої задачі за врахування інфрачервоного випромінювання. При цьому вихідні співвідношення прямої задачі для кількісного опису параметрів електромагнітних, теплових і механічних процесів, зумовлених дією ЕМВ, формулюємо, як прийнято в літературі, за два етапи. На першому етапі записуємо в квазіусталеному наближенні рівняння для характеристик ЕМВ, а також вирази для тепловиділень через ці характеристики. На другому етапі формулюємо задачі термомеханіки на основі прийнятої термомеханічної теорії.

Поле випромінювання у частково прозорих тілах (до яких відно-

сяться тіла зі скла) характеризується спектральними інтенсивностями випромінювання $I_{\lambda,k}$, що описуються отриманими феноменологічно на основі закону Бугера рівняннями переносу. При відомій інтенсивності випромінювання $I_{\lambda,k}(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$ густина тепловиділень в складових частинах визначається співвідношенням

$$Q_{*k} = \int_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda,k}(\vec{r}) \int_{\Omega=0}^{4\pi} I_{\lambda,k}(\vec{r}, \vec{s}, \tau) d\Omega d\lambda, \quad (1)$$

де $a_{\lambda,k}(\vec{r})$ – коефіцієнти поглинання складових частин; $d\Omega$ – елементарний тілесний кут ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$; θ і φ – відповідні сферичні координати), $\vec{s}$ – напрям поширення випромінювання. Термонапружений стан кусково-однорідної оболонки описуємо з використанням теорії незв'язаної термопружності при залежних від температури коефіцієнтах теплового розширення.

Необхідно здійснити нагрів зовнішньої поверхні ($\gamma = h$) таких склооболонок конвективним способом та джерелами тепла, зумовленими інфрачервоним опроміненням, від початкової температури t_p до максимальної t_0 за час τ_0 , витримати заданий час τ_1 при цій температурі і охолодити до температури t_* за час τ_2 при обмеженнях на параметри термонапруженого стану і швидкості нагріву. При цьому в алгоритмі оптимізації уточнюється пряма задача. Вона формулюється за три етапи. На першому етапі записуємо відповідні задачі, що окреслюють інтенсивність випромінювання на основі закону Бугера, а далі визначаємо тепловиділення в оболонці з використанням залежності (1). На другому етапі формулюємо задачі, що описують температурне поле. В них тепловиділення (1) є питомою густиною неперервно розподілених джерел тепла в рівнянні теплопровідності, а крайовими умовами є умови теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого зі сторони зовнішньої поверхні оболонки виступає як функція керування. Для забезпечення міцності оболонки на проміжку нагріву прийmemo, що компоненти тензора сумарних температурних напружень на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки менші допустимих.

Задача оптимізації зводиться до знаходження екстремалей функціоналу максимальних нормальних напружень. Для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму функціоналу використовуємо метод локальних варіацій в просторі стану функції управління при відомому розв'язку прямої задачі. Побудова оптимального режиму при такому нагріві здійснюється за певною схемою. При цьому на другому

етапі розв'язування вихідної задачі, тобто при оптимізації режиму конвективного нагріву, приймаємо, що температура і напруження в момент часу закінчення променевого нагріву є початковими значеннями для температури та напружень.

Побудований таким чином оптимальний комбінований режим в конкретному розглядуваному випадку дозволяє досягти вищої температури термообробки оболонки без збільшення часу нагріву. В ньому на початковій стадії (протягом 6 хв.) нагрів проводиться електромагнітним випромінюванням, а потім конвективним способом до максимальної температури 370°C (при лише конвективному способі нагріву отримана максимальна температура оболонки становить 310°C).

THE OPTIMIZATION MODEL OF COMBINED HEATING OF PIECEWISE HOMOGENEOUS GLASS SHELLS

The mathematical model and technique of optimization of combined heating of piecewise homogeneous glass shells are proposed.

УДК 539.3

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ВИГОТОВЛЕНИХ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ КУСКОВО- ОДНОРІДНИХ ТІЛ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ ЗА ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Олександр Гачкевич, Євген Ірза, Валентин Можаровський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополе, 45036, Польща;*

*Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини,
вул. Советская, 104, м. Гомель, 246019, Республіка Білорусь*

Розглядається структурно-неоднорідне тіло канонічної форми з функціонально-градієнтних термopужних матеріалів, яке займає область Ω евклідового простору R^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло віднесене до криволінійної системи координат $Ox^1x^2x^3$. На частині Γ_u поверхні Γ тіла задані переміщення $\bar{u} = \bar{u}^0$, а на частині Γ_σ – силове навантаження, яке характеризу-

ється вектором $\vec{p}$, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Тіло піддається технологічному нагріванню, яке здійснюється зовнішнім середовищем з температурою $t_c(\vec{r}, \tau)$ через частину поверхні Γ_t ($\vec{r} \in \Gamma_t$), тепловим потоком $q(\vec{r}, \tau)$ через частину поверхні Γ_q ($\vec{r} \in \Gamma_q$), $(\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma)$, а також розподіленими джерелами тепла потужності $Q(\vec{r}, \tau)$, ($\vec{r} \in \Omega$).

Теорію термопружності розглядуваних тіл будуємо на основі моделі термопружного тіла за термомеханічних властивостей, що є функціями просторових координат і температури [1].

Вважаємо, що при розглядуваних теплових навантаженнях напружений стан тіла не впливає на його температуру, тобто задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях). При цьому температурне поле в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\bar{\nabla} \cdot (k \bar{\nabla} t) + Q - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \text{ на } \Omega \quad (1)$$

за початкової

$$t(\vec{r}, 0) = t_0(\vec{r}) \text{ на } \Omega \quad (2)$$

і крайових

$$k \bar{\nabla} t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0 \text{ на } \Gamma_t, \quad k \bar{\nabla} t \cdot \vec{n} + q = 0 \text{ на } \Gamma_q \quad (3)$$

умов. Тут $\bar{\nabla}$ – оператор Гамільтона, $k(s, t)$ – коефіцієнт теплопровідності, $\rho(s, t)$ – густина, $c(s, t)$ – питома теплоємність, τ – біжучий час, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні, α – коефіцієнт тепловіддачі, s – просторова координата в напрямку неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу тіла.

Деформація в термопружному тілі окреслюється наступною залежністю:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^t\}, \quad (4)$$

де $\{\varepsilon^e\}$ – пружні деформації; $\{\varepsilon^t\}$ – температурні деформації.

Побудова розв'язків розглядуваного класу задач базується на методі зважених залишків в поєднанні з методом кінцевих елементів (який дозволяє отримувати наближені розв'язки для даного класу задач [2]). З використанням згаданих методів система вихідних співвідношень піддається просторово-часовій дискретизації і зводиться до системи нелінійних алгебричних рівнянь, які схематично можна записати у вигляді:

$$[K_T]\{T\} = \{F_T\}, \quad [K_{T,U}]\{U\} = \{F_{T,U}\}. \quad (5)$$

Тут $[K_T]$, $[K_{T,U}]$ – відповідні матриці жорсткості, $\{F_T\}$, $\{F_{T,U}\}$ – вектори навантаження [2]. Нелінійні системи алгебраїчних рівнянь (5) розв’язуємо за допомогою методу простої ітерації.

Як приклад, проведено числові дослідження термомеханічної поведінки шаруватого порожнистого циліндра, виготовленого з конкретних функціонально-градієнтних матеріалів, за заданого теплового навантаження.

Дослідження підтримано ДФФД України та ФФД Білорусі (в рамках наукового проекту Ф54.2/015).

1. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища шк., 1975. – 216 с.
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. – London: “Butterworth Heinemann”, 2000. – 689 p.

THERMOSTRESSED STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODIES OF CANONICAL FORM MADE OF FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS AT THERMAL LOADING

A structurally in homogeneous body of canonical form made of functionally gradient thermoelastic materials is considered. The thermoelasticity theory of the bodies under study we construct according to the known thermomechanical characteristics as functions of spatial coordinates and temperature. Construction of solutions to the considered class of problems is based on the method finite element.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ФАЗОВОГО СКЛАДУ ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНУ СТАЛЕВОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО РОЗПОДІЛЕНОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА ЗА РЕГУЛЬОВАНОГО ТЕПЛООБМІНУ З ДОВКІЛЛЯМ

Олександр Гачкевич, Тереза Козакевич, Максиміліан Гаєк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополе, 45036, Польща*

При локальному нагріві та наступному охолодженні до природного стану за температур, що відносяться до діапазону температур

поліморфних перетворень та вище них, відбуваються зміни фазового складу виробів виготовлених зі сталі, зокрема, маловуглецевої низьколегованої. У структурі сталі pojawiaються нові фази: мартенсит і бейніт, густина яких є меншою за густину рівноважної ферито-перлітної. Градієнт густини, обумовлений цим фактором, може спричинити виникнення залишкових напружень у тілі. Мартенситна складова зумовлює підвищення схильності матеріалу до крихкого руйнування як в силу особливостей кристалічної будови, так і внаслідок того, що при певних технологічних операціях, зокрема високотемпературному нагріві рухомими нормально розподіленими джерелами тепла, активно поглинається водень. Тому актуальною і важливою є проблема створення цільових режимів локального високотемпературного нагріву виробів зі сталі та умов їх теплообміну з зовнішнім середовищем за яких виникає необхідний для експлуатації виробів зі сталі фазовий склад.

Відомо, що фазовий склад сталі визначається законом зміни температури у ній. Для маловуглецевих низьколегованих сталей найважливішою є та частина термічної історії сталі, що відбувається при охолодженні у діапазоні температур нерівноважних поліморфних перетворень (час перебування розглядуваної точки в цьому діапазоні). Використання раціонально підібраних схем локального нагріву дозволяє суттєво вплинути на фазовий склад зони термічного впливу, мінімізувати вміст мартенситної складової і зменшити неоднорідність їх розподілу, вплинути на механічні властивості виробу та розподіл залишкових напружень у ньому і в такий спосіб покращити експлуатаційні властивості інженерних конструкцій зі сталі.

Досліджується вплив умов тепловіддачі, які регулюються ступенем теплоізоляції на поверхні, на фазовий і напружений стан сталевих пластин за зміни ширини зони термічної ізоляції при дії рухомого нормально розподіленого джерела тепла, зокрема на мінімум максимального вмісту мартенситу. Розглянуто випадок, коли нормально розподілене джерело тепла рухається вздовж поверхні в напрямку осі Ox_1 зі сталою швидкістю v . Джерело має один центр локалізації. Наявність і ступінь теплоізоляції в даному випадку моделюється виразом коефіцієнта теплообміну з навколишнім середовищем α , який приймається у вигляді $\alpha = \begin{cases} \alpha, & \text{при } |x_1| > L^* / 2, \\ 0, & \text{при } |x_1| \leq L^* / 2 \end{cases}$, де L^* –

ширина смуги теплоізоляції.

Розроблено, ґрунтуючись на методі зважених залишків та МСЕ (зокрема, методі Гальоркіна), методику числового послідовного розв'язування відповідних задач математичної фізики наявних етапів опрацьованої розрахункової схеми визначення залишкових фазового та напруженого станів тонких маловуглецевих низьколегованих

пластин за локального нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла за врахування числової форми отримання результатів на кожному етапі [1].

Дослідження впливу наявного теплообміну на фазовий склад пластини показали, що оптимальна за мінімумом максимального вмісту мартенситу ширина смуги теплоізоляції в розглядуваному випадку становить приблизно $10 \cdot 10^{-3} \div 12 \cdot 10^{-3}$ м. На основі аналізу температурних полів встановлено, що використання теплоізолюючого покриття приводить до підвищення температури в центрі нагріву, за якого можна зменшити (до 20 %) потужність рухомого джерела тепла.

Аналіз впливу ширини зони ізоляції на фазовий склад пластини показав, що існує деяка оптимальна її ширина, яка мінімізує максимальний вміст мартенситу і відповідно, залишкові структурні напруження.

1. Гачкевич О.Р., Козакевич Т.В., Гаск М. Варіант числової методики визначення зумовленого структурними перетвореннями залишкового напруженого стану сталевих пластин за нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла // Вісник Донецького національного ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013, – № 2. – С. 37-43.

MODELING PHASE COMPOSITION AND STRESS STATE IN STEEL PLATE SUBJECTED TO MOVING DISTRIBUTED HEAT SOURCES WITH CONTROLLABLE HEAT EXCHANGE WITH THE ENVIRONMENT

The influence of heat transfer conditions, which are controlled by the degree of thermal insulation on the surface of the plate on phase and the stress state of steel plate with changing the width of the zone of thermal insulation subjected to moving normally distributed heat source.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Олександр Гачкевич, Роман Кушнір, Василь Попович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

В ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України впродовж останніх двох десятиліть отримато низку вагомих теоретичних і прикладних результатів з термомеханіки неоднорідних тіл, одного із основних наукових напрямів досліджень Інституту. На цій основі сформовано новий науковий напрямок фундаментальних досліджень – матема-

тичне і термодинамічне моделювання взаємозв'язаних процесів різної природи в структурно-неоднорідних тілах [1]. Отримані результати здобули визнання провідних фахівців як в Україні, так і за її межами. Вони систематизовані та узагальнені у 5-ти томній монографії [2], достатньо повно подані в 11-ти томній «Енциклопедії з температурних напружень», яка опублікована у видавництві «Springer» [3]. Серед них слід виокремити наступні:

- запропоновано варіант теорії механотермоелектродифузії для тіл, здатних до намагнічування та поляризації, за дії зовнішнього електромагнітного поля;

- здійснено постановки нових лінійних та нелінійних контактних крайових задач теплопереносу та термопружності для опромінюваних шаруватих пластин за різних комбінацій радіаційних властивостей складників та розроблено методику їх розв'язування;

- розроблено й апробовано низку аналітично-числових методик визначення температурних полів та оригінальний варіант методу збурень для знаходження спричиненого ними квазістатичного напружено-деформованого стану термочутливих тіл, які перебувають в умовах складного теплообміну із довкіллям;

- створено ефективний метод визначення нестационарних температурних полів та термонапружень в неоднорідних і термочутливих елементах конструкцій канонічної форми за неповної інформації про теплове навантаження внаслідок наявних технологічних обмежень, який базується на формулюванні оберненої задачі термопружності;

- сформульовано і, зведенням до обернених задач термомеханіки, розв'язано задачі оптимального за швидкістю керування нагріванням термочутливих тіл за обмежень на керування (температуру зовнішнього гріючого середовища, тепловий потік на поверхні тіла) та максимальне значення інтенсивності дотичних напружень або накопиченої пластичної деформації;

- розроблено методику дослідження напружено-деформованого стану діючих елементів енергетичного обладнання з ремонтними вибірками дефектів та ушкодженнями за різних режимів їх експлуатації з метою оцінки ресурсу таких структур, яка запроваджена на Бурштинській і Добротвірській ТЕС.

Для підготовки і реалізації нових проектів з впровадження теоретичних результатів Інституту за цим напрямком в атомну і теплову енергетику, приладо-, літако- і ракетобудування планується розширити співпрацю з рядом академічних установ та національних університетів України.

Впродовж декількох наступних років заплановано підготувати і видати низку монографій з термомеханіки структурно-неоднорідних тіл за комплексного теплового, силового та електромагнітного навантажень й аналітично-числових методів розв'язування сформульованих на цій основі крайових задач.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0114U005081).

1. *Из зала* засідань Президії НАН України (18 червня 2014 р.) // Вісник НАН України. – 2014. – № 8. – С. 11-13.
2. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл* / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра.
Т. 1: Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької провідності / Я.Й. Бурак, О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький. – Львів: СПОЛОМ, 2006. – 300 с.;
Т. 2: Механотермодифузія в частково прозорих тілах / О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький, Т.Л. Курницький. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 184 с.;
Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.;
Т. 4: Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл / О.Р. Гачкевич, Б.Д. Дробенко. – Львів: СПОЛОМ, 2010. – 256 с.;
Т. 5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович, А.В. Ясінський. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с.
3. *Kushnir R.M., Tokovyy Yu.V. Encyclopedia of Thermal Stresses* (Springer, 2014, Vol. 1 – Vol. 11) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 163-170.

MODELLING AND OPTIMIZATION IN THERMOMECHANICS OF INHOMOGENEOUS SOLIDS

The main results of fundamental and applied researches in thermomechanics of inhomogeneous solids at Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of Ukrainian NAS in a period of 20 years of its activity are presented.

УДК 539.377

ДО МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЛОКАЛЬНО НАГРІТОЇ ТИТАНОВОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ ЗА ВРАХУВАННЯ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Олександр Гачкевич, Анна Равска-Скотнічни, Ігор Чупик

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополе, 45036, Польща*

У сучасному машинобудуванні широко використовують елемен-

ти, виготовлені із високоміцних металів, насамперед на основі кольорових металів. Деталі і вузли машин і механізмів виготовлені з таких матеріалів при їх виготовленні чи експлуатації піддають різним видам технологічного нагріву, внаслідок якого в локальних областях змінюється в них фазовий склад, що приводить до появи залишкових напружень і може бути причиною руйнування цих виробів. Тому актуальною і важливою є проблема дослідження та оптимізації режимів обробки деталей і вузлів машин, виготовлених із таких матеріалів, зокрема широко використовуваних в інженерній практиці титанових сплавів, за забезпечення необхідного фазового та напруженого станів.

Метою роботи є математичне моделювання та дослідження напруженого стану оболонки обертання, виготовленої із титанового сплаву ВТ-23 при локальному кільцевому осесиметричному високотемпературному нагріві. Приймається, що оболонка вільна від зовнішніх механічних навантажень. На відміну від відомих в літературі досліджень в цьому напрямі в роботі враховано як тимчасові в процесі нагріву, так і залишкові після охолодження до натурального стану напруження. Температура в зоні локального нагріву оболонки знаходиться в діапазоні від 20°C до 720°C і є функцією лише повздовжньої координати (в напрямі твірної), тобто описується залежністю:

$$t = t(t_1, t_0, z_0, z), \quad (1)$$

де t_0 – температура навколишнього середовища, t_1 – максимальна температура у центрі зони нагріву, z_0 – півширина локальної зони нагріву, z – біжуча координата у повздовжньому напрямку.

У рівноважному стані при температурі 20°C сплав ВТ-23 містить 80 % α -фази (гексагональна щільноупакована ґратка) і 20% β -фази (об'ємноцентрована кубічна ґратка). При поступовому нагріві сплаву від 520°C до 920°C , кількість β -фази у ньому збільшується до 100 %. Різниця питомих об'ємів між α і β фазами є приблизно 2,5%. Це приводить до виникнення в елементах з таких матеріалів напружень, зумовлених як нагрівом, так і неоднорідним розподілом фаз. Неоднорідний розподіл фаз створює деякий напружений стан і після охолодження до натуральної температури.

При нагріві сумарну деформацію пов'язуємо зі зміною об'єму матеріалу оболонки та окреслюємо співвідношенням

$$de_T = de_t + de_{\xi}, \quad (2)$$

де $de_t = \alpha_t(t)dt$, $de_{\xi} = \beta_{\alpha}d\xi_{\alpha} + \beta_{\beta}d\xi_{\beta}$, $\alpha_t(t)$ – лінійний коефіцієнт теплового розширення, $\beta_{\alpha}, \beta_{\beta}$ – коефіцієнти дилатації структури α і β фаз (величини, обернені до відповідних питомих об'ємів), ξ_j ($j = \alpha, \beta$)

– процентний вміст конкретної фази, що визначається ступенем повноти ξ фазового перетворення. При цьому складові ξ визначаємо з використанням експериментально отриманих для титанових сплавів залежностей ступеня повноти перетворень від температури нагріву, який фіксується після охолодження до натурального стану.

Тимчасові і залишкові напруження знаходимо за використання співвідношення:

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(de_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} [\nu de - (1+\nu) de_T] \delta_{ij} \right), \quad (3)$$

де $d\sigma_{ij}$ – прирости компонент тензора напружень, de_{ij} – прирости компонент тензора деформації, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, δ_{ij} – символ Кронекера, $i, j = (1, 2, 3)$.

Зазначимо, що тимчасові напруження при нагріві і залишкові напруження після охолодження визначаються співвідношенням (3), де прийнята аналогія між термічною та структурною дилатаціями. Як приклад, проаналізовано структурний напружений стан циліндричної оболонки при локальному нагріві за геометричних і фізичних параметрів: радіус серединної поверхні оболонки $R=0.0245$ м, товщина $2h=0.001$ м, $E=106$ МПа, $\nu=0.3$. Із отриманих результатів випливає, що розподіл тимчасових і залишкових напружень істотно залежить від наявного фазового складу матеріалу.

STRESS STRAIN STATE IN LOCAL HEATED TITANIUM CIRCULAR SHELL TAKING INTO ACCOUNT PHASE TRANSITION

The problem of definition of stress strain state of local heated circular shell made of titanium alloy BT-23 is posed and solved. The effect of the volume changes occurring during phase transition is taken into account.

УДК 539.3:536.7:537.8:539.8

ВПЛИВ КРИВИНИ НА ПРИПОВЕРХНЕВУ НЕОДНОРІДНІСТЬ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ У ТІЛАХ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Ольга Грицина

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна

Співвідношення нелокальної теорії деформації твердих неферо-

магнітних діелектричних тіл [1] використані для дослідження впливу вільної поверхні тіла на електромеханічні поля у безмежному ізо-
тропному циліндрі (область $r \leq R$) і середовищі з циліндричною по-
рожниною (область $r \geq R$).

Одержано аналітичні розв'язки сформульованих крайових за-
дач, які використані для оцінки впливу кривини поверхні на рівно-
важний розподіл напружень, поверхневий натяг, поверхневу енергію
деформації та зв'язаний поверхневий заряд. Показано, що такий
вплив вагоміший у тонких циліндрах. Збільшення кривини поверхні
приводить до зменшення густини зв'язаного поверхневого заряду та
рівня відповідних напружень (див. рис. 1, де σ_k – складник напру-
жень σ_{zz} , зумовлений кривиною поверхні; $K/G = 2,79$; $\mathfrak{M} = 0,03$;
лінії 1-4 відповідають $R/l_* = 5; 10; 20; 30$; K, G – модулі пружності,
 $\mathfrak{M}$ – параметр взаємозв'язку процесів деформування та локального
зміщення маси, l_* – характерна віддаль матеріалу). Для густини по-
верхневої енергії деформації U_Σ^y одержано формулу, що описує
вплив кривини поверхні κ :

$$\frac{U_\Sigma^y}{U_\Sigma^\infty} = \begin{cases} \frac{K_1(-1/\kappa)}{K_0(-1/\kappa)}, & \kappa < 0 \\ 1, & \kappa = 0, \kappa = \begin{cases} -(\tilde{\lambda}R)^{-1}, & \text{середовище з} \\ & \text{циліндричною} \\ & \text{порожниною} \end{cases} \\ \frac{(K + G/3) I_1(1/\kappa)}{(K + G/3) I_0(1/\kappa) - 2G\mathfrak{M}K_1(1/\kappa)}, & \kappa > 0 \end{cases} \begin{cases} 0, & \text{плоска поверхня;} \\ (\tilde{\lambda}R)^{-1}, & \text{циліндр.} \end{cases}$$

Тут I_j та K_j – модифіковані функції Бесселя 1-го та 2-го роду j -го
порядку, U_Σ^∞ – поверхнева енергія деформації у півпросторі.

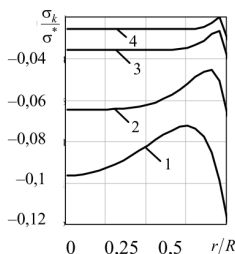


Рис. 1. Вплив радіуса кривини на напруження

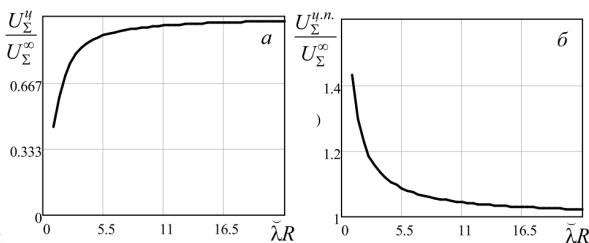


Рис. 2. Залежність поверхневої енергії деформації від радіуса кривини в безмежному циліндрі (а) та середовищі з циліндричною порожниною (б)

Збільшення кривини вільної поверхні безмежного циліндра при-
водить до зменшення абсолютного значення поверхневої енергії,
порівняно з тілом із плоскою поверхнею (рис. 2 а), тоді як у безмеж-

ному просторі з циліндричною порожниною навпаки, збільшення кривини поверхні призводить до збільшення поверхневої енергії (рис. 2 б). Отже, значення поверхневої енергії деформації у тілі з плоскою поверхнею ($\kappa = 0$) не є мінімумом поверхневої енергії U_Σ , як функції кривини поверхні.

Показано також, що наслідком врахування впливу вільної поверхні тіла на його напружено-деформований стан є відмінність від нуля кульового складника p_m тензора напружень. На значення цього складника впливає кривина поверхні: p_m на поверхні циліндричного тіла менше на величину, обернено пропорційну радіусу кривини та прямо пропорційну відношенню густини поверхневої енергії деформації у безмежному циліндрі до поверхневої енергії у масивному тілі з плоскою межею (півпросторі):

$$p_m|_{r=R} = \frac{2}{3} \sigma^* \left[1 - \frac{U_\Sigma^u}{U_\Sigma^\infty} \cdot \frac{3(3K - 4MG)}{2(3K + G)\lambda R} \right].$$

1. Бурак Я., Кондрат В., Грицина О. Основи локально градієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.

THE SURFACE CURVATURE EFFECT ON NEARSURFACE NONHOMOGENEITY OF ELECTRIC AND MECHANICAL FIELDS IN SOLIDS OF CYLINDRICAL GEOMETRY

With the use of the relationships of non-local theory of deformation of non-ferromagnetic dielectrics the dependence of stresses, surface tension, surface bound charge and surface energy of deformation on surface curvature the tension free cylindrical bodies were studied.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПІДКРІПЛЕНЬ ПРЯМОКУТНИХ ОТВОРІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ

Вадим Гудрамович, Етері Гарт, Сергій Рябоконь

*Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України,
вул. Лешко-Попеля, 15, м. Дніпропетровськ, 49005, Україна;*

*Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара,
пр-т Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

Отвори в пластинчато-оболонкових елементах конструкцій при-

водять до зміни напружено-деформованого стану. Це може викликати появу недопустимих деформацій, або руйнування в околі отворів [5, 6, 8]. Основним засобом зменшення такої концентрації є підкріплення країв отворів. Підкріплення може бути здійснено включеннями (накладками) з того ж, або іншого матеріалу.

Розглядається пружна прямокутна пластина з центральним прямокутним отвором, що підкріплений в кутах, під дією стискаючого навантаження. Використання варіаційно-сіткового методу скінченних елементів (МСЕ), який є найбільш розповсюдженим в останній час серед чисельних методів, дозволяє провести багатомасштабне дослідження впливу на напружено-деформований стан (НДС) розмірів пластин і отворів, а також підкріплень отворів різного класу. До таких підкріплень можливо віднести накладки в кутах отворів (зокрема трикутної або прямокутної форми), вставки з основного або іншого матеріалу. Накладки і вставки можуть бути такої ж або більшої товщини як пластина, що розглядається.

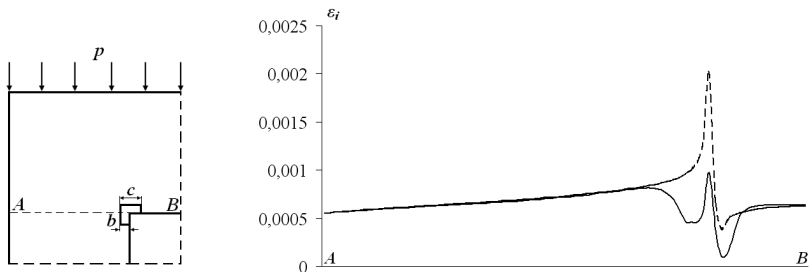
Коли розв'язується багатопараметрична задача, аналогічна вказаній, що зв'язана з перебором великої кількості параметрів, актуальним є розробка розрахункових схем МСЕ, в яких досягається суттєва економія комп'ютерного часу розрахунків. До таких схем відносяться проекційно-ітераційні схеми МСЕ [1].

В роботі розроблено розрахункові проекційно-ітераційні схеми МСЕ. Такі схеми використано для розв'язання багатьох задач про НДС пластин при пружному і пластичному деформуванні матеріалу з прямокутними та іншими отворами, які знаходяться за дії розтягуючих або стискаючих навантажень [2, 3, 7, 9]. В останньому випадку слід додатково досліджувати стійкість пластини. Прикладені навантаження повинні бути меншими, ніж ті, при яких відбувається втрата стійкості пластин. Це накладає відповідні вимоги до геометричних параметрів пластини і отворів, механічних властивостей матеріалу.

Наведемо деякі результати числового аналізу. На рисунку показано розподіл інтенсивностей деформацій в перерізі А-В пластини з отвором, який в кутах підкріплений охоплюючими їх включеннями. Внаслідок симетрії наведено графік для чверті пластини. Відношення модулів пружності матеріалу підкріплень та пластини дорівнює 3:1. Сторона квадратної пластини 0,4 м. Розмір отвору $8 \cdot 10^{-2} \times 8 \cdot 10^{-2}$ м. Позначені на рисунку розміри включення: $b = 10^{-2}$ м, $c = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Величина навантаження $p = 50$ МПа. Суцільна лінія відповідає наявності кутових підкріплень, пунктирна – їх відсутності.

На рисунку видно, що інтенсивності деформацій внаслідок наявності підкріплень в даному випадку знижуються.

Завдяки універсальності методики можуть бути вибрані інші параметри підкріплень, а також параметри підкріплень різноманітної форми. Розроблені програми розрахунку на мові C++ дозволяють розглянути різні класи підкріплень.



При опрацюванні розрахункових схем використано ермітові скінченні елементи. Проекційно-ітераційна схема реалізована на шістьох вкладених двічі скінченно-елементних сітках.

Кількість наближень k_n на n -му кроці ($n = 1, 2, \dots, 6$) визначалось як найменше ціле k , що задовольняє умову

$$\|z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)}\| \leq \varepsilon_n; \quad k = 1, 2, \dots, k_n,$$

де $z_h^{(k_n)}$ – наближений розв’язок дискретної задачі, ε_n – точність обчислень на n -ій сітці, що задана.

При врахуванні пластичного деформування матеріалу слід використовувати методи пружних розв’язків, наприклад, метод змінних параметрів пружності або метод додаткових навантажень, які зводять розв’язання пружно-пластичної задачі до розв’язання послідовності задач теорії пружності. В кожному наближенні розв’язується задача неоднорідної теорії пружності. Розрахунки проводяться до співпадання двох наближень із заданою точністю [4].

1. Гарт Е.Л. Проекційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів в плоских задачах деформованого стану неоднорідних систем / Е.Л. Гарт, В.С. Гудрамович // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2009. – С. 102-105.
2. Гудрамович В.С. Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями / В.С. Гудрамович, Э.Л. Гарт // Упругость и неупругость: Международ. симп., посв. 100-летию со дня рожд. А.А. Ильюшина. – М.: Изд-во МГУ, 2011. – С. 144-147.
3. Гудрамович В.С. Применение проекционно-итерационных схем МКЭ к решению задач упругопластического деформирования оболочек с отверстиями / В.С. Гудрамович, Е.Л. Гарт, С.А. Рябоконь // Вісник Київського національного ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 55-58.
4. Ильюшин А.А. Труды. В 4 т. – Т. 2. Пластичность: 1946-1966 / А.А. Ильюшин. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.
5. Преображенский И.Н. Вырезы в несущих конструкциях / И.Н. Преображенский, И.А. Цурпал. – М.: Машиностроение, 1984. – 112 с.

6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
7. Hart E.L. Applications of the projective-iterative versions of FEM in damage problems for engineering structures / E.L. Hart, V.S. Hudramovich // Maintenance-2012: 2 Int. Conf., 2012, Zenica, Bosnia and Herzegovina: Proceedings. – Zenica: Univ. of Zenica, 2012. – P. 157-164.
8. Hudramovich V.S. Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections / V.S. Hudramovich // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 43, № 12. – P. 1323-1355.
Те саме: Гудрамович В.С. Особенности нелинейного деформирования и критические состояния оболочечных систем с геометрическими несовершенствами / В.С. Гудрамович // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 12. – С. 3-47.
9. Hudramovich V.S. Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / V.S. Hudramovich, E.L. Hart, S.A. Ryabokon' // J. Eng. Math. – 2013. – Vol. 78, Issue 1. – P. 181-197.

IMPACT OF REINFORCEMENTS RECTANGULAR HOLES ON THE STRESS-STRAIN STATE IN PLATE

Influence of reinforcements rectangular holes on the stress-strain state in elastic plate under monoaxial loading is studied. The schemes of projective-iterative version of finite element method are constructed. This schemes permit to investigate the influence reinforcements of indicated and another kinds for wide range their geometrical parameters and mechanical properties of material.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ШАРУВАТИХ ТІЛ СФЕРИЧНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ЗІ СКЛАДНИКАМИ РІЗНОЇ ПРОЗОРОСТІ ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ

Орест Гуменчук, Валентин Можаровський, Анджей Маринович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини,
вул. Советская, 104, м. Гомель, 246019, Республіка Білорусь;*

*Політехніка Опольська,
вул. Катовіцка, 48, м. Ополь, 45061, Польща*

Широке застосування функціональних та конструкційних шаруватих елементів з матеріалів різної для теплового випромінювання прозорості в сучасних приладах та обладнанні спричинює необхідність дослідження їх термомеханічної поведінки як при виготовлен-

ні, так і експлуатації [1, 2]. При цьому вироби з такими елементами можуть зазнавати дії теплового випромінювання. Об'ємні тепловиділення в частково прозорому складнику та теплові потоки на поверхні частково прозорого складника, зумовлені поглинанням енергії випромінювання, викликають нагрів тіла та його деформування. Напруження, що виникають при цьому, можуть перевищити допустимі рівні і змінити функціональні параметри елементів.

Ряд праць [1-3 та ін.] присвячено дослідженню термонапруженого стану шаруватих тіл за стороннього теплового опромінення. Проте розглянуто тіла здебільшого з плоскопаралельними границями і не вивчено термомеханічну поведінку наявних в багатьох виробках елементи сферичної геометричної конфігурації. В зв'язку з цим актуальним є дослідження впливу теплового випромінювання на теплові і механічні властивості шаруватих тіл сферичної конфігурації за теплового опромінення.

В роботі досліджено термомеханічну поведінку двошарової порожнистої вакуумованої кулі з непрозорим та частково прозорим для випромінювання складниками за стороннього теплового опромінення.

Приймаючи ряд припущень (дифузність поверхонь розділу середовищ, конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, постійність характеристик матеріалів на часовому проміжку та інші) на основі співвідношень феноменологічної теорії випромінювання та квазістатичної термопружності формулюємо задачі математичної фізики, що описують процеси теплообміну випромінюванням, теплопровідності та деформації в двошаровій порожнистій кулі зі складниками різної прозорості за врахування спектральних радіаційних характеристик матеріалів. При цьому приймається нелінійний зв'язок між результуючим потоком променевої енергії на поверхні контакту двох складників та враховано тепловиділення в частково прозорому складнику.

Запропоновано методику розв'язування відповідних складових задач про знаходження тепловиділень, температури та напружень в двошаровій порожнистій кулі з непрозорим внутрішнім та частково прозорим зовнішнім складниками за однорідного теплового опромінення, що ґрунтується на використанні різницевих методів.

На основі балансових співвідношень на потоки енергії випромінювання на поверхнях – границях розділу середовищ (падаюче, відбите та те, що пройшло через границю розділу середовищ), записаних з використанням законів Планка та Бугера (розв'язку рівняння переносу), сформульовано систему вихідних інтегро-диференціальних рівнянь для знаходження спектральних густин потоків енергії ефективного випромінювання та параметрів термонапруженого стану кулі. Побудовано ітераційну процедуру для знаходження невідомих на поверхні контакту потоків енергії.

Як приклад, досліджено термомеханічну поведінку двошарової порожнистої кулі із скляним зовнішнім та металічним внутрішнім складниками за дії стороннього однорідного теплового опромінення. Проаналізовано залежності тепловиділень, температури та напружень в кулі від фізичних характеристик матеріалів та геометричних параметрів.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект Ф54.2/015 конкурсу спільних проектів фундаментальних досліджень ДФФД України і РФФД Білорусі).

1. Гачкевич О.Р., Гуменчук О.Б., Пеер-Касперська А. Термонапружений стан частково прозорого шару при зовнішньому тепловому опроміненні за наявності відбивача // Машинознавство. – 2006. – № 7 (109). – С. 3-7.
2. Терлецький Р.Ф., Турій О.П. Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 2. – С. 186-201.
3. Турій О.П. Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл із тонкими прошарками за врахування поглинання та випромінювання теплової енергії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 195-208.

MODELLING OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF LAYERED SPHERICAL BODIES WITH DIFFERENT TRANSPARENCY COMPONENTS SUBJECTED TO THERMAL RADIATION

Mathematical model to describe thermomechanical behavior of two-layer hollow ball subjected to thermal radiation, which is based on the relations of the phenomenological theory of radiation and quasi-static thermoelasticity, is formulated. The model is validated in the case of glass external and metallic internal components of ball subjected to homogeneous thermal radiation.

УДК 539.3

ДВУМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ СЛОЯ

Андрей Земсков, Дмитрий Тарлаковский

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) – МАИ,
Волоколамское шоссе, 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 125993,
Российская Федерация;

Научно-исследовательский институт механики Московского
государственного университета им. М.В. Ломоносова,
Мичуринский пр-т, 1, г. Москва, В-192, 119192, Российская Федерация

Ставится двумерная нестационарная задача для упругого слоя с учётом диффузии. Используется локально равновесная модель механодиффузии, включающая в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнение массопереноса. Решение ищется с помощью рядов Фурье и преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате. Оригиналы изображений искоемых функций находятся аналитически.

Рассматривается однородный упругий ортотропный слой, ограниченный плоскостями $x_2 = 0$ и $x_2 = L$, где Ox_1x_2 – прямоугольная декартова система координат. Полагается, что физико-механические процессы в нем без учёта температурных эффектов описываются следующими уравнениями [1, 2]:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \alpha_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}, \quad D_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Lambda_{ijkl} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l},$$

где по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 2; t – время; u_i – координаты вектора перемещений; T_0 – начальная температура; $\eta = n - n_0$ – приращение объёмной концентрации веществ n относительно начальной концентрации n_0 ; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных среды; ρ – плотность среды; α_{ij} – компоненты тензора, характеризующие объёмное расширение, связанное с массопереносом; $c_{\sigma \varepsilon n}$ – удельная теплоёмкость при постоянной деформации и концентрации; R – универсальная газовая постоянная; D_{ij} – компоненты тензора самодиффузии; $\Lambda_{ijkl} = (RT_0)^{-1} n_0 \alpha_{kl} D_{ij}$.

На границах слоя задано касательное напряжение σ_{12} и перемещение u_2 , а также диффузионный поток J_2 [1]:

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = f_{11}(x_1, t), u_2|_{x_2=0} = f_{21}(x_1, t), J_2|_{x_2=0} = f_{31}(x_1, t), \\ \sigma_{12}|_{x_2=L} = f_{12}(x_1, t), u_2|_{x_2=L} = f_{22}(x_1, t), J_2|_{x_2=L} = f_{32}(x_1, t).$$

где

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha_{ij} \eta, \quad J_i = \Lambda_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} - D_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}.$$

Начальные условия предполагаются однородными:

$$u_i|_{t=0} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta|_{t=0} = 0.$$

Алгоритм решения основан на интегральном представлении искомых функций [3]. Для этого полагается, что функции стоящие в правых частях граничных условий имеют вид $f_i(x) = \delta(x)$. Тогда задача решается с помощью разложения в тригонометрические ряды с последующим применением преобразования Лапласа по времени. Решения в изображениях представляют собой дробно-рациональные функции параметра преобразования Лапласа. Разлагая эти функции на элементарные дроби по таблицам операционного исчисления находятся оригиналы, которые являются фундаментальными решениями исходной задачи. Окончательное решение представляется формулами

$$u_i = \sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^2 G_{imq} * f_{mq}, \quad \eta = \sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^2 G_{3mq} * f_{mq}.$$

где $G_{imq} = u_i$, $G_{3mq} = \eta$ ($m = \overline{1, 3}$, $i = 1, 2$, $q = 1, 2$) – функции Грина.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161 А) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

1. *Tarlovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media // *Encyclopedia of Thermal Stresses*. – V. 2. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – P. 1064-1071.
2. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение трёхмерной задачи об упругой диффузии для ортотропного слоя // *Мат. методы та фіз.-мех. поля*. – 2013. – **56**, № 2. – С. 178-191.

THE TWO-DIMENSIONAL NON-STATIONARY PROBLEM FOR ELASTIC DIFFUSION LAYER

Two-dimensional non-stationary problem for elastic diffusion layer is considered. The influence of diffusion processes on the stress-strain state of the environment is taken into account by using the locally equilibrium model of elastic diffusion, which includes the coupled system of equations of motion of an elastic body and the equations of mass transfer. Decompositions of the unknown functions in Fourier series and then applying the integral Laplace transform with respect to time is used for solutions. Originals of Laplace transforms of the unknown functions are found analytically.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ СПОСОБЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ ИЗДЕЛИЙ ИЗ ФЕРРИТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Роман Ивасько, Карен Казарян, Анида Станик-Бэслер

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3-Б, г. Львов, 79060, Украина;*

*Институт механики АН Армении,
пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, г. Ереван, 0019, Республика Армения;*

*Политехника Опольская,
ул. Любошицка, 3, г. Ополье, 45036, Польша*

Специфика технологии производства ферритовых изделий различного технического применения приводит к необходимости использования термической обработки [1]. В достаточно широком диапазоне температур (вплоть до температур Кюри) термообработка таких изделий может быть осуществлена с использованием электромагнитных полей (ЭМП) (т. н. «низкотемпературная обработка», при которой требуется достичь температуры в теле порядка 150°C). Процесс нагрева происходит также, как и в технологии индукционной термообработки, но в основном за счет особенности электрофизических свойств материала – способности к перемagnetиванию и переполаризации с выделением тепла в периодическом ЭМП (при малых джоулевых тепловыделениях вследствие низкой электропроводности). При этом наличие ЭМП наряду с эффективным технологическим фактором является одним из вредных и опасных экологических факторов современного производства [2]. Биологические последствия влияния электромагнитного излучения на здоровье человека (как работающего с устройствами, содержащими излучающие элементы, так и в среде, подвергающейся посредственному воздействию такого электромагнитного излучения) зависят от длины волны (частоты), уровня излучения, времени воздействия и других т. н. «экологических параметров»).

Для построения рациональных режимов упомянутого выше технологического нагрева (в частности, для технологической тренировки ферритовых изделий, низкотемпературного отжига с целью снятия конструкционных, монтажных или других остаточных напряжений и т.п.) с использованием ЭМП при достижении безопасных значений «экологических параметров» в работе на основании известной методики определения термонапряженного состояния ферритовых тел,

обусловленного воздействием слабых внешних квазиустановившихся ЭМП высокой несущей частоты [3], исследованы, определяющие функциональные тепловые и прочностные технологические характеристики, квазистатические составляющие температуры и напряжений в ферритовом слое, изготовленном из широко применяемого в технике при создании магнитных устройств нестрикционного поликристаллического изотропного материала – никель-цинкового феррита марки 1000НН.

Численные расчеты проведены для слоя, находящегося под воздействием ЭМП, созданного заданной во внешней среде системой квазиустановившихся электрических токов с модуляцией амплитуды, равномерно распределенных по тонкому токопроводящему слою (который моделируется плоскостью, параллельной к основанию ферритового слоя). При этом учтены соответствующие зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей, а также тангенсов углов гистерезисных потерь от частоты поля [5]. Получено, что в окрестности значений частот, определяемых условием $\lambda_k = 2h / (2k - 1)$, $k = 1, 2, \dots$ [4] (при которых длина электромагнитной волны λ в ферритовой среде является кратной двойному характерному размеру тела в направлении ее распространения) напряженности электрического и магнитного полей достигают максимальных значений (резонанс формы).

Получено, что при режимах нагрева на частотах ЭМП, находящихся в окрестности частот параметрического резонанса (резонанса формы) для рассматриваемого ферритового элемента, сокращается время нагрева и уменьшаются значения внешних токов (уменьшаются величины «экологических параметров») при обеспечении необходимых условий термообработки.

1. Бывков Ю.А. Высокотемпературное деформирование и термическая обработка ферритов. – М.: Металлургия, 1988. – 216 с.
2. Аспекты социальной политики в области безопасности производственной среды / М. Гаек, Н. Иванова, И. Мулицка, С. Рябов, Л. Шварцбург. – Москва-Ополе: Янус-К, 2005. – 192 с.
3. Гачкевич А.Р., Ивасько Р.А., Касперский З.И. Методика исследования температурных полей и напряжений в ферритовых телах, находящихся под воздействием слабых электромагнитных полей высокой частоты // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2006. – № 1. – С. 91-96.
4. Ситидзе Ю., Сато Х. Ферриты. – М.: Мир, 1964. – 408 с.
5. Хунпель А.Р. Диэлектрики и волны. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 438 с.

MATHEMATICAL MODELLING AT ELECTROMAGNETIC WAY OF LOW TEMPERATURE HEAT TREATMENT OF ARTICLES MADE OF FERRITE MATERIALS

To construct the rational regimes of technological heating (in particular,

for technological training of ferrite articles, low-temperature annealing in order to remove the design, assembly or other residual stresses) using electromagnetic fields when minimal values of "ecological" parameters are reached the quasistatic components of temperature and stresses in a ferrite layer are studied.

УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ ТЕРМООБРОБКИ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Євген Ірза, Анна Козярська, Анджей Метельські

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополь, 45036, Польща*

В роботі запропоновано загальний підхід до побудови моделей оптимізації теплових режимів термообробки елементів конструкцій. Такий підхід передбачає зокрема наступні важливі етапи:

- математичну постановку відповідних задач оптимізації;
- розробку числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку.

Основним підетапом математичної постановки задач оптимізації теплових режимів є формулювання прямої задачі – задачі, яка описує параметри розглядуваних (враховуваних) фізико-механічних процесів та явищ. Така задача може бути окреслено системою залежностей

$$L_i(\bar{r}, \tau, t, \sigma, \varepsilon, \bar{u}, \bar{h}, \bar{p}) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

які пов'язують параметри наявних процесів: t (температуру), σ (тензор напружень), ε (тензор деформацій), $\bar{u}$ (вектор переміщень) з фізичними і геометричними параметрами тіла та параметрами, що характеризують зовнішні дії: $\bar{h}$ (тепловим навантаженням), $\bar{p}$ (силовим навантаженням) в момент часу τ .

Система рівнянь (1) при заданих теплових навантаженнях $\bar{h}$, зовнішній силі $\bar{p}$ і параметрах еконструкції повинна бути замкненою і визначати параметри стану, які характеризують термо-напружений стан тіла.

Другим підетапом математичної постановки є вибір критерію оптимальності і відповідного функціоналу, який реалізує цей критерій, виходячи з основних цільових призначень процесу термооброб-

ки, можливостей її реалізації. В задачах оптимізації розглядаються функціонали двох типів: інтегральні

$$J_k = \int_{\tau} \int_{\Omega} f_k(\bar{r}, \tau, t, \sigma, \varepsilon, \bar{u}, \bar{h}, \bar{p}) d\Omega d\tau, \quad k = \overline{1, e} \quad (2)$$

і локальні

$$J_k = \max_{\Omega, \tau} f_k(\bar{r}, \tau, t, \sigma, \varepsilon, \bar{u}, \bar{h}, \bar{p}), \quad k = \overline{1, e}. \quad (3)$$

Третім важливим підетапом математичної постановки задач оптимізації є вибір функції керування $\bar{h}$, виходячи з технологічних можливостей керування наявними фізико-механічними процесами в конкретній технології термообробки.

Вимоги, які ставляться до якості виробів і до технологічних процесів термообробки, а також способів реалізації режимів нагріву, приводять до обмежень, які записуються у вигляді:

$$\phi_j(\bar{r}, \tau, t, \sigma, \varepsilon, \bar{u}, \bar{h}, \bar{p}) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4)$$

Тут ϕ_j – задані функції.

Таким чином, задача оптимізації полягає в знаходженні функції керування $\bar{h}$, яка забезпечує мінімум (максимум) функціоналу інтегрального (2) або локального (3) типу і задовольняє співвідношенням виду (1) (в'язям) і (4) (обмеженням).

Розробка числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку складається із наступних основних підетапів:

- побудова алгоритму розв'язування прямих задач;
- побудова алгоритму розв'язування задачі оптимізації.

Алгоритм розв'язування прямих задач базуємо на методах зв'язаних залишків в поєднанні зі скінченно-елементним підходом [1]. Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [2]. В рамках запропонованого підходу проводиться дискретизація за часом з кроком Δt_n тривалості процесу нагріву-охолодження. Оптимальний розв'язок функції керування на конкретному проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-постійних функцій.

Як приклад, знайдено та досліджено оптимальні режими нагріву-охолодження порожнистого циліндра.

Робота виконувалася за підтримки НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (проект ВБ-РФФФД/405).

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. – London: “Butterworth Heinemann”, 2000. – 689 p.
2. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

TO CONSTRUCTION OF OPTIMUM THERMAL MODES OF TREATMENT OF ELEMENTS OF CONSTRUCTIONS

A general approach to construction of optimal thermal conditions of heat treatment of structural elements is offered. The algorithm of solution is based on the finite element method. The solution of the formulated extreme problem is constructed on the basis of the principle of step-by-step parametric optimization.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОПЛАСТИНОК

Стефан Калоеров, Андрей Самодуров

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, Украина*

Существует большая практическая потребность в исследованиях изменения во времени электроупругого состояния (ЭУС) элементов конструкций из пьезоматериалов. Однако, в настоящее время разработаны лишь методы решения задач электроупругости без учета вязкоупругих свойств материала. В данной работе задача линейной вязкоупругости для пьезопластинки сведена к последовательности задач электроупругости, которые решаются с использованием метода комплексных потенциалов [1]. На примере решения задачи для пластинки с эллиптическим отверстием показано изменение во времени значений характеристик ЭУС.

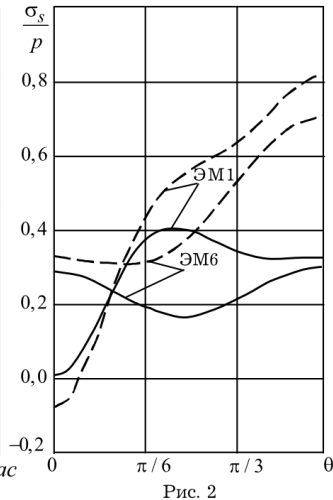
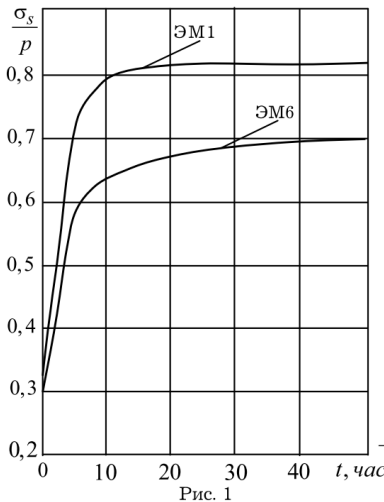
В общем случае рассматривается пьезопластинка с отверстиями, находящаяся в условиях обобщенного плоского электроупругого состояния. К контурам отверстий приложены механические и электрические воздействия. В случае бесконечной пластинки на бесконечности задано однородное электроупругое поле, характеризующееся значениями напряжений и напряженностей или индукций поля. По упругим свойствам пластинка считается вязкоупругой. Принимается, что электрические свойства материала с течением времени не изменяются.

Методом малого параметра, в качестве которого выбрано изменение во времени коэффициента Пуассона, решение задачи электро-

вязкоупругости сведено к последовательности задач электроупругости для определения комплексных потенциалов приближений. Получены граничные условия для определения последних функций, их общие представления для многосвязных областей.

После определения из граничных условий функций приближений заменой степеней малого параметра операторными выражениями находятся значения комплексных потенциалов в любой момент времени, а по ним и основных характеристик ЭУС (напряжений, компонентов векторов напряженности и индукции поля).

В качестве примера решена задача для пластинки с эллиптическим отверстием, контур которого жестко подкреплён и на нём электрическая индукция равна нулю. На бесконечности заданы растягивающие усилия или напряженность электрического поля. Для этого случая проведены численные исследования изменения основных характеристик ЭУС в пластинке во времени из материалов ЭМ1 (монокристалл селенида кадмия) и ЭМ6 (пьезокерамика PZT-5A). На рис. 1 для растяжения пластинки изображены графики изменения во времени нормальных напряжений на площадках, перпендикулярных контуру отверстия, а на рис. 2 изображены графики распределения напряжений около контура отверстия в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях. Видно, что



уже через 50 час. напряжения в пластинке с течением времени практически не изменяются, т.е. в ней устанавливается стационарное состояние. Их значительные изменения происходят лишь в первые 20 час. При переходе в стационарное состояние напряжения изменяются довольно значительно [2].

1. Калосеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
2. Калосеров С.А., Самодуров А.А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластины с подкрепленными отверстиями // Вісн. Донец. ун-та. – Сер. А. Природ. науки. – 2013. – Вип. 1. – С. 42-48.

УДК 539.3

ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ЗАЛИШКОВИХ ФАЗОВОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ В ТОНКИХ СТАЛЕВИХ ПЛАСТИНАХ ЗА ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРІВУ

Тереза Козакевич, Володимир Асташкін, Анна Равска-Скотнічні

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я.С. Підстригача НАН України,

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;

Політехніка Опольська,

вул. Катовіцка, 48, м. Ополь, 45061, Польща

В літературі приведено інтерполяційні аналітичні залежності механічних характеристик маловуглецевих низьколегованих сталевих взірців (твердості, границі міцності, видовження, в'язкості та ін.) від часу охолодження в інтервалі температур евтектоїдних перетворень ($850 \div 500^{\circ}\text{C}$), їхнього хімічного складу, а також відсоткового вмісту фазових складових (мартенситу, бейніту і ферито-перліту), що утворюються внаслідок розпаду аустеніту при монотонному охолодженні після високотемпературного нагріву.

Дана робота присвячена моделюванню та оптимізації за різними критеріями залишкових фазового та напруженого станів тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластин за високотемпературного нагріву рухомими нормально розподіленими джерелами тепла (за наявності одного (основного) джерела, основного джерела і одного та двох додаткових за різної їх локалізації і параметрів потужності).

Відомо, що найбільшу твердість і міцність має низьколегована маловуглецева сталь з переважно мартенситною структурою, а найменші – з ферито-перлітною. При цьому зменшення відсоткового вмісту мартенситу збільшує пластичні властивості металу. Саме фазова складова сталі – мартенсит, який утворюється при монотонному охолодженні після високотемпературного нагріву спричинює в основному появу залишкових структурних напружень, які впливають на

механічні та фізичні експлуатаційні показники виробів зі сталі. Тому з метою покращення пластичних властивостей зони термічного впливу за зменшення рівня залишкових напружень розроблено відповідну методику параметричної оптимізації характеристик рухомих джерел тепла (з одним та декількома центрами локалізації) відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу) при зменшенні рівня залишкових напружень.

За математичної постановки задачі оптимізації характеристик джерел тепла:

✓ оптимізаційною умовою є мінімум функціоналу максимального вмісту мартенситу $M_{\max}$ (за наявних умов теплового впливу)

$$\left[M_{\max}(\bar{Q}) \right] \rightarrow \min;$$

✓ функціями керування є $H(\bar{Q}_2(L, Q_2^*))$ – за наявності одного додаткового джерела $\bar{Q}_2$, яке розташоване на віддалі L по осі Ox_1 від першого (головного) джерела $\bar{Q}_1$; $H(\bar{Q}_3(L, L_1, Q_2^*, Q_3^*))$ – за наявності двох додаткових однакових за потужністю джерел $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$ з центрами, симетрично розміщеними відносно осі Ox_2 на віддалі L від головного джерела $\bar{Q}_1$ та на віддалі L_1 один від другого;

✓ обмеження на змінні керування задовольняють умови: $a \leq L \leq 3a$; $0 \leq L_1 \leq 2a$; $0 \leq Q_2^* \leq Q_1^* / 4$, $0 \leq Q_3^* \leq Q_1^* / 4$, де a – півширина зони термічного впливу пластини по осі Ox_2 (віддаль, де в точках зони термічного впливу температура вища за значення $T_m \approx 500^\circ\text{C}$).

Параметрична оптимізація реалізується послідовним перебором по кожній змінній керування (починаючи зі встановлення координат розміщення центрів локалізації з наступним знаходженням потужностей джерел тепла за врахування першої з умов). При цьому послідовне розв'язування відповідних задач математичної фізики наявних етапів опрацьованої розрахункової схеми здійснюються з використанням методу зважених залишків та МСЕ за врахування числової форми отримання результатів на кожному етапі.

Як приклад, знайдено оптимальні характеристики джерела тепла за наявності системи трьох джерел тепла. Отримана раціональна схема розміщення додаткових двох джерел тепла та їх потужності дозволили зменшити максимальний вміст мартенситу (в 2.4 рази) і значно згладити нерівномірність його розподілу, що зумовило пониження максимальної інтенсивності залишкових напружень, викликаних цим розподілом (вдвічі).

MODELING AND OPTIMIZATION OF RESIDUAL STRESS STATE AND PHASE COMPOSITION OF THIN STEEL PLATE SUBJECTED TO HIGH HEATING

In this paper we discussed the possibility of modeling and optimization for different criteria residual phase and stress state of low-carbon low-alloyed thin steel plates subjected to high temperature by moving normally distributed heat sources. As an example, optimal characteristics of heat source in case of three heat sources are defined.

УДК 624.078.4

УПРОЩЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. НОВЫЙ ПОДХОД

Сергей Куреннов

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина*

В ряде случаев при расчете напряженного состояния соединений необходимо учитывать неравномерность деформаций по ширине соединения. Построение решения задачи о напряженном состоянии соединения в общей двумерной постановке представляется чрезвычайно сложной проблемой [1], аналитическое решение которой пока отсутствует. Известен упрощенный подход, где касательные напряжения в несущих слоях полагаются равными нулю [2, 3].

В работе предлагается новый подход, в основании которого лежит гипотеза о равенстве нулю перемещений несущих слоев в поперечном направлении. Этот подход ранее был использован при решении ряда задач для прямоугольных пластин и балок [4]. Поэтому его применение для двумерного обобщения модели соединения Фолькерсена представляется обоснованным.

Задача сводится к системе двух уравнений в частных производных, а решение строится при помощи метода разделения переменных. Доказана его равномерная сходимость. Проведено сравнение результатов счета с численными расчетами в программе ANSYS 14.

1. Рябенков Н.Г., Артюхин Ю.П. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанского ун-та. – 1981. – № 16. – С. 82-90.
2. Mathias J.D., Grédiac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921-6947.
3. Kurennov S.S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // Mechanics of Composite Materials. – March 2014. –

Vol. 50, No. 1. – P. 105-114 (Russian Original – January-February, 2014. – Vol. 50, No. 1. – P. 147-158).

4. Васильев В.В., Лурье С.А. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // Изв. РАН. МТТ. – 2013, № 4. – С. 40-49.

ON THE SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL OF THE ADHESIVE JOINT. A NEW APPROACH

The analytical solution of the problem of determining the stress state of the adhesive connection received with according to the simplified two-dimensional Volkersen's model. Was used hypothesis of no transverse motion in the bearing layers. The solution is constructed by the method of separation of variables.

УДК 539.3

ЕНЦИКЛОПЕДІЯ З ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ

Роман Кушнір, Юрій Токовий

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Видавництво «Springer» у січні 2014 р. опублікувало енциклопедію з термонапружень – «Encyclopedia of Thermal Stresses» (ETS) [1], головним редактором якої є Річард Гетнарський (Richard B. Hetnarski) – почесний професор факультету інженерної механіки Рочестерського технологічного інституту (США), учень одного з творців сучасної теорії термопружності – відомого польського вченого, академіка та президента (1978-1980) Академії наук Польщі Вітольда Новацького.

Це наймасштабніше англomовне науково-довідкове видання, присвячене тематиці температурних напружень, з тих, що будь-коли виходили друком. Крім тематики термонапружень, ETS містить необхідні відомості з суміжних галузей механіки і математики, таких як теорія пружності та пластичності, термодинаміка, механіка руйнування, вибрані розділи прикладної математики та методів обчислень, методологія експериментальних досліджень тощо. Енциклопедія охоплює як базові відомості, накопичені упродовж десятиліть розвитку вказаних галузей науки, зокрема матеріали підручників та класичних робіт, так і широкий спектр нових результатів сучасної теорії температурних напружень, деякі історичні замітки, подані належним чином дискусійні матеріали, перспективні напрями майбутніх досліджень, нові ідеї, методи і т.п. Таке поєднання робить ETS особливо привабливою

для читацької аудиторії різної науково-професійної підготовки – студентів та аспірантів природничих та інженерних спеціальностей, викладачів та наукових працівників, інженерів.

ETS має 11 томів загальним обсягом 6726 сторінок, її опубліковано як в електронному, так і в друкованому вигляді. Це видання є зібранням енциклопедичних статей, розміщених в алфавітному порядку. Більшість статей доповнено тематичними перехресними посиланнями на статті подібної тематики, що дає змогу читачеві ґрунтовніше ознайомитися з матеріалом. Завдяки спільним зусиллям колегії співредакторів (у складі 30-ти знаних у світі вчених у галузі температурних напружень) було залучено понад 510 авторів, зібрано та опрацьовано 708 статей, які й утворили цю енциклопедію.

Кожен із співредакторів відповідав за певний тематичний напрям, умовно названий секцією, що становив близько 200 сторінок видання (приблизно від 20 до 50 статей). Функції співредакторів полягали у підборі матеріалів, запрошенні авторів для написання окремих статей, редакційному та науковому опрацюванні отриманих матеріалів, узгодженні змісту статей своєї секції із загальним змістом ETS, організації взаємодії авторів із видавцем тощо. Для роботи над енциклопедією запрошували відомих учених з провідних наукових центрів світу, більшість з яких є членами редколегії *Journal of Thermal Stresses* або організаційного комітету Міжнародного конгресу з термонапружень.

Значний доробок у цьому міжнародному ґрунтовному виданні мають праці представників наукових шкіл з теренів пострадянського простору, зокрема, українських учених. Тут значною мірою представлено багаторічний науковий доробок відомих наукових шкіл з термомеханіки України та Росії, зокрема, академіків АН України А.Д. Коваленка (Київ) і Я.С. Підстригача (Львів), члена-кореспондента РАН Е.І. Григолюка (Москва), а також наукових осередків з Дніпропетровська, Донецька, Санкт-Петербурга, Новосибірська та інших наукових центрів. Детальний огляд цих статей відображено у публікації [2].

Робота над ETS тривала понад три з половиною роки. Успішне її завершення відбулося завдяки активній праці запрошених авторів, роботі, яка провадилася редакційною колегією ETS, налагодженій їх тісній співпраці з авторами статей та представниками видавництва «Springer». Сприяли цьому також координаційні зустрічі співредакторів на IX та X Міжнародних конгресах з термонапружень, які проводилися відповідно 2011 р. у Будапешті (Угорщина) та 2013 р. у Нанкіні (Китай). Під час другого з названих конгресів 2 червня 2013 р. відбулася перша офіційна презентація «*Encyclopedia of Thermal Stresses*», організована як окреме засідання. У виступах було відзначено, зокрема, масштабність ETS, її унікальність як єдиного та найповнішого на сьогоднішній час видання наукової літера-

тури, присвяченого тематиці теплових напружень, доступність для широкого кола читачів, великі перспективи використання матеріалів у навчальній, науковій та виробничій сферах.

1. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Hetnarski R.B. (ed.). – Springer, 2014. – Vol. 1 – Vol. 11.
2. *Kushnir R.M., Tokovyy Yu.V.* Review on «Encyclopedia of Thermal Stresses» // Мат методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 163-170.

ENCYCLOPEDIA OF THERMAL STRESSES

The short review on «Encyclopedia of Thermal Stresses» (Springer, 2014, Vol. 1 – Vol. 11) is presented.

УДК 539.3

МІСЦЕВІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІ СТАНИ СКЛАДЧАСТИХ СИСТЕМ

Віктор Левін, Володимир Мітраков

*Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
вул. Державіна, 2, м. Макіївка, Донецька область, 86123, Україна*

Складчасті системи є розрахунковою схемою деяких конструкцій покриттів та багатьох відповідальних споруд, тому вони привертають увагу дослідників вже близько ста років. Далі розглядаємо тільки призматичні складчасті системи.

Специфіка складок обумовила створення низки спеціалізованих теорій, заснованих на різних системах гіпотез. Ці гіпотези значно звужували область їх застосування і не давали можливості вирішувати важливі для практики задачі, перш за все – враховувати збурення полів деформацій та фізичну нелінійність. Саме для таких випадків призначений метод, основою якого є дискретно-континуальна модель Канторовича-Власова та метод вихідних рівнянь Мілейковського. Схема дискретизації відповідає геометрії вказаних об'єктів, що забезпечує суттєву економію часу підготовки вихідних даних та обчислень, а також потрібної пам'яті комп'ютера порівняно з поширеними програмами МСЕ [1].

Складку виконано з армованого пружнов'язкопластичного матеріалу (залізобетону), для якого під час нормальної експлуатації припустимо утворення тріщин. Аналіз процесу тривалого деформування виконується методом дискретного подовження за параметром часу, а короточасного деформування – методом дискретного подовження

за параметром навантаження з ітераційним уточненням на кожному кроці модифікованим методом Ньютона, видозміненим стосовно особливостей задачі.

Неповна дискретизація системи виконується шляхом її розбиття на поздовжні смужки – грані за допомогою поздовжніх ліній – ребер. Розподіл переміщень поперек грані апроксимується лінійною комбінацією відповідних координатних функцій.

Деформування складки описується граничною задачею для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь на $[0, H]$

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{P}_f + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B}_1\mathbf{Z}(0) = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{B}_2\mathbf{Z}(H) = \mathbf{F}_2,$$

де $\mathbf{Z}(z)$ – вектор шуканих змінних (перша половина котрого – узагальнені переміщення, друга – відповідні зусилля), $\mathbf{A}$ – матриця коефіцієнтів; $\mathbf{P}_f$, $\mathbf{P}$ – вектори фіктивних та дійсних навантажень; $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{F}_i$ – матриці та вектори.

Один з прикладів розрахунку [2] – складка на рис. 1 а (залізо-бетонна башта, замкнений переріз, два прямокутних прорізи).

На рис. 1 б показано епюри розподілу нормальних напружень у бетоні у горизонтальному перерізі на рівні верху прорізу (на розгортці стін, лівий край – біля прорізу) для різних рівнів горизонтального навантаження (згинальний момент у перерізі: 1 – $M=82,6$ мН*м; 2 – $M=125,2$ мН*м; 3 – $M=142,3$ мН*м; 4 – ділянка руйнування стиснутого бетону. На епюрах 1 та 2 зліва – концентрація напружень біля прорізу, на епюрах 3 можна побачити висхідну та спадну гілки діаграми деформування бетону; на епюрах 2 та 3 праворуч – зони руйнування розтягнутого бетону (у зонах руйнування – нульові напруження).

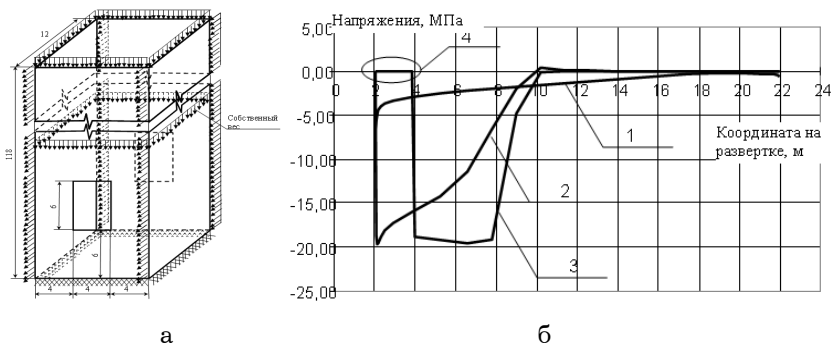


Рис. 1

Висновок. Даний метод дає можливість виявити вплив вихідних неоднорідностей, та таких, що з'являються у процесі навантаження.

Зріст навантаження внаслідок нелінійності визначальних співвідношень приводить до викривлення епюри напружень та появи ділянок нульових напружень у місцях руйнування бетону.

1. Левин В.М. Полудискретная математическая модель деформирования неупругой складчатой системы // Вісн. Донец. ун-ту. – Сер. А. Природничі науки. – 2004. – № 1, ч. 1. – С. 171-178.
2. Левин В.М., Митраков В.А. Численное моделирование процессов деформирования и разрушения пластин и складок из армированного упруго-пластического материала при наличии жесткого включения // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – Т. 2. – Труды VII Междунар. научн. конф. – Донецк-Мелекино, 11-14 июня 2013 г. – С. 20-24.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

Александр Мазнев, Татьяна Бычкова

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, Украина

Рассмотрено движение намагниченного неавтономного гиростата, который несет на себе электрические заряды и находится под действием потенциальных и гироскопических сил. Уравнения движения такого гиростата можно записать в виде [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times B\mathbf{v} + \mathbf{s} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times C\mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L(t). \quad (2)$$

Они допускают два первых интеграла

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - 2^{-1} (B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя, который связан с вектором угловой скорости соотношением $\boldsymbol{\omega} = a \mathbf{x}$ (a – гирационный тензор), $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}, \lambda(t)$ – переменные задачи; $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{s}$ – постоянные векторы; B, C – постоянные матрицы третьего порядка; $L(t)$ – проекция момента действующих сил на ось вращения носимого тела.

Поставлена задача о нахождении условий существования трех инвариантных соотношений (ИС)

$$x_1 = b_0 + b_1 v_1, \quad x_2 = c_0 + c_2 v_2, \quad x_3 = d_0 + d_3 v_3 \quad (4)$$

для уравнений (1), (2) в предположении, что гиростат не является симметричным.

В исследованиях использованы методы, предложенные Т. Леви-Чивитой [2] и П.В. Харламовым [3]. Согласно этим методам производная от (4) с учетом уравнений (1) запишется

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{\lambda} &= \lambda (\beta_0 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3) + \gamma_0 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 + \gamma_{23} v_2 v_3, \\ \alpha_2 \dot{\lambda} &= \lambda (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_3 v_3) + \sigma_0 + \sigma_1 v_1 + \sigma_3 v_3 + \sigma_{13} v_1 v_3, \\ \alpha_3 \dot{\lambda} &= \lambda (\eta_0 + \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2) + \xi_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_{12} v_1 v_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (2) на ИС (4) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= a_3 d_0 v_2 - a_2 c_0 v_3 + (a_3 d_3 - a_2 c_2) v_2 v_3, \\ \dot{v}_2 &= a_1 b_0 v_3 - a_3 d_0 v_1 + (a_1 b_1 - a_3 d_3) v_1 v_3, \\ \dot{v}_3 &= a_2 c_0 v_1 - a_1 b_0 v_2 + (a_2 c_2 - a_1 b_1) v_1 v_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Интеграл моментов из (3) на инвариантных соотношениях (4) будет

$$\begin{aligned} \lambda &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)^{-1} [k - b_0 v_1 - c_0 v_2 - d_0 v_3 + \\ &+ 2^{-1} (B_1 - 2b_1) v_1^2 + 2^{-1} (B_2 - 2c_2) v_2^2 + 2^{-1} (B_3 - 2d_3) v_3^2]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для анализа решения уравнений (5), (6) введены следующие соотношения

$$v_1 = \cos \theta, \quad v_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad v_3 = \sin \theta \sin \varphi, \quad (8)$$

где θ и φ новые переменные. Функции v_i из (8) параметризуют геометрический интеграл из (3).

Без ограничения общности считаем, что $\alpha_1 \neq 0$. Подставим $\dot{\lambda}$ из первого уравнения системы (5) во второе и третье уравнения этой системы и потребуем, чтобы полученные уравнения выполнялись для любых значений переменных θ и φ . Тогда получим систему уравнений, которой должны удовлетворять параметры задачи (1), (2) и инвариантных соотношений (4):

$$\begin{aligned} 2b_2 a_3 d_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_2^2 \gamma_{23} &= 0, \quad 2b_2 a_2 c_2 (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) + \alpha_3^2 \gamma_{23} = 0, \\ \alpha_2 \alpha_3 (2a_2 c_2 b_2 + \gamma_{23}) &= 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 (2a_3 d_3 b_2 + \gamma_{23}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2(a_1b_1b_2 - \xi_{12}) &= 0, & \alpha_3(\gamma_{23} - \xi_{12}) &= 0, \\ \alpha_2(\sigma_{13} - \gamma_{23}) &= 0, & \alpha_3(\sigma_{13} - a_1b_1b_2) &= 0 \dots\end{aligned}\quad (9)$$

Многоточие в системе (9) обозначает уравнения, которые не выписаны в силу их громоздкости.

Показана разрешимость полученной системы алгебраических равенств (9). Одним из решений является решение, которое характеризуется равенствами $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и условиями, при выполнении которых функция λ из формулы (7) имеет вид $\lambda = \kappa_0 + \kappa_1 v_1$, где κ_0 и κ_1 некоторые постоянные.

1. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
2. Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики: в 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
3. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.

CONDITIONS OF EXISTANCE OF THREE LINEAR INVARIANT RELATIONS IN THE PROBLEM ON MOTION OF NONAUTONOMOUS GYROSTATE

The motion of the magnetized nonautonomous gyrost, which carries the electrical charges and is under the action of potential and gyroscopic forces, is considered.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОД РОЗРАХУНКУ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З РОЗШАРУВАННЯМИ

**Михайло Марчук, Володимир Харченко, Дмитро Клименко,
Микола Хом'як**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Державне підприємство "Конструкторське бюро
"Південне" ім. М.К. Янгеля",
вул. Криворізька, 3, м. Дніпропетровськ, 49008, Україна*

Типовою тенденцією розвитку сучасного аерокосмічного та високотехнологічного машинобудування є застосування нових конструк-

тивних матеріалів. Серед них виділимо композиційні матеріали, що мають шарувату структуру. Відмінною рисою традиційних композитів є одночасність процесу створення конструкції та проектування їхніх властивостей. Під час цього процесу на різних етапах наявні відмінні фізичні, хімічні та агрегатні стани, що викликають зміну механічних та теплових напружень. За деяких умов такі напруження та деформації призводять до накопичення пошкоджень та мікротріщин на поверхнях розділу, котрі суттєво впливають на міцність та надійність конструкцій. Дефекти такого роду можуть виникнути також у структурах, виконаних із шаруватих композиційних матеріалів, внаслідок дії інтенсивних експлуатаційних силових і температурних факторів. Застосування існуючих інженерних методик розрахунку визначальних напружень в конструктивних елементах з вищевказаними дефектами веде до значних похибок як кількісного, так і якісного характеру, тому що вони не враховують наявності місця розташування та геометрії пошкоджень. Однак саме ці характеристики напруженого стану використовуються для прийняття рішень про можливість продовження експлуатації чи їхньої заміни. Отже, розвиток методів розрахунку напружень в реальних шаруватих композиційних оболонках з розшаруваннями є важливою проблемою математичного моделювання в механіці композитів. Це тісно пов'язано з побудовою адекватних уточнених математичних моделей деформування таких оболонок з урахуванням специфічних властивостей композиційних матеріалів і дискретності розгляду шарів за товщиною. Останнє дає змогу визначати міжшарові контактні напруження з урахуванням пошкоджень, границі яких відомі наперед як результат виробничих процесів, а також нових, що можуть з'явитися внаслідок експлуатаційних навантажень, як правило, з невідомими границями. Вирішення цих проблем вимагає розвитку ефективних числових методів та програмного забезпечення для розрахунку конструкцій з композиційних матеріалів дискретної структури за товщиною, чому й присвячена ця робота.

Подано загальне формулювання проблеми контактних напружень в шаруватих структурах на основі співвідношень уточнених теорій композиційних тонкостінних елементів конструкцій. Побудовано розширений функціонал еквівалентної варіаційної задачі

$$J_{(m,n)}^L(\bar{u}^{(j)}, \bar{\sigma}^{(j,j+1)}) = I_{(m,n)}(\bar{u}^{(j)}) - \sum_{j=1}^{N-1} \int_{S^{(j,j+1)}} (\bar{u}_+^{(j)} - \bar{u}_-^{(j+1)} + [\bar{u}^{(j)}]) \bar{\sigma}^{(j,j+1)} dS^{(j,j+1)},$$

що є основою змішаної схеми методу скінченних елементів. Вузловими невідомими є узагальнені переміщення серединних поверхонь та контактні напруження на міжшарових поверхнях.

Розроблено програмне забезпечення для комп'ютерного моделювання процесів деформування композитних оболонок обертання з розшаруваннями на поверхнях розділу за дії комбінованих експлуатаційних умов. Виконано тестування на низці відомих задач з ідеальним міжшаровим зв'язком та чисельно досліджено напружено-деформований стан для двошарового балона під дією внутрішнього тиску з локальним дефектом в його циліндричній частині (див. рис. 1).

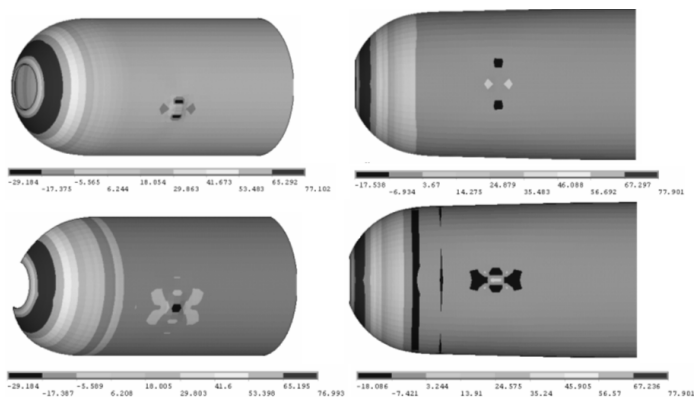


Рис. 1 Радіальні напруження в двошаровій оболонці з дефектом

MATHEMATICAL MODEL AND METHOD FOR CALCULATING OF LAYERED COMPOSITE SHELLS OF ROTATION WITH DELAMINATIONS

The techniques of computer and numerical modeling of deformation processes for layered composite shells of rotation under operating conditions with delaminations at the interface are developed and tested. It is possible to investigate the stress-strain state of a high pressure two-layer vessel with a local defect in the cylindrical part.

УДК 539.4:621.6

МЕТОДИКА, РЕАЛИЗУЮЩАЯ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ОБЪЕМНОМ ТЕЛЕ ПРИ ЗАДАННЫХ ОБЛАСТЯХ КОНТАКТА И ДЕЙСТВУЮЩЕМ ДАВЛЕНИИ

Валентин Можаровский, Дмитрий Кузьменков

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь*

Для моделирования работы систем, например «массивная шина-

дорожное покрытие», необходимо создавать новые методики и методы расчета контактных задач о взаимодействии цилиндрических тел с упругим основанием. На основании экспериментальных исследований (или численных) [1, 2] определяется зона контакта и распределение давления в контакте. Затем по созданному алгоритму находим напряженно-деформированного состояния контактирующих тел, например, автомобильных шин (рис. 1). Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы. Для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Применялись прямоугольные конечные элементы. Данная программа позволяет находить напряженно-деформированное состояние (НДС) в упругом теле при изменении зон контакта и нагружающего давления во времени. Метод основан на считывании цвета в зоне контакта (каждому давлению в точке соответствует свой цвет). Например, экспериментально полученные результаты можно обработать и получить картину изменения НДС.

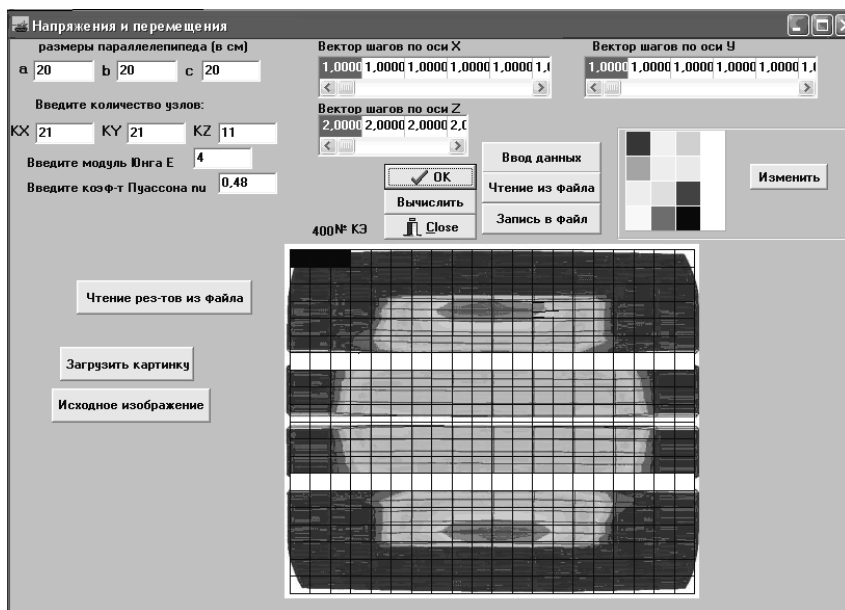


Рис. 1 Основное окно программного комплекса

Рассмотрим алгоритм распознавания загруженного из файла изображения. Сначала загружаем изображение, его разбиваем на конечные элементы (КЭ) и определяем средний цвет в КЭ и соотносим его к одному из выбранных в программе цветов, которому соответствует

определенное значение нагрузки (рис. 1). В программе также предусмотрена возможность просмотра и изменения значений давления, соответствующие определенным цветам (кнопка «Изменить»).

Построенную дискретизацию загруженного из файла изображения можно сохранить в файл на диске. После нажатия кнопки «Чтение из файла» на экране появится раскрашенная дескриптивизированная область. Т.к. при большом числе КЭ программа работает значительное время, была предусмотрена возможность записи полученных результатов (исходные данные, напряжения, перемещения) в файл. Имя файла генерируется динамически внутри программы и составляется из имен соответствующих величин и их значений. Используя кнопку «Чтение рез-тов из файла» можно считать эти результаты в любой момент и просмотреть их численное и графическое представление.

Также была разработана процедура, осуществляющая автоматическую подгонку загружаемого изображения под заданный в программе размер и конвертацию файла в используемый в программе формат.

За один запуск программы решаем несколько (до 5) различных примеров, исходные данные которых либо вводятся пользователем, либо загружаются из файлов. После расчета нескольких примеров можно построить графики выбранных компонент напряжения или перемещения для всех просчитанных примеров (изменения компонента напряжения или перемещения с течением времени).

Просчитано множество различных серий тестовых примеров. Получены результаты, полностью согласующиеся с экспериментальными данными.

1. Рыжов С.А., Ильин К.А., Варюхин А.Н. Проектирование шин с использованием программного комплекса ABAQUS // САПР и графика. – 2006. – № 1.
2. Шилько С.В., Можаровский В.В., Анфиногенов С.Б., Хотько А.В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Мн., 2007. – С. 135-142.

THE TECHNIQUE REALIZING DEFINITION OF PRESSURE AND MOVINGS IN A VOLUMETRIC BODY AT SET AREAS OF CONTACT AND WORKING PRESSURE

The problem of definition of pressure and movings in the volumetric body, the set form is considered at the set areas of contact and working pressure. The algorithm of the problem's decision has been developed and the meeting program complex is created.

УДК 539.3:534.1

АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ ВЗДОВЖ ВИГОТОВЛЕНИХ З НИЗЬКОСИМЕТРИЧНИХ КРИСТАЛІВ ЦИЛІНДРІВ ГЛАДКИХ КРИВОЛІНІЙНИХ ПЕРЕРІЗІВ

Ігор Моїсеєнко, Валерій Сторожев

Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, м. Донецьк, 83001, Україна

Запропоновано двоетапну процедуру побудови дисперсійного співвідношення для нормальних пружних хвиль, що поширюються вздовж розглядуваного у безрозмірних віднесених до параметра R^* координатах $Ox_1x_2x_3$ видовженого просторового монокристалічного циліндра моноклінної системи з віднесеними до c^* нормованими пружними сталими c_{ij} , густиною ρ та ортогональними осьовому напрямку Ox_3 площинами пружної симетрії, однозв'язний переріз якого S має контур Γ з параметричним рівнянням

$$\begin{aligned}(x_1)_\Gamma &= R(\cos(\theta) + \varepsilon \cos(m\theta)), \\ (x_2)_\Gamma &= R(\sin(\theta) - \varepsilon \sin(m\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Описаний таким чином переріз є еліпсом з півосями a, b при $m = 1$, $R = (a + b)/2$, $\varepsilon = (b - a)/(b + a)$, або правильним $(m + 1)$ -кутником з округленими кутами у випадку $m \geq 2$.

На першому етапі визначається базисна множина частинних розв'язків експоненціального типу для системи диференціальних рівнянь відносно комплексних амплітудних складових $u_j(x_1, x_2)$ у функціях переміщень $\tilde{u}_j(x_1, x_2, x_3, t) = u_j(x_1, x_2) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_3))$ в нормальних хвилях вздовж осі циліндру, яка у розглядуваному випадку має узагальнену форму

$$\begin{aligned}L_{ij}(\partial_1, \partial_2) u_j(x_1, x_2) &= 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ L_{ij}(\partial_1, \partial_2) &= \alpha_{ij}^{(11)} \partial_1^2 + \alpha_{ij}^{(22)} \partial_2^2 + \alpha_{ij}^{(12)} \partial_1 \partial_2 + \alpha_{ij}^{(1)} \partial_1 + \alpha_{ij}^{(2)} \partial_2 + \alpha_{ij}^{(0)}, \\ \alpha_{11}^{(11)} &= c_{11}, \quad \alpha_{11}^{(22)} = c_{66}, \quad \alpha_{11}^{(12)} = c_{16}, \quad \alpha_{11}^{(1)} = \alpha_{11}^{(2)} = 0, \quad \alpha_{11}^{(0)} = \Omega^2 - c_{55}k^2, \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\alpha_{33}^{(11)} = c_{55}, \quad \alpha_{33}^{(22)} = c_{44}, \quad \alpha_{33}^{(12)} = 2c_{45}, \quad \alpha_{33}^{(1)} = \alpha_{33}^{(2)} = 0, \quad \alpha_{33}^{(0)} = \Omega^2 - c_{33}k^2;$$

Зазначену множину $\{\bar{u}_p(x_1, x_2)\}_{p=1}^{\infty}$ складають вектор-функції

$$\bar{u}_p(x_1, x_2) = \bar{\lambda}_p \exp(v_{1p}x_1 + v_{2p}x_2),$$

в яких пари (v_{1p}, v_{2p}) утворені попередньо заданими спеціальним чином значеннями v_{1p} та відповідними значеннями v_{2p} , які при цьому задовольняють поліноміальним рівнянням шостого порядку

$$\det \|\tilde{L}_{ijp}\| = 0, \quad \tilde{L}_{ijp} = L_{ij}(v_{1p}, v_{2p});$$

$$\bar{\lambda}_p = (\lambda_{1p}, \lambda_{2p}, \lambda_{3p}), \quad \lambda_{1p} = (\tilde{L}_{12p}\tilde{L}_{13p} - \tilde{L}_{11p}\tilde{L}_{23p}) / (\tilde{L}_{11p}\tilde{L}_{22p} - \tilde{L}_{12p}^2),$$

$$\lambda_{2p} = (\tilde{L}_{12p}\tilde{L}_{23p} - \tilde{L}_{22p}\tilde{L}_{13p}) / (\tilde{L}_{11p}\tilde{L}_{22p} - \tilde{L}_{12p}^2), \quad \lambda_{3p} = 1.$$

На другому етапі представлення амплітудної складової поля хви-
левих переміщень $\bar{u}$ у формі ряду $\bar{u} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \bar{u}_p(x_1, x_2) \exp(ikx_3)$ за

множиною базисних розв'язків з невизначеними коефіцієнтами ви-
користовується при формулюванні заданих крайових умов на зов-
нішній поверхні з трансформацією останніх у функціональні рівнян-
ня, їх наступною алгебраїзацією та одержанням нескінченної систе-
ми лінійних рівнянь відносно A_p на підставі застосування співвідно-
шень контурного розкладання експоненціальних функцій в ортого-
нальні ряди

$$\left(\exp(v_{1p}x_1 + v_{2p}x_2) \right)_{\Gamma} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(J_s(-i\varepsilon R v_{12p}) \cdot \right. \\ \left. \cdot J_{n-ms}(-iR v_{12p}) \left(\frac{v_{2p} + i v_{1p}}{v_{12p}} \right)^{n-ms} \left(\frac{v_{2p} - i v_{1p}}{v_{12p}} \right)^s \right).$$

У підсумку визначник редуційованої нескінченної системи від-
носно A_p є шуканою дисперсійною функцією, що підлягає числовим
дослідженням. Наведено приклади реалізації описаної методики для
циліндричних хвелеводів еліптичних перерізів з орторомбічних мо-
нокристалів.

**ANALYTICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE PROBLEM OF
PROPAGATION OF ELASTIC WAVES ALONG CYLINDERS OF LOW-SYMMETRY
CRYSTALS WITH SMOOTH CURVILINEAR CROSS-SECTION**

Two-step procedure is presented for constructing of dispersion equation for normal elastic waves propagating along the spatial cylinder of monocrystalline monoclinic system. The plane of elastic symmetry is orthogonal to generatrix of the cylinder. Cross section of the cylinder is an ellipse or a regular polygon with rounded corners.

УДК 539.3

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО
СТАНУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ ЗА ДІЇ ГАРМОНІЧНОГО
ЗА ПОПЕРЕЧНОЮ КООРДИНАТОЮ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО
ПОЛЯ В РЕЖИМІ З ІМПУЛЬСНИМ МОДУЛІВНИМ СИГНАЛОМ**

Роман Мусій, Галина Стасюк, Дмитро Тарлаковський

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

Технічний університет Карлсруе, Німеччина;

*Науково-дослідний інститут механіки Московського державного
університету ім. М.В. Ломоносова,*

Мічурінський пр-т, 1, м. Москва, В-192, 119192, Російська Федерація

Відомі дослідження термонапруженого стану електропровідного шару постійної товщини $2h$, віднесеного до декартової системи координат $Oxyz$, площина xOy якої збігається із серединною поверхнею шару, за однорідної дії імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) з модуляцією амплітуди [1]. Проте в процесі експлуатації електропровідні пластини часто знаходяться за неоднорідної дії таких ЕМП. Тому є актуальним дослідження термомеханічної поведінки шару, основи якого $z = \pm h$ перебувають за умов конвективного теплообміну з довкіллям і вільні від силового навантаження, який знаходиться за гармонічної за поперечною координатою електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульованим сигналом (РІМС), що задана значеннями дотичної компоненти $H_y(x, z, t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; H_y; 0\}$ на основах $z = \pm h$, тобто окреслена умовою

$$H_y^{\pm}(x, t) = H_0 \varphi_0(t) \sin(\omega t + \phi) \cos(\vartheta x), \quad (1)$$

де H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля на основах шару, $\varphi_0(t)$ – функція, що описує модульний сигнал для несучих електромагнітних коливань частоти ω , ϕ – початкова фаза, ϑ – частота зміни ЕМП за поперечною координатою x . Для визначення компоненти $H_y(x, z, t)$, температури $T(x, z, t)$ та відмінних від нуля компонент $\sigma_{ik}(x, z, t)$ ($i, k = x, y, z$) тензора напружень використовуємо співвідношення двовимірної динамічної задачі термомеханіки для електропровідного шару з плоскпаралельними границями [2].

Підставляючи вираз (1) у вихідні співвідношення розглядуваної задачі та використовуючи відому методику її розв'язування [2], отримуємо відповідні йому вирази ключових функцій $H_y(x, z, t)$, $T(x, z, t)$, $\sigma_{ik}(x, z, t)$ ($i, k = x, y, z$).

Проведено аналіз термомеханічної поведінки неферомагнітного шару товщиною $2h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, виготовленого зі сталі Х18Н10Т, за частот електромагнітної дії, які містяться в околі та поза околom резонансних. Розглянуто частоти, за яких період зміни за координатою x відповідає періоду коливань, а також є значно більший тривалості модульного імпульса t_i .

Параметри модульного імпульса $\varphi_0(t) = k_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t})$ вибирались такими: $\beta_1 = -\ln \varepsilon / t_i$, $\beta_2 = 2\beta_1$, що відовідає імпульсу з фронтом наростання в 10 разів меншим тривалості імпульса ($\varepsilon = 0.01$ – значення $\varphi_0(t)$ за $t = t_i$), $k_0 = 2.5$, тривалість імпульса $t_i = 10^{-4} \text{ с}$. Параметр ϑ вибирався так, щоб в один період l гармонічної зміни ЕМП за поперечною координатою x вкладалося n півтовщин шару, тобто $l = nh$ ($\vartheta = 2\pi/l$).

Отримано, що:

- за збільшення періоду зміни дії за координатою x розв'язок задачі збігається з розв'язком задачі за відповідної однорідної дії;
- порівняно з однорідною дією додатково виникають сили F_x та зсувні напруження σ_{xz} , які є суттєвими за високих значень параметра періодичності; рівні напружень σ_{xz} і σ_{zz}^F однакові, а сила F_x може перевищувати F_z вдвічі;
- за рахунок неоднорідності ЕМП отримано додаткові резонансні частоти, які залежать також і від параметра неоднорідності ϑ ;

- за значення частот $\omega \neq \omega_{rj}$ ($j = \overline{1,4}$), де ω_{rj} – резонансні частоти, визначальними є складники напружень σ_{xx}^Q і σ_{yy}^Q , зумовлені джоулевым теплом;
- за частот $\omega = \omega_{rj}$ ($j = \overline{1,4}$) складники напружень σ_{zz}^F і σ_{xz}^F , зумовлені пондеромоторною силою, стають співмірними з напруженнями σ_{xx}^Q і σ_{yy}^Q .

Робота виконувалася за підтримки НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (проект ВБ-РФФД/382).

1. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В. Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
2. Гачкевич О., Мусій Р., Стасюк Г. Плоска зв'язана динамічна задача термомеханіки для електропровідного шару з плоскопаралельними границями за нестационарної неоднорідної електромагнітної дії // Вісник Національного ун-ту «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С. 87-93.

THERMOSTRESSED CONDITION OF THE ELECTROCONDUCTIVE LAYER AT INFLUENCE OF HARMONIOUS ON CROSS-SECTION COORDINATE OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE MODE WITH THE PULSE MODULATING SIGNAL

The decision of a problem of thermomechanics for an electroconductive layer with plane-parallel borders is found at electromagnetic action in a mode with a pulse modulating signal. It's investigated a thermomechanical behaviour is numerically at such action.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ ЗА НЕОДНОРІДНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ

Роман Мусій, Галина Стасюк, Юзеф Шимчак

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

Технічний університет Карлсруе, Німеччина;

Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополь, 45036, Польща

Відомі математичні моделі опису термомеханічної поведінки електропровідного шару постійної товщини $2h$ віднесеного до декартової системи координат $Oxyz$, площина xOy якого збігається із серединною поверхнею шару, за різних типів однорідних нестационарних електромагнітних дій [1]. Проте в процесі експлуатації електропровідні пластини часто знаходяться за таких неоднорідних електромагнітних дій. Тому є актуальною побудова методики дослідження термонапруженого стану шару, основи якого $z = \pm h$ перебувають за умов конвективного теплообміну з довкіллям і вільні від силового навантаження, за неоднорідної нестационарної електромагнітної дії. При цьому дія задана значеннями відмінної від нуля дотичної компоненти $H_y(x, z, t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; H_y; 0\}$ на основах, тобто окреслена умовою $H_y(x, \pm h, t) = H_y^\pm(x, t)$, де t – час. Тут $H_y^\pm(x, t)$ – задані функції. Матеріал шару однорідний ізотропний і неферомагнітний, а його фізико-механічні характеристики приймаються сталими.

Компоненту $H_y(x, z, t)$ за початкової умови $H_y(x, z, 0) = 0$ (яка відповідає умові відсутності поля в початковий момент часу $t = 0$) визначаємо з рівняння $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_y - \sigma \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$. Питомі густини Джоулевих тепловиділень Q і пондеромоторних сил $\vec{F}$ в шарі знаходимо за формулами [2]:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right), \quad \vec{F} = \left\{ F_x = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial z} H_y; 0; F_z = \mu \frac{\partial H_y}{\partial x} H_y \right\}.$$

При відомих виразах величин Q , F_x і F_z визначаємо температуру $T(x, z, t)$ і компоненти тензора динамічних напружень $\sigma(x, z, t)$, які описуються наступною системою рівнянь двовимірної динамічної задачі термопружності в напруженнях [1, 2] відносно ключових функцій T , Ψ , σ_{xz} , σ_{zz} :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T - \frac{1}{\kappa} \left(1 + 2\varepsilon_* \frac{1 - \nu - \nu^2}{1 + \nu} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon_* \frac{\alpha(1 + \nu) T_0}{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} Q,$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \\
 & - \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right), \\
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_{xz} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \alpha \rho (1+\nu) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\nu}{c_3^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial F_z}{\partial z}, \\
 & \sigma_{xx} = \Psi - \sigma_{zz}, \quad \sigma_{yy} = \nu \Psi - \alpha E T.
 \end{aligned}$$

Тут: $\Psi = \sigma_{xx} + \sigma_{zz}$, c_1 , c_2 – швидкості пружних хвиль розширення і формозміни; $c_3^2 = 2c_2^2$.

Початкові (при $t = 0$) умови на ключові функції запишуться:

$\Psi = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t}$, а крайові при $z = \pm h$ на ці функції будуть:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \Psi^\pm}{\partial x^2} - \frac{1}{c_4^2} \frac{\partial^2 \Psi^\pm}{\partial t^2} = \alpha \rho (1+\nu) \frac{\partial^2 T^\pm}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right)^\pm - \frac{\partial F_x^\pm}{\partial x}, \\
 & \sigma_{zz}^\pm = 0, \quad \sigma_{xz}^\pm = 0, \quad \frac{\partial T^\pm}{\partial z} \pm h_*^\pm (T^\pm - T_c) = 0,
 \end{aligned}$$

де $\sigma_{ij}^\pm = \sigma_{ij}(x, \pm h, t)$, $(i, j = x, z)$, $T^\pm = T(x, \pm h, t)$, $c_4^2 = \frac{2}{1-\nu} c_2^2$, $h_*^\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь.

Для побудови розв'язку сформульованої задачі термомеханіки використано кубічну апроксимацію всіх ключових функцій за товщиною координатою z та інтегральні перетворення Фур'є за поперечною координатою x і Лапласа за часом t . В результаті отримано вирази інтегральних характеристик цих функцій у вигляді подвійних згорток відповідних розв'язків однорідних рівнянь та функцій, що описують задані неоднорідні крайові і початкові умови. Як приклад, знайдено і проаналізовано розв'язок задачі за дії гармонічного за поперечною координатою електромагнітного імпульсу.

1. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В. Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
2. Гачкевич О., Мусій Р, Стасюк Г. Плоска зв'язана динамічна задача термомеханіки для електропровідного шару з плоскопаралельними границями за нестационарної неоднорідної електромагнітної дії // Вісник Національного ун-ту «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С. 87-93.

**MATHEMATICAL MODELLING THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF
ELECTROCONDUCTIVE LAYER UNDER THE INHOMOGENEOUS
NONSTATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTION**

It is formulated a plane dynamic problem of electroconductive layer for thermomechanics under the inhomogeneous nonstationary electromagnetic action. The method of solving is proposed.

УДК 539.3

**ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОЇ ТА ПРИПОВЕРХНЕВОЇ
НЕОДНОРІДНОСТЕЙ У ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ ПІВПРОСТОРІ**

Тарас Нагірний, Юлія Сеник

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна;
Університет Зеленогурський,
вул. Ліцальна, 9, м. Зелёна Гура, 65417, Польща*

Вивчено приповерхневу неоднорідність у пружному електропровідному неферомагнітному півпросторі. Дослідження проведено на основі сформульованої у [1] системи рівнянь, яка у розглядуваному одновимірному випадку при нехтуванні впливом термодинамічного електричного потенціалу на густину має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} &= \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} = a_0 \frac{d^2}{dx^2} (\rho - \rho_* + a_{\omega\phi}^0) = 0, \\ \frac{d^2\phi}{dx^2} &+ \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \phi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_*) = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} - \xi^2 (\rho - \rho_*) = -\xi^2 C \exp(-\xi x),$$

$$\int_0^{\infty} (\rho - \rho_*) dx = \int_0^{\infty} C \exp(-\xi x) dx. \quad (1)$$

Неоднорідність у рівнянні для густини ρ відповідає джерелам маси, які пов'язані зі способом формування поверхні тіла.

Досліджувався випадок, коли на поверхні тіла задано постійні значення густини ρ_a та термодинамічного електричного потенціалу ϕ_a . Значення ϕ_a , що встановлюється на поверхні тіла, визначали з умови електронейтральності тіла

$$\int_0^{\infty} \omega dx = 0,$$

(ω – електричний заряд), яка у розглядуваному випадку буде

$$\chi \phi_a + (\rho_a - \rho_*) b_{m\phi} \left[\frac{\zeta + \xi}{\zeta \xi} + \frac{\chi}{\zeta - \xi} \left(\frac{\zeta}{\xi} \frac{1}{\xi + \chi} - \frac{\xi}{\zeta} \frac{1}{\zeta + \chi} \right) \right] = 0,$$

де $\xi^{-1}, \zeta^{-1}, \chi^{-1}$ – характерні розміри структурної неоднорідності матеріалу, приповерхневої неоднорідності густини та кулонівської взаємодії відповідно, $b_{m\phi}$ – стала, ρ_* – густина тіла у відліковому стані.

Розподіл електричного заряду та густини для різних характерних розмірів показано на рис. 1, 2 відповідно.

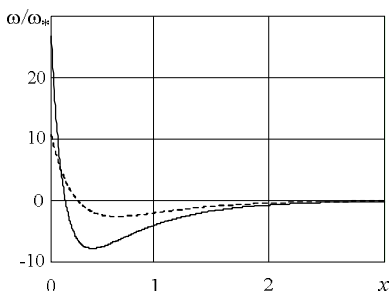


Рис. 1

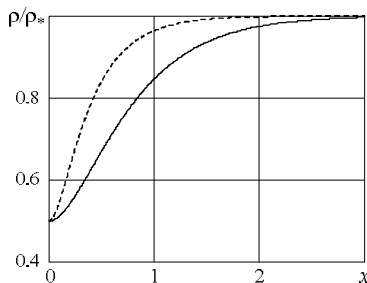


Рис. 2

В рамках моделі електричний заряд виникає через врахування структурної неоднорідності матеріалу, приповерхневої неоднорідності густини та сил кулонівської взаємодії. Аналогічні дослідження при нехтуванні геометричною неоднорідністю поверхні проведено в [2].

1. Нагірний Т., Червінка К., Сеник Ю. Моделювання стаціонарного стану локально неоднорідного електропровідного неферромагнітного термопружного тіла // Фіз. мат моделювання та інформ. технології. Вип. 19, 2014. – С. 127-135.
2. Нагірний Т.С., Червінка К.А. Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сполом, 2012. – 264 с.

INVESTIGATION OF STRUCTURAL AND NEAR-SURFACE NON-HOMOGENEITIES IN AN ELECTROCONDUCTIVE HALF-SPACE

In model of local gradient electroconductive solid which takes into account the structural heterogeneity of the material, geometrical heterogeneity of the real body surface and the Coulomb interaction there is studied a near-surface non-homogeneity in electroconductive non-ferromagnetic half-space. It is shown in particular that the electric double layer is a result of taking into account the structural heterogeneity of the material, near-surface heterogeneity of density and the Coulomb interaction.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ПОВЕРХНІ ЗА ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОГО ПІДХОДУ

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна;*

*Університет Зеленогурський,
вул. Ліцеальна, 9, м. Зельона Гура, 65417, Польща;*

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Широке використання у інженерній практиці тонких плівок та волокон, а також наноматеріалів, висуває нові вимоги до моделей суцільного середовища. Виникає потреба враховувати ефекти механічної поведінки, що проявляються при дослідженні об'єктів із характерним розміром, що лежить у нанометровому діапазоні. При розгляді у такому масштабі переважна більшість конструкційних матеріалів є структурно неоднорідними, а реальна поверхня тіл є шорсткою і суттєво відрізняється від геометрично ідеальної. На рис. 1 зображено АФМ образ тонкої 13 нм плівки, отриманої методом напилення [1], схематичне зображення перетину приповерхневої області та її подання в рамках моделі. Бачимо, що у тонких плівках неоднорідність є

властивою усій області тіла, тому при їх дослідженні із використанням моделей механіки слід враховувати локальну неоднорідність тіла. Для такого опису зазвичай використовують підходи нелокальних теорій пружності та локально градієнтний підхід у термомеханіці [2].

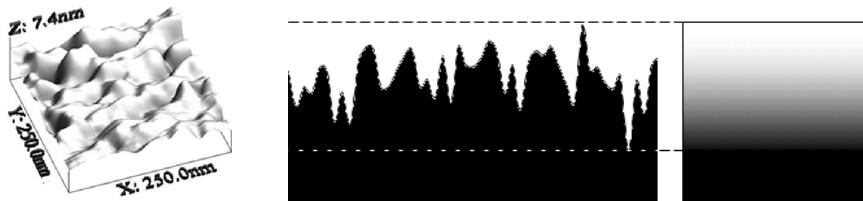


Рис. 1

Ключова система рівнянь моделі пружного твердого тіла за локально градієнтного підходу записана відносно напружень та густини ρ є такою

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla \times \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} - \left(\frac{\lambda\boldsymbol{\sigma}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} + a_m(\rho - \rho_*) \right) \mathbf{I} \right] \times \nabla = 0, \\ \nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) + \xi^2 d_{\sigma m} = 0, \quad (1)$$

де ρ_* – густина тіла у відліковому стані, ξ – стала, пов’язана із характерним розміром приповерхневої неоднорідності, $d_{\sigma m}$ – інтенсивність джерел маси, які пов’язані із способом формування поверхні тіла, λ, μ, a_m – сталі. При цьому для джерел повинна виконуватись умова

$$\int_{(V)} d_{\sigma m} d\mathbf{r} = \int_{(V)} (\rho - \rho_*) d\mathbf{r},$$

де (V) – область, зайнята тілом.

Застосувавши систему рівнянь моделі до дослідження напружено-деформованого стану вільного від силового навантаження шару $|x| \leq l$ з граничними умовами $\rho(\pm l) = \rho_*/2$, отримуємо розподіл напружень у шарі, показаний на рис. 2 а. Аналіз деформацій у розтягнутому шарі дозволяє знайти ефективний модуль Юнга, розмірний ефект якого подано на рис. 2 б.

Розглянутий модельний підхід дозволяє описувати при поверхневу неоднорідність розподілу густини та вивчати її вплив на напружено деформований стан і експлуатаційні характеристики тіл.

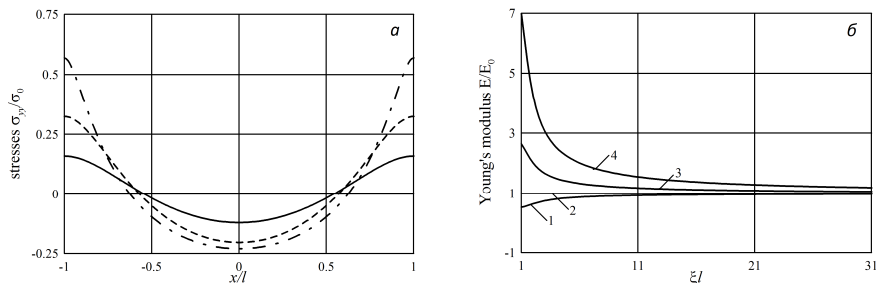


Рис. 2

1. Celedon C., Flores M., Haberle P., Valdes J.E. Surface Roughness of Thin Gold Films and its Effects on the Proton Energy Loss Straggling // Brazilian Journal of Physics. – Vol. 36, No. 3B, September, 2006. – P. 956-959.
2. Нагірний Т.С., Червінка К.А. Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сполом, 2012. – 264 с.

LOCAL GRADIENT APPROACH FOR GEOMETRIC INHOMOGENEITY OF SURFACE MODELING

There is proposed an approach for mathematical modeling of geometric inhomogeneity of body surface (roughness). This allows investigating size effects of stresses in and Young's module of thin films. It is shown that the elastic modulus tend for constant value with the characteristic body size increase.

УДК 539.3:539.4

ЭФФЕКТИВНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Юрий Немировский, Наталия Федорова

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090, Российская Федерация;
ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»,
ул. Киренского, 26, г. Красноярск, 660074, Российская Федерация*

В работах авторов [1-2] сформулирована плоская задача для армированной среды в криволинейных ортогональных координатах (ξ, η) , которая включает уравнения равновесия, обобщенный закон Дюамеля-Неймана в условиях термоупругого ортотропного дефор-

мирования, соотношения для напряжений в волокне на основе структурной модели [3]. Пусть армирование выполнено k семействами волокон: φ_m – углы армирования m -ым семейством волокон ($m = 1, \dots, k$), которые являются непрерывными функциями координат; ε_m – деформация в волокне; ω_m – интенсивность армирования m -ым семейством волокон. Деформации в волокне определим по структурной модели [3] таким выражением

$$\varepsilon_{11}l_{m1}^2 + \varepsilon_{22}l_{m2}^2 + \varepsilon_{12}l_{m1}l_{m2} = \varepsilon_m^0. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_m + \varepsilon_m^T$, $\varepsilon_m^T = \alpha_m^a T$, где $l_{m1} = \cos \varphi_m$, $l_{m2} = \sin \varphi_m$, α_m^a – коэффициент линейного расширения m -го семейства волокон, T – заданная постоянная температура. Напряжение в волокне σ_m находим по формуле $\sigma_m = E_m \varepsilon_m + E_m \varepsilon_m^T$, где E_m – модуль Юнга материала m -го семейства волокон. Связь напряжений и деформаций для неоднородного армированного материала запишем в виде

$\sigma_{ij} = a \sigma_{ij}^c + \sum_{m=1}^k \sigma_m \omega_m l_{mi} l_{mj}$, где напряжения в связующем σ_{ij}^c определяем формулами:

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj} - \alpha_c (1 + \nu) T), \quad \sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij}, \quad j = 3 - i, i = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала, $a = 1 - \sum_{m=1}^k \omega_m$ – удельная интенсивность прослойки связующего между армирующими слоями. При наложении дополнительных условий постоянства сечений волокон, что соответствует условиям технологического процесса, интенсивность армирования ω_m удовлетворяет следующим соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 \omega_m \cos \varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1 \omega_m \sin \varphi_m) = 0. \quad (3)$$

Интенсивность ω_m найдем из (3) после вычисления углов армирования при задании уравнений конкретных траекторий армирования и начальных условий выхода арматуры. В работе построены изогональные траектории к данным семействам плоских кривых, что расширяет многообразие непрерывных криволинейных траекторий.

В рамках прямой задачи (задана структура армирования) замкнутая разрешающая система формулируется относительно компо-

нент тензора деформації и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{\partial^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi^2} + C_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\xi}{\partial \eta^2} + C_3 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + C_4 \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + C_6 \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + C_7 \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + \\
 & + C_8 \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + C_9 \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + C_{10} \varepsilon_\xi + C_{11} \varepsilon_\eta + C_{12} \varepsilon_{\xi\eta} = 0, \\
 & a_{11} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + a_{14} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + a_{15} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + a_{16} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \\
 & + F_1 (H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2, \phi_{1,\xi}, \phi_{1,\eta}, \phi_{2,\xi}, \phi_{2,\eta}) + H_1 H_2 \phi_1 = 0, \\
 & a_{21} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + a_{25} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + a_{26} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \\
 & + F_2 (H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2, \phi_{1,\xi}, \phi_{1,\eta}, \phi_{2,\xi}, \phi_{2,\eta}) + H_1 H_2 \phi_2 = 0, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты C_l , a_{ij} ($l = \overline{1, 12}; i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 6}$) и F_1, F_2 получены в [1] и содержат все структурные характеристики композита (заданные углы армирования, интенсивность армирования, механические характеристики материалов связующего и арматуры). Граничная задача для системы (4) в криволинейной системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\xi|_{\Gamma_u} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} u_2^0, \quad \varepsilon_\eta|_{\Gamma_u} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2^0}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} u_1^0, \\
 \varepsilon_{\xi\eta}|_{\Gamma_u} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left(H_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + H_2 \frac{\partial u_2^0}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial H_1}{\partial \eta} u_1^0 - \frac{\partial H_2}{\partial \xi} u_2^0 \right). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Здесь u_1^0, u_2^0 – заданные кинематические условия на граничном контуре Γ_u , ψ_1, ψ_2 – функции, обратные к функциям, определяющим контур Γ_u , H_1, H_2 – дифференциальные коэффициенты Ламе, ϕ_1, ϕ_2 – компоненты массовых сил.

Детерминантным методом установлено, что задача (4), (5) имеет эллиптический тип. На основе системы (4) решена задача об армировании эксцентрического кольца в биполярных координатах вдоль ортогональных траекторий, являющихся координатными линиями биполярной системы. Решение строится на основе конечно-элементного анализа неоднородной среды.

В случае осесимметрической задачи (концентрическое кольцо) армирование проводится вдоль спиралевидных траекторий. Разрешающая система формулируется в перемещениях и приводит к

обобщенной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиального и окружного перемещений. Такой подход позволяет, например, решать задачи о криволинейно армированных вращающихся дисках, являющимися элементами конструкций ответственного назначения [4].

Сформулированная плоская задача армированной среды в криволинейных ортогональных координатах дает возможность получить решение и обратной задачи по определению эффективной рациональной структуры (если в ней учесть требования равнодеформируемости волокон и равнотрещиностойкости в связующем по критерию Баландина [2, 4]). Полученные численные результаты показывают, что за счет выбора вида структуры, геометрии армирования (углы армирования, интенсивность армирования), комбинаций материалов связующего и арматуры возможно управление технологическими параметрами и создание конструкции с заранее заданными прочностными характеристиками [4].

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 14-01-90400 Укр_а.

1. *Немировский Ю.В., Федорова Н.А.* Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. – Красноярск: СФУ, 2010.
2. *Немировский Ю.В., Федорова Н.А.* Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – Самара. – 2013. – № 1 (30). – С. 233-244.
3. *Nemirovsky Yu.V.* On the elastic behavior of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. – Vol. 12. – 1970.
4. *Немировский Ю.В., Федорова Н.А.* Предельное деформирование дисков газовых и гидротурбин при различных структурах армирования // Изв. ВУЗов. Физика. – 2013. – Т. 56, № 7/3. – С.191-196.

EFFECTIVE CURVILINEAR STRUCTURES FOR REINFORCEMENT OF PLANAR THERMOELASTIC CONSTRUCTIONS

To describe the behaviour of a fibrous composite material reinforced by fibers along curvilinear trajectories a resolving system of differential equations has been obtained. The problem is stated on the basis of a structural model in the framework of the two-dimensional non-uniform linear elasticity problem. A construction is reinforced along curvilinear trajectories on the basis of three approaches: according to the grid lines of the orthogonal coordinate system determined by the given conformal representation; according to the isogonal trajectories plotted to the given curves; according to the helical trajectories in the axisymmetric statement of the problem. Partial solutions of the corresponding boundary problems have been obtained. Recommendations for the effective reinforcement of planar constructions have been presented.

ВПЛИВ ТЕПЛОВІДАЧІ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА, ЗУМОВЛЕНЕ РУХОМИМ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Борис Процюк, Володимир Синюта

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

У [1] стосовно процесу наплавлення виконано низку досліджень на основі аналітичного розв'язку квазістаціонарної тривимірної задачі теплопровідності для кругового однорідного ізотропного циліндра, поверхня якого нагрівається точковим джерелом тепла, що рухається по гвинтовій траєкторії. Відзначено можливість застосування такого підходу до дослідження температурних полів в областях, віддалених від джерела тепла.

У [2] з використанням методу функцій Гріна визначено температурне поле багат шарового ортотропного порожнистого циліндра, який нагрівається рухомих нормально розподіленим на його поверхні джерелом тепла, що дає можливість досліджувати відповідні температурні поля в областях, близьких до джерела тепла. При цьому виходили з рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda_r(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\lambda_\phi(r) \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_z(r) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = c_V(r) \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1)$$

та крайових умов

$$\left(\lambda_r(r) \frac{\partial T}{\partial r} - \alpha_0 T \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \left(\lambda_r(r) \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_n T \right) \Big|_{r=r_n} = Q_n(\phi, z, \tau), \quad (2)$$

$$T(r, \phi + 2\pi, z, \tau) = T(r, \phi, z, \tau), \quad T \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, \quad T|_{\tau=0} = 0,$$

де

$$Q_n(\phi, z, \tau) = Q \exp \left(-k \left[r_n^2 \sin^2(\phi - \phi^*(\tau)) + (z - z^*(\tau))^2 \right] \right) \times \\ \times \cos(\phi - \phi^*(\tau)) S(\cos(\phi - \phi^*(\tau))).$$

Тут k – коефіцієнт зосередженості теплового потоку, $\phi^*(\tau)$, $z^*(\tau)$ – закони руху центра плями нагріву в кутовому й осьовому напрямках, Q – тепловий потік у центрі плями нагріву, $S(x)$ – функція Гевісайда, $\lambda_j(r)$ ($j = r, \phi, z$) і $c_V(r)$ – відповідно кусково-сталі коефіцієнти теплопровідності у радіальному, кутовому, осьовому напрямках і коефіцієнт об'ємної теплоємності, які мають вигляд $p(r) = p^{(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} (p^{(i+1)} - p^{(i)}) S(r - r_i)$, $r = r_i$ – поверхні поділу шарів ($i = \overline{1, n-1}$); α_0 , α_n – коефіцієнти тепловіддачі з внутрішньої $r = r_0$ та зовнішньої $r = r_n$ поверхонь циліндра відповідно; n – кількість шарів циліндра.

Зі знайденого розв'язку задачі (1), (2) отримано розв'язки для різних законів руху джерела тепла, зокрема, коли центр плями нагріву рухається по гвинтовій лінії з швидкостями v_ϕ та v_ζ у кутовому та осьовому напрямках відповідно (тобто, коли $\phi^*(\tau) = \phi_0 + v_\phi \tau$, $z^*(\tau) = z_0 + v_\zeta \tau$). Для цього випадку визначено співвідношення, що описує квазістаціонарне температурне поле. Проведено числові дослідження нестационарного температурного поля двошарового циліндра без урахування тепловіддачі на його зовнішній поверхні.

На основі отриманого в [2] розв'язку задачі теплопровідності (1), (2), проведені числові дослідження впливу тепловіддачі на нестационарне температурне поле двошарового ортотропного циліндра, який нагрівається нормально розподіленим джерелом тепла, центр якого рухається по гвинтовій лінії.

1. *Махненко В.И., Кравцов Т.Г.* Тепловые процессы при механизированной наплавке деталей типа круговых цилиндров. – К.: Наук. думка, 1976. – 160 с.
2. *Процюк Б.В., Синюта В.М.* Нестационарные неосесимметричные температурные поля многослойных ортотропных цилиндров // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 221-228.

INFLUENCE OF HEAT EMISSION ON TEMPERATURE FIELD OF A TWO-LAYER CYLINDER CAUSED BY A MOVABLE NORMALLY DISTRIBUTED HEAT SOURCE

Heating of an unlimited two-layer hollow orthotropic cylinder by a movable normally distributed heat source is considered. The influence of heat emission on the non-stationary temperature field in the case of the source motion along the spiral is analyzed.

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ НА ЛІНІЇ З'ЄДНАННЯ ДВОХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН

Віктор Ревенко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянуто плоску задачу для системи, яка складається з двох прямокутних пластин $S_j = \{(x, y) \in ([0, (-1)^j a_j] \times [-b_j, b_j])\}$, навантажених на $x = -a_1$, $x = a_2$ навантажені однорідними зусиллями σ_j^0 (рис. 1).

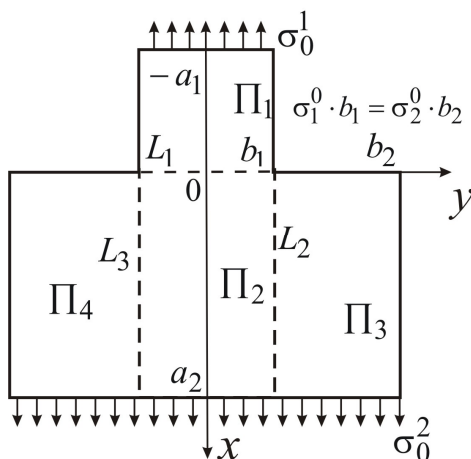


Рис. 1

Напружений стан багатокутної пластини будемо шукати методом скінченних тіл. Для цього її уявно розділимо по лінії L_j , $j = \overline{1,3}$ на чотири прямокутники P_j , $j = \overline{1,4}$ (рис. 1). Внаслідок симетрії пластини і навантаження достатньо задовольнити крайові умови тільки на відрізках L_j , $j = \overline{1,2}$. Основний напружено-деформований стан (НДС) пластини P_1 – однорідний, а функції напружень для пластин P_m , $m = \overline{2,3}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\Phi_0^2(x, y) &= \frac{\sigma_1^0}{2} y^2 - \frac{b_3^2}{a_2^3} \sigma_2^0 \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^3 + \frac{\sigma_2^0 - \sigma_1^0}{2a_2} xy^2, \\ \Phi_0^3(x, y) &= \frac{b_3^2}{a_2^3} \sigma_2^0 \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^3 + \frac{\sigma_2^0}{2a_2} x \left(y - \frac{b_3}{2} - b_1\right)^2 - \\ &- \frac{b_3}{a_2^3} \sigma_2^0 \left(x - \frac{a_2}{2}\right) \left[\left(y - b_1\right) \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} a_2^2 \left(y - \frac{b_3}{2} - b_1\right)\right], \quad b_3 = b_2 - b_1.\end{aligned}$$

Функцію напружень для пластин Π_m подамо у вигляді основного НДС $\Phi_0^m(x, y)$ і скінченної суми самозрівноважених розв'язків [1]

$$\Phi_N^m(x, y) = \Phi_0^m(x, y) + \sum_{k=1}^{8N} a_k^m \phi_k^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma), \quad m = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Компоненти тензора напружень і вектора переміщень виражені через функцію напружень (1). Після задоволення граничних умов і умов ідеального контакту вздовж розрізів L_j одержано систему вісімнадцяти рівнянь

$$\sum_{k=1}^M c_k A_{n,k}(\gamma) = P_n, \quad n = \overline{1, 18}, \quad M = 24N. \quad (2)$$

У [1] розроблено метод, який дозволяє одночасне задоволення усіх рівнянь (2) звести до пошуку мінімуму $F(N)$ такої квадратичної форми:

$$\Omega_N = \sum_{m=1}^{18} \left\| \sum_{k=1}^M c_k A_{n,k}(\gamma) - P_m(\gamma) \right\|_m^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \quad (3)$$

де $\|f(\gamma)\|_m = \sqrt{\int_{l_m}^{t_m} f^2(\gamma) d\gamma}$ – норма у метриці $L_2[l_m, t_m]$.

Встановлено, що для побудованих функцій напружень Φ_N^m , Ψ_N^m і знайденого мінімуму квадратичної форми (3) вірні наступні твердження:

Лема. Функція $F(N)$ є невід'ємна і не зростає.

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N , що $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$,

то існують межі послідовностей

$$\Phi^m = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N^m, \quad \Psi^m = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N^m, \quad m = \overline{1, 3},$$

а знайдені переміщення та напруження, виражені через функції Φ^m , Ψ^m , точно задовольняють граничні умови і умови ідеального контакту вздовж розрізів L_j у метриці $L_2[l_m, t_m]$.

Показано, що значення кореня квадратного з мінімуму узагальненої квадратичної форми можна використати для числової оцінки відхилення наближеного розв'язку від точного.

1. Ревенко В.П. О численно-аналитическом методе расчета напряженного состояния упругой прямоугольной пластины // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 1. – С. 90-98.

DETERMINATION OF STRESS DISTRIBUTION ON LINE CONNECT TWO RECTANGULAR PLATES

A plane problem for the loaded polygonal plate which consists of two rectangles is considered. For the study of the stress state is proposed the method finite bodies. For the first time theoretically established numerical criteria for convergence of the method and show that the accuracy of satisfaction of the boundary conditions is assessed by a single number – the minimum of a quadratic form.

УДК 539.3

ДО ОПИСУ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ У ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛАХ ЗА ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

**Михайло Солодяк, Дмитро Тарлаковський, Любов Гасєвська,
Карен Казарян**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Науково-дослідний інститут механіки Московського державного
університету ім. М.В. Ломоносова,
Мічурінський пр-т, 1, м. Москва, В-192, 119192, Російська Федерація;*

*Інститут механіки АН Вірменії,
пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, м. Єреван, 0019, Республіка Вірменія*

Отримано вихідну систему залежностей, що описують у взаємозв'язку електромагнітотермомеханічні процеси у електропровідних феромагнітних тілах у зовнішньому періодичному за часом магнітному полі за врахування рухомості середовища.

Приймаємо, що розглядуване тіло знаходиться під дією зовнішнього періодичного за часом електромагнітного поля (ЕМП), заданого вектором напруженості магнітного поля на поверхні тіла

$$\vec{H}^{(ext)}(\vec{r}, t) = \vec{H}_1(\vec{r}_1) \cos \omega t, \quad (1)$$

де $\vec{r}_1$ – радіус-вектор точки поверхні, $\omega = 2\pi\nu$, ν – частота, t – час, $\vec{H}_1(\vec{r}_1)$ – амплітуда напруженості магнітного поля.

Важливо встановити умови, за яких є істотним вплив рухомості середовища на термомеханічні процеси в електропровідних феромагнітних тілах за дії магнітного поля заданого законом (1).

Будемо виходити з того, що рівняння як електродинаміки, так і термомеханіки є інваріантними відносно перетворень Галілея [1, 2].

Обмежимося розглядом ізотропних феромагнітних середовищ, в яких вектор індукції $\vec{B}'$ (чи намагніченості $\vec{M}'$) магнітного поля паралельний вектору напруженості $\vec{H}'$, тобто

$$\vec{B}'(\vec{H}') = \mu_0 \mu(\vec{H}') \vec{H}', \quad \vec{M}'(\vec{H}') = \chi(\vec{H}') \vec{H}'. \quad (2)$$

Тут $\chi(\vec{H}')$ і $\mu(\vec{H}') \equiv 1 + \chi(\vec{H}')$ – відповідно відносні магнітна сприйнятливість та проникність середовища; μ_0 – магнітна стала.

ЕМП щодо матеріального континууму вважаємо зовнішньою дією, яка проявляється в тілі через енергетичні та силові фактори взаємодії. Енергетичні характеристики поля вводимо стандартним чином, використовуючи закон збереження ЕМП у вигляді теореми Умова-Пойнтінга [3].

Записано закони перетворень системи рівнянь електромеханіки при переході від рухомої (штрихової) до нерухомої (нештрихової) систем відліку.

Обмежуємось випадком, коли частота зовнішнього ЕМП не належить до околу власних частот тіла, тобто не розглядатимемо резонансні явища. Використовуючи метод теорії розмірностей і подібності [4], вводимо відповідні характерні значення розглянутих величин і зводимо систему рівнянь електродинаміки та термопружності до відповідної безрозмірної форми.

Проведено кількісний аналіз характерних безрозмірних критеріїв для довільних матеріалів, зокрема, для технічно чистого заліза. Знехтувано членами, для яких характерні безрозмірні параметри набагато менші, порівняно з одиницею. Для цього випадку записано спрощену систему рівнянь моделі, що описує магнітне поле, температуру, переміщення та напруження у електропровідних феромагнітних тілах за дії розглядуваних ЕМП. Проаналізовано параметри, за яких потрібно враховувати рухомість середовища.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень в рамках наукового проекту ВБ-РФФД/382.

1. Богородский А.Ф. Всемирное тяготение. – К.: Наук. думка, 1971. – 352 с.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
3. Гачкевич О.Р., Солодяк М.Т., Івасько Р.О., Бойчук В.Я. Моделювання дії електромагнетного поля на термомеханічну поведінку деформівних твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 2. – С. 43-54.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. – 438 с.

**TO DESCRIPTION OF PHYSICOMECHANICAL FIELDS IN
ELECTROCONDUCTING FERROMAGNETIC BODIES UNDER THE ACTION OF
QUASISTEADY ELECTROMAGNETIC FIELDS**

An original system of relations describing the electromagnetothermomechanical processes in interrelation in electroconducting ferromagnetic bodies in the external time-periodic magnetic field with regard for the medium mobility is obtained.

УДК 539.3

**МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В СИСТЕМІ ШАРІВ
РІЗНОЇ ПРОЗОРОСТІ ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ**

Ростислав Терлецький, Оксана Турій, Мар'ян Брухаль

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Досліджуючи теплоперенос та напружений стан у частково прозорому чи непрозорому тілі, що знаходиться за дії теплового опромінення, важливо врахувати вплив інших тіл при теплообміні випромінюванням. При цьому необхідно взяти до уваги їх тепловий стан, радіаційні властивості, геометрію та розташування. Це вимагає моделювання процесів теплообміну випромінюванням у системах, що можуть містити тіла різної прозорості та формулювання відповідних задач теплопереносу та термoprужності. В умовах високотемпературного нагріву за теплообміну випромінюванням важливим також є врахування специфіки термочутливості не лише теплофізичних та механічних, але й радіаційних характеристик складових тіл [1].

Нижче досліджено теплоперенос та напружений стан у системі механічно незв'язаних шарів різної прозорості (Рис. 1). Система зі сторони частково прозорого шару знаходиться під дією теплового випромінювання інтенсивності $I_{\lambda}^{(e)}(\beta) = kI_{\lambda b}(\lambda, T_s)$, де $I_{\lambda b}(\lambda, T_s)$ – інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі T_s , а коефіцієнт k характеризує енергетичні параметри джерела. Середовище між шарами вважаємо прозорим для випромінювання.

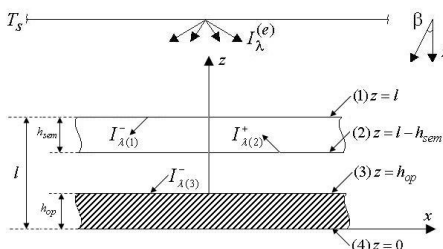


Рис. 1

Тоді, базуючись на методи балансу потоків випромінювання, визначення поля випромінювання в системі зводимо до розв'язування співвідношень на ефективні інтенсивності випромінювання $I_{\lambda(1)}^+$, $I_{\lambda(2)}^+$, $I_{\lambda(3)}^-$ на поверхнях $z = l$, $z = l - h_{sem}$, $z = h_{op}$ шарів. Вона

включає систему інтегральних

рівнянь для частково прозорого шару та співвідношення, що пов'язує ефективні інтенсивності на суміжних поверхнях. Відшукавши аналітично її розв'язок, використовуємо знайдені величини інтенсивностей для встановлення виразів для тепловиділень у частково прозорому шарі та поверхневого потоку поглинутої енергії випромінювання в непрозорому шарі [2, 3]. Вони служать відповідно як об'ємні джерела тепла в рівнянні теплопровідності та при формулюванні теплових граничних умов.

Тепловий стан у системі термочутливих шарів описуємо зв'язаною системою рівнянь теплопровідності. Вона містить нелінійне інтегро-диференціальне рівняння для частково прозорого шару, в якому вираз для джерел залежить від температури суміжної поверхні непрозорого шару, а також нелінійне рівняння для непрозорого шару. У нелінійну граничну умову на суміжній поверхні непрозорого шару входить температура частково прозорого шару. Розроблено методику розв'язування системи, що базується на методі скінченних елементів, із застосуванням лінеаризації нелінійних складових варіаційного рівняння при побудові однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом. На відміну від ітераційних схем, така методика дозволяє урівноважити похибку дискретизації за часом з похибкою лінеаризації та уникнути ітераційних процесів.

Напружений стан у кожному з механічно незв'язаних термочутливих шарів визначаємо за отриманими аналітичними співвідношеннями [1] шляхом числового інтегрування з урахуванням інтерпольованих кубічними сплайнами на основі експериментальних даних температурних залежностей механічних характеристик.

Дослідження виконано за підтримки НАН України та РФФД (проект № ВБ-РФФД/405).

1. Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б., Немировський Ю.В. Моделювання і дослідження термомеханічної поведінки термочутливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 212-224.
2. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 202-219.
3. Терлецький Р.Ф., Турий О.П., Брухаль М.Б. Задачі термомеханіки для об'єктів // Теор. і прикл. механіка. – 2012. – 4 (50) – С. 30-37.

STUDY OF STRESS STATE IN SYSTEM OF DIFFERENT TRANSPARENCY LAYERS SUBJECTED TO THERMAL RADIATION

Basic model equations are written for semitransparent and opaque systems of infinite layers subject to thermal radiation. Finite elements based methods to solve new nonlinear boundary problems on non-stationary heat exchange and stress state in investigated solids are proposed.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ОПРОМІНЮВАНОЇ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ ЗА З'ЄДНАННЯ СКЛАДОВИХ ШАРІВ ЧАСТКОВО ПРОЗОРИМИ ПРОШАРКАМИ

Ростислав Терлецький, Оксана Турій, Максиміліан Гаєк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Політехніка Опольська,
вул. Озімска, 75, м. Ополь, 45370, Польща*

Створення ефективних моделей та методів розрахунку теплопереносу в багатошарових структурах та елементах конструкцій з них за теплового опромінення вимагає адекватного моделювання процесів поширення потоків випромінювання в таких структурах, які можуть містити складники з різними радіаційними властивостями. Перенос випромінювання, виділення тепла та формування теплових потоків в шаруватих структурах можуть визначати не лише радіаційні властивості основних (функціональних) шарів, але й тонких прошарків (проміжкових шарів), що утворюються при формуванні

шаруватої структури. Істотним є врахування специфіки поглинання та випромінювання теплової енергії складниками при постановці контактних задач теплопереносу для шаруватих тіл – формулюванні рівнянь теплопереносу, крайових і контактних умов.

Базуючись на підходах феноменологічної теорії поширення випромінювання, сформульовано вихідні співвідношення, що описують перенос випромінювання в опромінюваних багатошарових пластинах за наявності тонких прошарків. Здійснено постановки змішаних контактно-крайових задач теплопереносу для таких пластин. З використанням формального операторного методу отримані узагальнені умови теплообміну через частково прозорий проміжковий шар за врахування ефектів поглинання та випромінювання ним теплової енергії. Разом вони дають можливість використати для опису процесів переносу випромінювання і тепла в тришарових (модельних) структурах за наявності тонких прошарків модель двошарової пластини за ускладнених радіаційних характеристик межі контакту та теплових контактних умов (умов неідеального контакту).

Знайдено наближені співвідношення для визначення напружень в основних шарах, що враховують приведені жорсткісні характеристики на згин і розтяг тонкого проміжкового шару.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0114U005081).

1. Брухаль М.Б., Терлецький Р.Ф., Турій О.П. Задачи термомеханики для облучаемых тел. // Теор. и прикл. механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 30-37.
2. Hong-Liang Yi, Hao-Chun Zhang, He-Ping Tan. Transient radiation and conduction heat transfer inside a plane-parallel participating gray medium with boundaries having different reflecting characteristics // J. Quant. Spectrosc. RA. – 2009. – **110**. – P. 1978-1992.
3. Турій О.П. Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл з тонкими прошарками за врахування поглинання та випромінювання теплової енергії // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 195-208.
4. Гачкевич А., Кушнир Р., Немировский Ю., Терлецький Р., Турій О. Моделирование термомеханического поведения слоистых пластин при технологическом тепловом облучении // Manufacturing processes. Actual problems / Ed. by: M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler / Studia i monografie, z. 365. – Glava 17. – Opole: OWPO, 2013. – С. 221-234.
5. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Гаск М., Турій О.П. Термонапружений стан опромінюваних шаруватих пластин з тонкими прошарками за врахування поглинання та випромінювання теплової енергії // Матеріали міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2013»

(Дніпродзержинськ-Дніпропетровськ, 15-18.04. 2013 р.). Частина 2. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2013. – С. 7-9.

**MODELING THERMOMECHANICAL BEHAVIOR MULTILAYERED PLATES
SUBJECTED TO THERMAL RADIATION WHEN CONNECTING COMPONENTS
LAYERS BY SEMITRANSSPARENT INTERMEDIATE LAYER**

Methods for calculating heat transfer in multilayer structures for components with different radiation properties are developed.

УДК 539.3

**НЕСТАЦІОНАРНИЙ ТОРЦОВИЙ РОЗІГРІВ ПІВСМУТИ З
ПОКРИТТЯМ**

Ігор Турчин, Василь Хома

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Розглядається неоднорідна півсмуга ($x \geq 0$, $-H \leq y \leq H$), що складається з основи ширини $2h_2$ та двох покриттів ширини h_1 ($h_1 + h_2 = H$) із відмінними від основи фізико-механічними характеристиками, нанесених на граничні поверхні основи $y = \pm h_2$. З моменту часу $t = 0$ півсмуга починає нагріватись потоком тепла $q^*(t)$, рівномірно розподіленим на її торцьовій поверхні $x = 0$, а з граничних поверхонь $y = \pm H$ відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. На лініях поділу матеріалів основи та покриттів виконуються умови ідеального термомеханічного контакту.

Враховуючи фізичну та геометричну симетрію задачі відносно осі $y = 0$, в термінах безрозмірних змінних та величин $\alpha = x/H$, $\gamma = y/H$, $\tau = a_T^{(2)}t/H^2$, $\gamma_1 = h_1/H$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$ задача теплопровідності формулюється наступним чином:

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_\tau T^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_\alpha T^{(i)} = -q(\tau), \quad \alpha = 0, \quad i = 1, 2; \quad (3)$$

$$\partial_\gamma T^{(2)} = 0, \quad \gamma = 0; \quad (4)$$

$$\partial_\gamma T^{(1)} + Bi T^{(1)} = 0, \quad \gamma = 1; \quad (5)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T^{(1)} = \partial_\gamma T^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1. \quad (6)$$

З використанням інтегрального перетворення Лагерра [1] за змінною τ та інтегрального перетворення Фур'є за змінною γ розв'язок вихідної задачі (1)-(6) одержано у вигляді

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi, \quad (7)$$

де $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, λ – масштабний множник, який використовується при числовій реалізації розв'язку, а трансформовані за Фур'є коефіцієнти розкладу $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$ є розв'язками відповідних трикутних послідовностей звичайних диференціальних рівнянь [2] і визначаються точно із побудованих в роботі рекурентних співвідношень.

За відомим температурним полем (7) визначається напружено-деформований стан в неоднорідній півсмугі в припущенні, що граничні поверхні $\gamma = \pm 1$ вільні від навантажень, а торцева поверхня $\alpha = 0$ закріплена таким чином, що на ній відсутні дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}$ та компонента вектора переміщення u_α . Такі умови дають змогу ефективно застосовувати до рівнянь термопружності перетворення Фур'є та оминати традиційні труднощі, які виникають при розгляді двовимірних задач термопружності в обмежених чи напівобмежених областях. Розв'язок задачі термопружності, подібно до формули (7), отримано у вигляді рядів за поліномами Лагерра.

Наводяться результати числового аналізу температурного поля та напружено-деформованого стану залежно від інтенсивності теплообміну та відносних геометричних та термопружних характеристик основи та покриття.

1. Галазюк В.А. Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3-7.
2. Turchin I.M. Nonstationary end heating of a multi-layer semiinfinite plate // J. of Eng. Physics and Thermoph., 2012. – Vol. 85, Iss. 6. – P. 1453-1462.

NONSTATIONARY END HEATING OF A SEMIINFINITE PLATE WITH COATING

The solution of a two-dimensional initial boundary-value thermo-elasticity problem for a three-layered semi-infinite plate has been constructed with using of Laguerre and Fourier integral transformations. The results of a numerical analysis of the temperature field and stress-strain state in plate as a function of the relative geometric and thermophysical properties of the plate's components have been given. The possibility of applying the method proposed to analysis of temperature fields in bodies with nanocoatings has been elucidated.

УДК 539.3

**ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ДЕЯКИХ ЗАДАЧ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ
АНІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК**

Роман Тучапський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Для редукції тривимірних крайових задач теорії пружності до двовимірних задач теорії оболонок широко використовуються методи, що застосовують розвинення шуканих величин у ряди Фур'є за поліномами Лежандра від товщинної координати [1, 4-7].

У цій роботі розглянуто досить загальний метод побудови узагальненої теорії нетонких анізотропних оболонок змінної товщини, що ґрунтується на ідеях І.Н. Векуа [1] і І.Ю. Хоми [7] та на варіаційному принципі теорії пружності.

На основі цієї теорії розглянуто задачі про осесиметричну деформацію оболонок обертання й про плоску деформацію довгих прямокутних пластин. Для кожного випадку здійснено відповідні спрощення рівнянь теорії. Спрощені системи рівнянь зведено до нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних. Для інтегрування розв'язуючих систем рівнянь використано чисельний метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [2], який добре проявив себе при розв'язуванні задач про осесиметричне деформування тонких і пологих, тонких та середньої товщини оболонок обертання [3-5].

Розроблений алгоритм чисельного визначення напружено-деформованого стану нетонких анізотропних пластин і оболонок змінної товщини реалізовано у вигляді програми в пакеті Wolfram Mathematica. Наведено приклади розв'язування деяких задач.

1. Векун И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. XVI, вып. 3 (99). – С. 171-174.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. К решению задач осесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения // Прикладная механика. – 1971. – Т. VII, вып. 8. – С. 3-8.
4. Калекин О.Ю., Шишкина Э.С. Решение с помощью ЭЦВМ задач статики оболочек вращения средней толщины при осесимметричном нагружении // Прикладная механика. – 1967. – Т. III, вып. 5. – С. 69-75.
5. Марчук М.В., Тучапский Р.И. Об одном подходе к численному решению некоторых задач теории тонких анизотропных упругих оболочек, построенной формальным методом // Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур / под общ. ред. Г.И. Михасева, Х. Альтенбаха. Материалы междунар. науч. конф., 16-20 сентября 2013 г., Минск, Беларусь. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 89-90.
6. Немчи Ю.Н., Хома И.Ю. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (обзор) // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29 (39), № 11. – С. 3-33.
7. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.

ON ONE APPROACH TO THE NUMERICAL SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF THE GENERALIZED THEORY OF ANISOTROPIC NON-THIN ELASTIC SHELLS

On the basis of the generalized theory of shells that uses Legendre polynomials, an approach to numerical solution of problems of axisymmetric deformation of shells of revolution and the plane deformation of long rectangular plates is developed.

УДК 539.3:551.25

**МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
АВТОХТОНУ З УРАХУВАННЯМ ШВИДКОСТІ НАСУВАННЯ ТА
ПОВЗКОСТІ**

Микола Хом'як, Леонід Хом'як

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Комп'ютерне моделювання з використанням числових методів розв'язування тектонофізичних задач в рамках механіки суцільних середовищ є потужним інструментом для отримання якісних та кіль-

кісних параметрів деформацій у геологічному середовищі за певних динамічних умов та первинної структурної організації [2, 3]. Ця робота продовжує дослідження авторів [1], де проаналізовано низку скінченно-елементних моделей взаємодії Мармароського терейну з фундаментом карпатського палеобасейну, що спричинило формування раних насувів Українських Карпат. Мета роботи – моделювання тектонічного стиснення осадового комплексу автохтону внаслідок переміщення насувного клину з урахуванням швидкості деформування.

Нерівномірне в часі формування насувних структур Українських Карпат пов'язане з тим, що періоди інтенсивного тектонічного стиснення чергувалися з періодами відносного тектонічного спокою. Для вивчення впливу швидкості деформування на процес становлення насувів потрібно враховувати в'язкість порід. Саме цей фізико-механічний параметр визначає залежність величини залишкової деформації від динаміки тектонічних рухів. У насувних структурах Українських Карпат поверхня зриву приурочена до глинистих пачок і тонкоритмічного флішу рахівської, шипотської та спаської світ. Зроблено припущення, що у зазначених відкладах за умови великих порових тисків води могли виникати деформації повзкості і змінювати напружено-деформований стан осадового комплексу.

Вплив швидкості деформування осадової товщі автохтону на утворення насувів вивчено на тришаровій моделі, у властивостях нижнього макрошару якої враховано в'язкість порід згідно із законом

$$\dot{\epsilon}_{eqv} = \gamma(\sigma_{eqv})^m,$$

де характеристики: $\dot{\epsilon}_{eqv}$ – швидкість деформації, σ_{eqv} – еквівалентні напруження (МПа), γ – параметр середовища (МПа/рік)⁻¹, які визначають за спостережуваними даними, m – показник ступеня (як правило, $m > 1$); $m = 1$ відповідає закону Ньютона лінійно-в'язкої рідини. На моделях М-6.1, М-6.2 і М-6.3 насувний клин переміщувався у бік осадового комплексу зі швидкістю 1, 5 і 10 см/рік відповідно. Деформації повзкості враховувалися тільки для нижнього макрошару тришарової моделі осадової товщі. Для числових експериментів вибиралися значення $m = 1$, тоді $\gamma = 10^{-6}$ – емпіричний коефіцієнт в'язкості. Для моделі М-6.4 – $m = 1$, $\gamma = 10^{-5}$, що передбачає значно інтенсивніший розвиток деформацій повзкості. Нарешті, для моделі М-6.5 – $m = 1,5$, $\gamma = 10^{-6}$, що враховує нелінійні ефекти в'язкого деформування. Для порівняння використано поля напружень і деформацій, які отримані на аналогічній моделі без урахування в'язкості. Значення швидкості вибрані з огляду на результати геодезичних вимірювань сучасних тектонічних рухів.

Приклад полів інваріантів напружень і деформацій, зокрема лі-

нії ковзання (*slide lines*) зони розвитку розривних порушень ($\Delta\tau > 0$) для моделі М-6.1 подано на рис. 1.

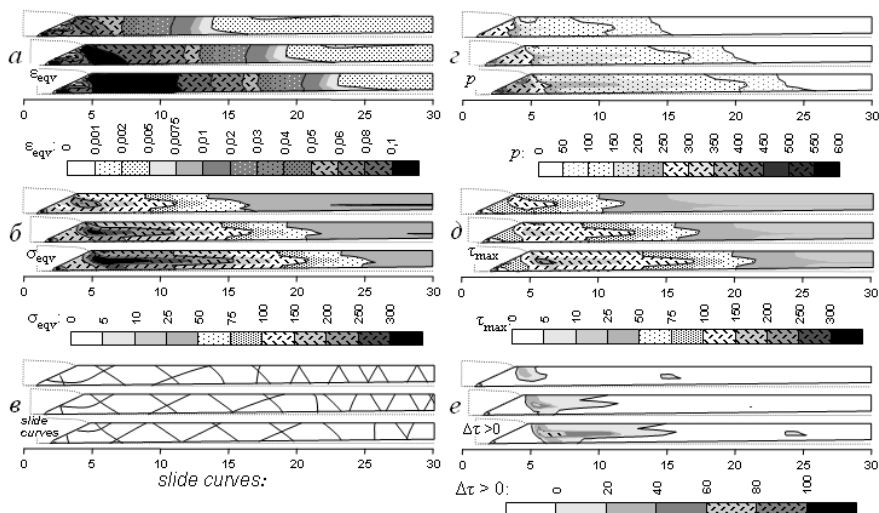


Рис. 1

1. Хом'як Л.М., Хом'як М.М. Моделювання напружено-деформованого стану осадового комплексу в зоні субдукції та динамічні умови формування ранніх насувів Українських Карпат // Геодинаміка. – 2013. – № 1 (14). – С. 142-153.
2. Jing L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering // Int. J. of Rock Mechanics & Mining Sciences. – 2003. – Vol. 40. – P. 283-353.
3. Wissing S.B., Ellis S., Pfiffner O.A. Numerical models of Alpine-type cover nappes // Tectonophysics. – 2003. – Vol. 367. – P. 145-172.

STRESS-STRAIN STATE MODELLING OF THE AUTOCHTHONOUS TAKING INTO ACCOUNT THRUST RATIO AND CREEP

Series of the finite-element 2D-models of dynamic influence of thrust wedge on autochthonous sedimentary complex are constructed. The models take into account a layered structure, different mechanical properties of layers, transfer of tectonic compression through mechanical frictional contact and creep in the bottom macrolayer. Using the developed technique of the complex analysis geological invariants of the strain-stress state of rocks in front of a thrust wedge are studied.

УДК 517.958:532.72

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕРМОДИФУЗІЇ З
УРАХУВАННЯМ РОЗПАДУ ЧАСТИНОК У ВИПАДКОВО
НЕОДНОРІДНІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ**

Ольга Чернуха, Володимир Гончарук, Анастасія Давидок

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна;*

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Міцнісні та теплотехнічні характеристики захисних частин будівель визначаються переважно нестационарними взаємозв'язаними процесами тепло- і вологоперенесення. Тому кількісні та якісні дослідження процесів тепломасоперенесення та визначення нестационарних полів температури, вологості, тиску належать до актуальних проблем математичного моделювання. На основі математичної моделі, побудованої за континуально-термодинамічним підходом, у роботі досліджено процеси термодифузії, що супроводжуються розпадом домішки типу хімічних реакцій або радіоактивного розпаду, у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі.

Нехай у смузі товщини z_0 , що містить випадково розташовані підшари двох типів – матриці і включень, відбуваються взаємозв'язані процеси теплопровідності і дифузії домішки, які супроводжуються розпадом мігруючих частинок. Прийнято, що фази в тілі розташовані за рівномірним законом розподілу, а об'ємна частка матриці є набагато більшою за об'ємну частку включень. Нехтуючи конвективними складовими, концентрація домішки $c^{(j)}(z, t)$ та температурне поле $T^{(j)}(z, t)$ ($j = 0; 1$) в області матриці Ω_0 визначаються із системи рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{\partial c^{(0)}(z, t)}{\partial t} &= D_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}(z, t)}{\partial z^2} + D_T^{(0)} \frac{\partial^2 T^{(0)}(z, t)}{\partial z^2} - \lambda c^{(0)}(z, t), \\ \frac{\partial T^{(0)}(z, t)}{\partial t} &= \kappa_c^{(0)} \frac{\partial^2 c^{(0)}(z, t)}{\partial z^2} + \kappa_0 \frac{\partial^2 T^{(0)}(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_0, \quad t \in [0; \tau],\end{aligned}$$

а в області Ω_1 – з аналогічної системи з відповідними коефіцієнтами

$$\frac{\partial c^{(1)}(z, t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c^{(1)}(z, t)}{\partial z^2} + D_T^{(1)} \frac{\partial^2 T^{(1)}(z, t)}{\partial z^2} - \lambda c^{(1)}(z, t),$$

$$\frac{\partial T^{(1)}(z, t)}{\partial t} = \kappa_c^{(1)} \frac{\partial^2 c^{(1)}(z, t)}{\partial z^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 T^{(1)}(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_1, \quad t \in [0; \tau].$$

Тут D_0 , D_1 і κ_0 , κ_1 – коефіцієнти дифузії і температуропровідності в областях Ω_0 та Ω_1 , $D_T^{(0)}$, $D_T^{(1)}$ і $\kappa_c^{(0)}$, $\kappa_c^{(1)}$ – коефіцієнти взаємозв'язку полів температури і концентрації, λ – коефіцієнт інтенсивності розпаду домішки.

Розглянуто наступні граничні та початкові умови:

$$c(z, t)|_{z=0} = c^*, \quad c(z, t)|_{z=z_0} = 0; \quad T(z, t)|_{z=0} = T^*, \quad T(z, t)|_{z=z_0} = T^*;$$

$$c(z, t)|_{t=0} = 0, \quad T(z, t)|_{t=0} = T^*.$$

Крім того, прийнято ідеальні умови контакту для температури і неідеальні для концентрації.

Вихідну контактнo-крайову задачу зведено до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок якої побудовано у вигляді рядів Неймана. Знайдено розрахункові формули для визначення усереднених за ансамблем конфігурацій фаз полів концентрації розпадних частинок та температури у двофазній багатошаровій смузі з рівномірним розподілом фаз. Проведено числові дослідження розподілів усередненої температури і концентрації розпадної та нерозпадної домішки залежно від параметрів середовища. На рис. 1 наведено розподіли усередненої

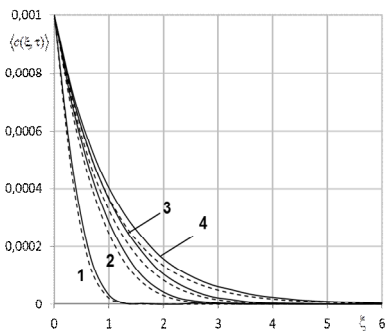


Рис. 1. Концентрація розпадної домішки в різні моменти часу

концентрації розпадної домішки у різні моменти безрозмірного часу $\tau=0,1; 0,5; 1; 10$ (криві 1-4) в однорідній (штрихові лінії) та неоднорідній (суцільні лінії) смузі.

MODELING THERMODIFFUSION PROCESSES TAKING INTO ACCOUNT PARTICLES DECAY IN A RANDOMLY NONHOMOGENEOUS STRATIFIED STRIP

The paper is devoted to mathematical modeling processes of thermodiffusion of the decaying substance in a randomly nonhomogeneous structure. The

contact initial boundary value problem is formulated with the conditions of the ideal contact for the temperature and the non-ideal one for the concentration. The equivalent set of integro-differential equations is constructed. Its solution is found in terms of the Neumann series. The calculating formulae are obtained and the dependence of the averaged fields of temperature and concentration on the medium characteristics is established.

УДК 539.3

ДО ВРАХУВАННЯ ПОЛІМОРФНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ І РЕЛАКСАЦІЙНИХ ЯВИЩ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТИТАНОВОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ ЗА ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВУ

Ігор Чупик, Івона Муліцка

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Озімска, 75, м. Ополь, 45370, Польща*

Титанові сплави широко використовують у різних конструктивних елементах. При їх виготовленні часто застосовують технології локального нагріву, при яких у матеріалі відбуваються поліморфні перетворення і, відповідно, змінюється фазовий склад, що спричиняє появу залишкових напружень. Виникнення цих напружень поглинає частину міцнісного ресурсу конструкцій. Питанням дослідження фазового складу виробів з титанових сплавів присвячені роботи [1-3]. Переважна більшість цих праць – експериментальні.

На фазовий склад матеріалу під час локального нагріву впливає температура і ступінь нерівноважності вихідної структури матеріалу (відхилення фазового складу від термодинамічно рівноважних показників). У матеріалах, які у початковому стані мають нерівноважний (метастабільний) фазовий склад, на його кінцевий просторовий розподіл істотно впливає тривалість локального нагріву. У цьому випадку фазовий склад матеріалу релаксує з часом до свого рівноважного стану навіть при температурах, які є менші за температури рівноважних фазових перетворень [4].

Метою даної роботи є дослідження впливу тривалості локального нагріву оболонки обертання, виготовленої із титанового сплаву ВТ-23, на розподіл фазового складу і залишкових напружень, що

при цьому виникають. Приймається, що матеріал оболонки у вихідному стані має рівномірний нерівноважний фазовий склад.

Запропоновано методику визначення тимчасового і залишкового напруженого стану тонкої осесиметричної оболонки з титанового сплаву при локальному кільцевому осесиметричному нагріві, в основу якої покладено математичну теорію локального нагріву оболонок, яка побудована для матеріалів і режимів нагріву без врахування структурних перетворень у матеріалі [2, 4] а також результати відомих експериментальних досліджень про релаксацію напружень за нагріву-охолодження [1].

Розроблено методику розв'язання сформульованих в рамках моделі задач визначення фазового складу і залишкового структурного напруженого стану виробів з титанових сплавів за умов локального нагріву на основі методу скінченних елементів в поєднанні з однокроковими різницевиими алгоритмами для апроксимацій по часу.

Використання раціонально підібраних за тривалістю схем локального нагріву дозволяє сформувати оптимальний фазовий склад зони нагріву і зменшити неоднорідність структурних складових, від чого залежить розподіл залишкових напружень у ньому і в такий спосіб покращити експлуатаційні властивості тонкостінних оболонкових конструкцій.

1. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Засыпкин В.В., Майстров В.И. Объемные изменения, происходящие в (α - β) титановых сплавах при полиморфном превращении // *Металловедение и термическая обработка*. – 1986. – № 1. – С. 52-55.
2. Monkawa M., Nagaki S. and Inine T. Analyses of structural and stress changes during quenching and low-temperature-tempering of steels // *J. of Society Material Science*. – 1980. – Vol. 29, N 327. – P. 1173-1179.
3. Budz S., Astashkin W., Budz I. and Chupyk I. Optimization of local heating for a spherical shell made of titanium alloy BT-23 // *Archives of mechanics*. – 1998. – Vol. 50, N 1. – P. 113-126.
4. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с.

STRESS DEFINITION OF LOCAL HEATED CIRCULAR SHELL TAKING INTO ACCOUNT POLYMORPHIC TRANSITION AND RELAXATION PHENOMENA

Numerical methodic for definition of temporal and residual stress state of local heated axis symmetric shell made from titanium alloy is developed on the basis of finite element method. Polymorphic transition and relaxation phenomena in homogeneous non-equilibrium phase state are taken into account.

AUXETIC MATERIALS: NECESSITY OF REFINING THE FOUNDATIONS OF CLASSICAL THEORY OF ELASTICITY

Jeremiah Rushchitsky

*Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine,
Nesterov Str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

The auxetic materials are commonly thought as materials with negative Poisson ratio. They are introduced into the scientific literature for last decades. Because they are studied mainly by scholars working in molecular physics and material science [1-7], then such definition is there quite sufficient. But for mechanics, this definition is too fuzzy. First of all, the Poisson ratio is an elastic constant, introduced in the classical linear isotropic theory of elasticity to express the Poisson law. This law was formulated as follows: when in a long linearly elastic rod or beam the uniform stress state is formed by tension of the rod at the ends (the rod is stretched and the longitudinal strain is positive), then the transverse strain becomes negative (the rod cross-section becomes smaller and the rod constricts). When the Poisson ratio is negative, this means that the transverse strain becomes positive (the rod cross-section increases and the rod swells). This explains the name for auxetic materials – the Greek word “αυξητικόζ” means “that which tends to increase”. The auxetic materials are sometimes named “auxetics”.

So, an existence of auxetic materials contradicts the Poisson law and, therefore, contradicts the foundations of theory of elasticity. This contradiction can be considered as conditional, because many authors of classical monographs and textbooks on the theory of elasticity show the restrictions on values of Poisson ratio $-1 < \nu < (1/2)$.

In this communication, some postulates of the classical theory of elasticity relative to the elastic constants (first of all, the Poisson ratio) are reconsidered from the point of view that auxetics are elastic materials, too. Three cases of modeling the auxetic materials – by the model of linear elastic isotropic body, by the model of linear elastic transversally isotropic body, by the nonlinear elastic isotropic body (Murnaghan potential) – are analyzed shortly. The initial assumption on positivity of internal energy of deformation is saved and then the uniform stress states (unilateral tension, omnilateral compression, pure shear) are used to analyze the elastic constants. This allows to describe the new mechanical effects: expansion of the standard sample-rod-prism under unilateral tension and expansion of the standard samplecube under hydrostatic compression as well as an existence of the arbitrary negative values of

Poisson ratios, what is accompanied by the negative values of the Lamé λ , Young E and compression k moduli, for the linear isotropic case and some elastic constants in the linear transversely isotropic case. The case of nonlinear description shows that the auxetic materials should be defined by the primary physical effect – observation in the standard for mechanics of materials experiment of longitudinal tension of a prism that the transverse deformation of prism is positive (a material as if swells) in contrast to the classical materials, where it is negative.

1. *Carneiro V.H., Meireles J., Puga H.* Auxetic Materials – A Review // *Materials Science.* – Poland. – 2013. – **31**, N 4. – P. 561-571.
2. *Evans K.E.* Auxetic polymers: a new range of materials // *Endeavour.* – 1991. – **15**. – P. 170-174.
3. *Gibson L.J., Ashby M.F., Schayer G.S., Robertson C.I.* The Mechanics of Two-Dimensional Cellular Materials // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* – 1982. – **382**. – P. 25-42.
4. *Gibson L.J., Ashby M.F.* The Mechanics of Three-Dimensional Cellular Materials // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* – 1982. – **382**. – P. 43-59.
5. *Lakes R.S.* Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio // *Science.* – 1987. – **235**. – P. 1038-1040.
6. *Pravoto Y.* Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio // *Computational Materials Science.* – 2012. – **58**. – P. 140-153.
7. *Wojciechowski K.W.* Constant thermodynamic tension Monte-Carlo studies of elastic properties of a two-dimensional system of hard cyclic hexameters // *Molecular Physics.* – 1987. – **61**. – P. 1247-1258.

UDC 539.3

SOLUTION OF THE EIGENVALUE PROBLEMS OF THE PLANE ELASTICITY THEORY FOR ORTHOTROPIC AND QUASI-ORTHOTROPIC WEDGES

Mykhaylo Savruk, Andrzej Kazberuk

*Karpenko Physico-Mechanical Institute
National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova Str., 5, Lviv, 79060, Ukraine;*

*Bialystok University of Technology,
Wiejska Str., 45-A, Bialystok, 15351, Poland*

Nowadays fiber reinforced composites are widely used in engineering structures. These structures are commonly considered as orthotropic materials, thus the solutions of corresponding notch problems

become attractive. The problem of the distribution of singular stress fields near the wedge vertex is important in fracture mechanics of bodies with angular corners. Solutions of this type eigenvalue problems of the theory of elasticity are used for wedge-shaped regions where asymptotic stress field at infinity is expressed in terms of stress intensity factors at the wedge vertex [1].

The eigenvalue problem of the sharp wedge in infinite two-dimensional elastic orthotropic domain was solved. The wedge occupies region $S = \{(r, \theta); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha, 2\alpha > \pi\}$, where r, θ are polar coordinates with pole in the wedge vertex and polar axis oriented alongside wedge bisector $z = x + iy = re^{i\theta}$. The solution is restricted to the notches symmetrically oriented to the principle elastic directions of the orthotropic material. For determination the singular stress field the following relationship was obtained

$$\sigma_{ik} = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I}} g_{ik}(\alpha, \theta) + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}}} f_{ik}(\alpha, \theta), \quad i, k = r, \theta, \quad (1)$$

where $\tilde{K}_I^V, \tilde{K}_{II}^V$ are stress intensity factors at the V-notch vertex for both symmetric and antisymmetric stress distributions. Functions $g_{ik}(\alpha, \theta)$ and $f_{ik}(\alpha, \theta)$ depend on the elastic material constants E_1, E_2, G, ν_{12} . The stress singularity exponents $0 < \lambda_I, \lambda_{II} \leq 1/2$ are roots of the characteristic equations:

$$\begin{aligned} &(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \operatorname{tg} \alpha \mp \gamma_2(1 + \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2 - \lambda)\beta_2(\alpha)] \pm \\ &\pm \gamma_1(1 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2 - \lambda)\beta_1(\alpha)] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

where the upper (lower) signs refer to the symmetric (antisymmetric) distributions, and

$$\beta_k(\alpha) = \pi + \operatorname{arctg}(\gamma_k \operatorname{tg} \alpha); \quad \gamma_1^2 \gamma_2^2 = E_1/E_2, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = E_1/G - 2\nu_{12}.$$

The characteristic equation was obtained previously in another form [2-4]. The comparison showed that the solutions of equations (2) are consistent with the data presented in [3, 4]. The corresponding characteristic equations in [2] contain errors.

The limit transition to quasi-orthotropic materials ($\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$) was performed and the explicit equations for that case were obtained:

$$\begin{aligned} &2\gamma_1 \operatorname{tg} \alpha \cos[2(2 - \lambda)\beta_1(\alpha)] - (1 - \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin[2(2 - \lambda)\beta_1(\alpha)] \mp \\ &\mp 2\gamma_1(1 - \lambda) \operatorname{tg} \alpha = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

In the paper the numerically calculated values of λ_I and λ_{II} for various orthotropic and quasi-orthotropic materials and for the full range

of wedge angle $\pi < 2\alpha \leq 2\pi$ are presented. The stress components of the singular stress field in the vicinity of sharp notch under loading condition I (tension) and II (shear) were formulated in the terms of stress intensity factors. Using these relationships charts of effective Von Mises stresses were plotted for both symmetric and antisymmetric distributions.

The work was supported by National Science Center (Poland) under the project № 2011/03/B/ST8/06456.

1. Саврук М.П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідн. посіб. / За заг. ред. В.В. Панасюка. – **14**. – Львів: СПОЛОМ. – 2012. – 384 с.
2. Blinowski A., Rogaczewski J. On the order of singularity at V-shaped notches in anisotropic bodies // Arch. Mech. – 2000. – **52**, № 6. – P. 1001-1010.
3. Bogy D.B. The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading // J. Appl. Mech. – 1972. – **39**. – P. 1103-1109.
4. Wu Z., Liu Y. Analytical solution for the singular stress distribution due to V-notch in an orthotropic plate material // Eng. Fract. Mech. – 2008. – **75**. – P. 2367-2384.

UDC 539.3

SOLUTION OF MIXED BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF ELASTICITY AND THERMOELASTICITY FOR ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS SOLIDS

**Yuriy Tokovyy, Yuriy Lozynskyy, Sergey Aizikovich,
Chien-Ching Ma**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova Str., 3-B, Lviv, 79060, Ukraine;*

*Don State Technical University,
Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation;*

*Southern Federal University,
Bolshaya Sadovaya Str., 105, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation;*

*National Taiwan University,
Roosevelt Rd., No 1, Sec. 4, Taipei, 10617, Taiwan (ROC)*

Mixed boundary value problems (the ones with boundary conditions imposed for both stress-tensor and displacement-vector components on different parts of the surface) of elasticity and thermoelasticity

ty theories present a challenge for attack by both analytical and numerical means and, on the other hand, they have many important applications in the solid mechanics (e. g., the contact problems on a punch indentation into an elastic body, when the punch action is modeled by a transversal boundary displacement within the contact area, meanwhile the remaining part of the surface is assumed to be force-free). These problems become more involved, when an elastic body is assumed to be inhomogeneous, due to the fact that the governing equations of these problems appear to be with unknown variable coefficients, which makes it impossible, in general, to solve the problems by employing the classical procedure. One of the most popular methods for analysis of the elastic and thermoelastic response of inhomogeneous solids lies in assumption of the material properties in the form of specific functions of the coordinates (basically, as linear, power, hyperbolic, or exponential ones, etc.), which are comparatively simple for analytical treatment of the relevant boundary value problems. These assumptions, however, limit substantially the range of inhomogeneous materials which can be attempted by this means. An alternative approach, which allows for analysis of arbitrarily-inhomogeneous solids, consists in representation of the latter ones by assemblies of perfectly connected homogeneous sub-layers so that the original dependence of the material properties within the inhomogeneous body can be approximated by a piecewise-constant function. The weakness of this approach is the possible stress discontinuities at the layer interfaces, the weak convergence of the approximate solution to the exact one with increment of the number of layers, and complication in modeling of three-dimensional problems. To overcome this difficulty, the method of integral equations can be employed [1], which, along with the method of resolvent-kernel algorithm, allows for constructing the solutions to the elasticity and thermoelasticity problems in terms of stresses for arbitrarily-inhomogeneous solids in an explicit form.

On the other hand, construction of correct solutions to the problems of elasticity and thermoelasticity for inhomogeneous solids with mixed boundary conditions calls for establishment of the fundamental one-to-one relations between the stresses and displacements which are valid for all points of a deformable solid, including its boundary, and arbitrary dependences of the material properties on the coordinates. These relations allow for bringing the constructed solution into agreement with fundamental principles of the continua mechanics as well as for treatment of all possible cases of boundary conditions in a similar manner.

In this talk, we present a general approach to solution of the two-dimensional mixed boundary-value problems of the thermoelasticity theory for cross-wisely inhomogeneous solids. As an example, a plane problem of thermoelasticity for an infinitely long orthotropic strip with

elastic moduli arbitrarily varying from one its side to another is addressed. Establishment of the relations between the boundary stresses and displacements, which have been achieved by correct integration of the Cauchy relations, allowed for reduction of the original mixed boundary conditions to the case, when the tractions are given on the boundary. Solution of the problem for the latter case has been obtained in the earlier work [2] for arbitrary dependence of the material properties on the transversal coordinate.

This work was supported in a part by the joint grant of the Ukrainian National Academy of Sciences (project No 0114U005082) and Russian Foundation of Basic Research (projects No 13-08-01435 a, 14-08-91166 ГФЕН_a, 14-07-90406 Укр_a). The fourth author gratefully acknowledges particular financial support by the National Science Council (ROC) under grant NSC 102-2811-E-002-018.

1. *Tokovyy Y.V., Kalynyak B.M., Ma C.-C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach / in R.B. Hetnarski (ed.) // Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3350-3356.
2. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // Int. J. Solids Structures. – 2009. – **46**. – P. 3850-3859.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ І ТЕРМОМЕХАНІКИ

УДК 539.3

ПРОСТОРОВИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЕЛЕМЕНТІВ ДІЮЧОГО ЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

Богдан Дробенко, Степан Будз, Володимир Асташкін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Проблеми забезпечення надійності роботи енергетичного обладнання та подовження термінів його експлуатації належать до найважливіших у вітчизняній енергетиці. За умов обмеженого фінансування питання оцінки залишкового ресурсу й придатності такого обладнання до подальшого використання понад гарантований на момент запуску термін постає надзвичайно гостро, адже значна частина такого обладнання вже вичерпала, або майже вичерпала свій парковий ресурс. За наявності численних експлуатаційних пошкоджень також виникає потреба у розробці раціональних технологій ремонту та відновлення елементів енергообладнання з метою продовження термінів їх експлуатації на прогнозований період.

Оцінку ресурсу елементів енергетичного обладнання виконують шляхом визначення їх стану за рівнем накопиченої пошкоджуваності металу, що є базою для кількісного оцінювання додаткового ресурсу, можливостей та умов подальшої експлуатації. Рівень накопиченої пошкоджуваності при цьому істотно залежить від значень максимальних напружень та амплітуди їх зміни за різних режимів промислової експлуатації обладнання. У зв'язку з цим виникає практична потреба у побудові та розвитку методик уточненого розрахунку напруженого стану елементів енергообладнання за умов експлуатації. Такі методики можна будувати на основі співвідношень нелінійної термомеханіки з використанням сучасних числових методів.

Подано результати досліджень процесів деформування конструктивних елементів діючих котлоагрегатів і можливостей їх подальшої експлуатації понад парковий ресурс, отриманих на основі співвідношень неізотермічної термопружно-пластичності за використання методу скінченних елементів та родини однокрокових багатопараметричних алгоритмів. Отримані результати впроваджені на Добротвірській і Бурштинській ТЕС ПАТ ДТЕК „Західенерго” та ВП „ЗАЕС”.

3D STRESS-STRAIN STATE OF ELEMENTS OF ACTING ENERGETIC EQUIPMENT

The results of simulation of the stress-strain state of acting energetic equipment elements are considered. The quantitative evaluation for the possibility of its further operation has obtained.

УДК 539.3

ЗАЛИШКОВІ НАПРУЖЕННЯ В ЕЛЕМЕНТАХ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПІСЛЯ ПОЖЕЖІ

Богдан Дробенко, Олександр Бурик

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Сучасні програми дослідження вогнетривкості будівельних конструкцій за умов пожежі формують переважно на основі окремих експериментів за реальних масштабних пожеж та великої кількості тестів і випробувань у спеціальних печах, в яких температуру оточуючого середовища витримують відповідно до введених стандартів. Однак, можливості дослідження поведінки конструкцій за масштабних пожеж є доволі обмеженими і коштовними, а під час експериментів у печах, розглядають лише деякі параметри окремих елементів. У переважній більшості досліджень в області вогнетривкості конструкцій розглядають поведінку структур і елементів будівель лише на стадіях зростання і розвитку пожежі. Оскільки механічні й структурні властивості елементів конструкцій залежать від історії навантаження, надзвичайно важливо дослідити напружено-деформований стан будівлі і під час охолодження нагрітих елементів, а також на стадії експлуатації будівлі після пожежі. Тому виникає практична потреба у розробці математичних моделей та відповідного програмного забезпечення для кількісного опису й оцінки вогнетривкості конструкцій за різних сценаріїв розгортання пожежі, що дає змогу проаналізувати поведінку конструктивного елемента чи цілої будівлі й отримати експертну оцінку їх вогнетривкості, запасу ресурсу чи рівня напружень в окремих елементах під час пожежі та після неї.

На основі рівнянь нелінійної термомеханіки за різних модельних припущень (просторово тривимірні, в межах плоскої задачі, з використанням моделей балок) запропоновано загальний підхід до математичного й числового моделювання поведінки будівельних констру-

кцій за умов пожежі. Розподіли температури в елементах конструкцій під час пожежі й наступного охолодження описує нестационарне рівняння теплопровідності. За відомими температурними розподілами на другому етапі розв'язування задачі визначаємо напружено-деформований стан конструктивних елементів з використанням загальних співвідношень неізотермічної термопружно-пластичності за допомогою методу скінченних елементів.

Як приклад, наведено результати комп'ютерного моделювання процесів деформування деяких елементів будівельних конструкцій під час пожежі та після різкого охолодження. Зокрема, на рис. 1 показано напруження на нижній поверхні жорстко защемленої на кінцях рівномірно навантаженої балки із сталі С30 (розміром 2 м x 0,2 м x 0,2 м) в моменти часу, коли її температура на нижній поверхні досягла відповідно 50, 100, ... 500°C. На рис. 2 штриховою лінією для порівняння подано пружні напруження уздовж цієї ж поверхні балки в момент часу, коли температура нижньої поверхні досягла 500°C, а на рис. 3 приведено напруження за товщиною балки в околі защемлених країв в цей же момент часу.

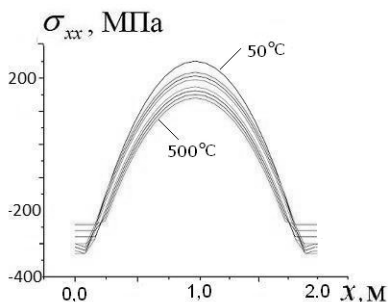


Рис. 1

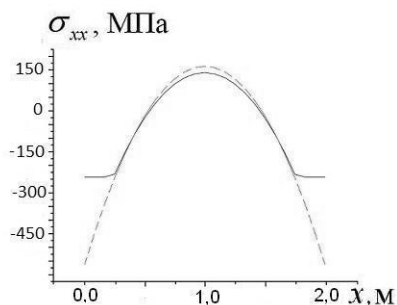


Рис. 2

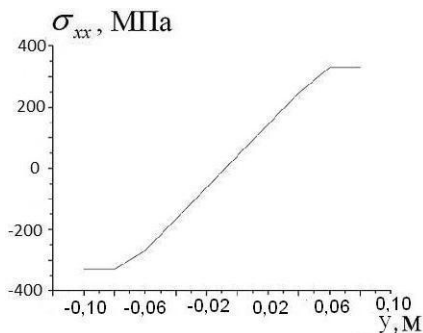


Рис. 3

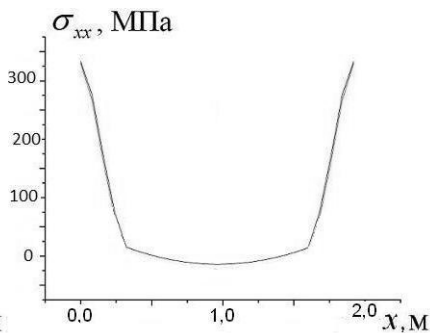


Рис. 4

Залишкові напруження на нижній поверхні балки після її інтенсивного охолодження приведено на рис. 4.

Подано результати і для інших елементів конструкцій, а також наведено порівняння отриманих розв'язків з відомими аналітичними розв'язками та експериментальними даними.

RESIDUAL STRESSES IN BUILDING STRUCTURES ELEMENTS AFTER THE FIRE

A mathematical simulation approach to the description of the behaviour of building structures subjected to the fire is presented. A numerical model is developed for determination stress state in building structures during the entire stage of fire exposure, including loading at ambient temperature, heating, cooling to the ambient temperature and post-fire loading.

УДК 539.3

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ НА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ НЕПРУЖНИХ ТІЛ

Василь Карнаухов, Володимир Козлов, Іван Киричок

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

Елементи конструкцій з непружних пасивних (без п'єзоефекту) і п'єзоактивних матеріалів широко використовуються в різних галузях сучасної техніки. Одним з найбільш важливих з теоретичної і практичної точок зору типів навантажень є моногармонічне навантаження. Якщо частота такого навантаження близька до резонансної, виникають резонансні коливання, які можуть привести до втрати функціональної здатності конструкції. Непружні матеріали мають таку специфічну особливість, як гістерезисні втрати, в результаті яких механічна та електрична енергія розсіюється в теплову. Дослідженню вимушених коливань непружних тіл присвячено дуже багато статей, монографій, енциклопедій. Проте в більшості з цих робіт гістерезисні втрати враховуються тільки при дослідженні чисто механічних явищ, а впливом температури дисипативного розігріву нехтується. Проте в залежності від механічних, електричних та теплофізичних властивостей матеріалів, умов навантаження, механічних, електричних і температурних граничних умов дисипативний розігрів може суттєво вплинути як на електромеханічну, так і на теплову поведінку непружних елементів конструкцій. Тому при дослідженні вимушених коливань непружних тіл з пасивних і п'єзоактивних матеріалів необхідно обов'язково враховувати дисипативний

розігрів, як результат гістерезисних втрат.

В даній доповіді висвітлюються основні результати, одержані у відділі термопружності Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України з моделювання вимушених коливань і дисипативного розігріву тонкостінних і просторових тіл обертання з непружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів при гармонічному та електромеханічному навантаженні. Обговорюються наступні питання: постановка зв'язаних задач для просторових тіл з непружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів; розробка на основі цієї постановки та тих чи інших додаткових гіпотез моделей вимушених коливань і дисипативного розігріву тонкостінних непружних елементів; розробка чисельно-аналітичних методів розв'язування зв'язаних задач для просторових і тонкостінних елементів; розв'язок конкретних класів задач і дослідження ефектів, породжених впливом дисипативного розігріву; використання дисипативного розігріву в інженерній практиці.

Для моделювання одночастотних коливань і дисипативного розігріву непружних тіл можна використовувати моделі термов'якопружності, термопластичності, термов'язко-пластичності. Проте, як це показано в роботах М.М. Боголюбова, гістерезисні втрати приводять до встановлення режиму коливань з частотою зовнішнього навантаження. Виходячи з цього факту можна суттєво спростити постановку задачі і використати концепцію комплексних характеристик, коли спрощені визначальні рівняння для пасивних і п'єзоактивних матеріалів мають такий же вигляд, як і лінійні визначальні рівняння в'якопружності з параметрами, які є функціями незалежних польових величин (температури, деформацій і напруженості електричного поля). При цьому значно спрощується і визначальне рівняння для дисипативної функції, яке співпадає з осередненою за період потужністю. В результаті незалежно від природи гістерезисних втрат моделювання вимушених коливань і дисипативного розігріву просторових тіл з непружних пасивних та п'єзоактивних матеріалів зводиться до розв'язування нелінійних комплексних систем диференціальних рівнянь відносно незалежних польових величин [3]. При цьому виникає декілька типів фізичної нелінійності: перший тип породжується залежністю комплексних характеристик від температури та залежністю дисипативної функції від незалежних польових величин; другий тип фізичної нелінійності породжується залежністю комплексних характеристик і дисипативної функції від деформацій і напруженості електричного поля; третій тип фізичної нелінійності пов'язаний з врахуванням обох указаних типів фізичної нелінійності. Обговорюється питання про обґрунтування концепції комплексних характеристик. Для цього подано порівняння результатів розрахунків з використанням нелінійних моделей в'якопружності і концепції комплексних характеристик і виявлено їх задовільне узгодження [1-3].

З використанням вказаної постановки тривимірних задач на основі додаткових гіпотез обговорюється питання про моделювання вимушених коливань і дисипативного розігріву тонкостінних елементів з непружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів. Розглянуто моделі, побудовані на основі класичних гіпотез Кірхгоффа-Лява й уточнених гіпотез типу С.П. Тимошенка. Обговорюються питання про чисельно-аналітичні методи розв'язування одержаних в рамках вищезгаданих постановок нелінійних зв'язаних задач для просторових і тонкостінних елементів конструкцій. Ці методи ґрунтуються на різного типу ітераційних процедурах, які зводять розв'язок нелінійних задач до послідовності лінійних задач в'язкопружності та лінійних задач теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для цих лінійних задач використано чисельні методи дискретної ортогоналізації та метод скінченних елементів [2]. В деяких частинних випадках для тонкостінних елементів одержано також аналітичні розв'язки, які є еталонними для апробації чисельних методів.

На основі вказаних постановок і методів розв'язано широке коло конкретних задач для просторових і тонкостінних тіл і шляхом аналізу числових результатів виявлено суттєвий вплив температури дисипативного розігріву на їх механічний, електричний і тепловий стан [2]. При певних умовах дисипативний розігрів може привести до специфічного типу теплового руйнування, коли елемент конструкції не розділяється на частини, але втрачає свою функціональну здатність в результаті досягнення температурою деяких критичних точок. Так, наприклад, при досягненні температурою дисипативного розігріву точки Кюрі п'єзоматеріалу елемент стає пасивним і перестає виконувати своє функціональне призначення.

Вказано, що дослідження взаємодії полів є теоретичною основою деяких технологічних процесів, зокрема, таких, як зварювання пластмас ультразвуком, лікування злоякісних пухлин (гіпертермія), активне демпфування коливань елементів конструкцій за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів тощо. Вони мають також важливе практичне значення при оцінці роботоздатності елементів конструкцій з полімерів та композитів на їх основі, наприклад, твердопаливних двигунів, великогабаритних шин, полімерних амортизаторів, випромінювачів і приймачів звуку, мікроелектронних елементів і т.п.

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. – К.: Наук. думка, 2013. – Т. 3. Термомеханическая теория вязкоупругих тел. – 2013. – 428 с.
2. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. – К.: Наук. думка, 2013. – Т. 4. Вынужденные колебания и диссипативный разрыв неупругих тел. – 2014. – 568 с.

3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 426 с.

THE INFLUENCE OF TEMPERATURE OF DISSIPATIVE HEATING ON FORCED VIBRATIONS OF NONELASTIC BODIES

The formulation of coupled problems of thermomechanics of nonelastic three-dimensional and thin-walled bodies under harmonic mechanical and electrical loading, the methods of the solutions of coupled problems and the influence of temperature of dissipative heating on the mechanical, thermal and electrical behavior of the bodies are discussed.

УДК 534.1:629.764.7

**ТЕНЗОРНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В НАХИЛЕНИХ
ЦИЛІНДРИЧНИХ РЕЗЕРВУАРАХ**

Іван Луковський

*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, м. Київ-4, 01601, Україна*

В цій доповіді ми зосередимося на формулюванні крайових задач нелінійної теорії руху обмеженого об'єму рідини, що частково заповнює нахилений резервуар в формі прямого кругового циліндра. Характерним для цього практично важливого випадку є те, що об'єм, зайнятий рідиною, являє собою істотно несиметричну конфігурацію. Традиційні постановки гідродинамічних задач в декартовій системі координат приводять навіть в лінійній постановці до складних крайових задач математичної фізики, які не допускають навіть часткового розділення змінних. Ще більші труднощі математичного характеру виникають на шляху розробки методів розв'язування задач динаміки твердих тіл з рідиною в нелінійній постановці. Частково уникнути цих труднощів можна, як буде показано далі, за рахунок введення в розгляд ефективної криволінійної системи координат і послідовного застосування апарату тензорного аналізу.

Далі розглядається постановка задачі про вільні коливання рідини в нерухомому резервуарі циліндричної форми, вісь якого нахилена до вектора прискорення $\vec{g}$ сил земного тяжіння під кутом α . Як правило, при постановці математичних задач цієї теорії до розгляду вводяться дві системи декартових координат $Ox'y'z'$ і $Oxyz$ з

початком на незбуреній вільній поверхні Σ_0 (рис. 1).

Традиційна постановка задачі про вільні коливання ідеальної нестисливої рідини в гравітаційному полі полягає у відшукуванні потенціала швидкостей $\Phi(x', y', z', t)$ і форми збуреної вільної поверхні $\Sigma(t)$ із наступної нелінійної крайової задачі [1]:

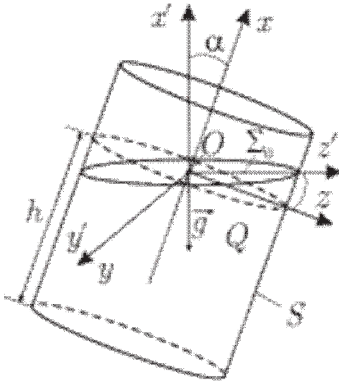


Рис. 1

$$\Delta\Phi = 0, \bar{r} \in Q(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{(\nabla\zeta)^2}}, \bar{r} \in \Sigma(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0, \bar{r} \in S(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + gx' = 0, \bar{r} \in \Sigma(t), \quad (4)$$

де $\zeta(x', y', z', t) = 0$ – рівняння збуреної вільної поверхні рідини $\Sigma(t)$; $\bar{\nu}$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні області $Q(t)$, зайнятої рідиною.

Спектральна задача цієї теорії пов'язана з дослідженням наступної задачі на власні значення:

$$\Delta\phi(x', y', z') = 0, \bar{r} \in Q_0, \frac{\partial\phi}{\partial x} = \kappa\phi, \bar{r} \in \Sigma_0; \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, \bar{r} \in S_0, \quad (5)$$

де $\kappa = \frac{\sigma^2}{g}$ – відповідне власне значення крайової задачі (5), яке в за-

дачах динаміки обмеженого об'єму рідини іменується частотним параметром. У зв'язаній системі координат $Oxyz$ крайова задача (5) записується наступним чином:

$$\Delta\phi(x, y, z) = 0, \bar{r} \in Q_0, \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, \bar{r} \in S_0, k_0 = tg\alpha_0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_0^2}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - k_0 \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = \kappa\phi, \bar{r} \in \Sigma_0. \quad (6)$$

Зазначимо, що область Q_0 в цій системі координат, як і у вихідній, має неосесиметричну конфігурацію, обмежену циліндричною поверхнею, площиною $x = -h$ і вільною поверхнею Σ_0 еліптичної форми.

З метою розробки альтернативних наближених методів розв'язування спектральних задач типу (6), а також створення модальних ме-

тодів дослідження нелінійних крайових задач теорії коливань обмеженого об'єму рідини несиметричної конфігурації, видається природною спроба перетворення вихідної області в область більш простої геометричної форми.

В розглядуваному нами випадку введемо до розгляду перетворення

$$x = k(z + z_0) - h, y = \xi \cos \eta, z = \xi \sin \eta, \quad (7)$$

де ξ, η – полярні координати на площині Oyz , h – глибина рідини при $\alpha = 0$ ($k_0 = 0$), $z_0 = h / k_0$. Якщо параметр k вважати змінним ($0 \leq k \leq k_0$), то при значенні $k = 0$ в системі координат $Oxyz$ маємо рівняння дна циліндра $x = -h$, а при значенні $k = k_0 = \alpha_0$ – рівняння незбуреної вільної поверхні.

Виберемо тепер в якості криволінійних координат параметри $x_1 = k, x_2 = \xi$ і $x_3 = \eta$, а розглядуваний об'єм рідини Q віднесемо до простору, зв'язаного із системою координат $Ox_1x_2x_3$. Перетворення (7) прийме тоді вигляд

$$x = x_1(x_2 \sin x_3 + z_0) - h, y = x_2 \cos x_3, z = x_2 \sin x_3, \quad (8)$$

причому $0 \leq x_1 \leq k_0, 0 \leq x_2 \leq \eta_0, 0 \leq x_3 \leq 2\pi$. Обернене по відношенню до (8) перетворення визначається формулами

$$x_1 = \frac{x + h}{z + z_0}, x_2 = \sqrt{y^2 + z^2}, x_3 = \arctg \frac{z}{y}. \quad (9)$$

У відповідності з загальною ідеєю введення криволінійних координат, формулами (7) і (8) по суті вводиться до розгляду два простори, перший із яких віднесено до системи прямокутних координат xuz , а другий – до системи координат $x_1x_2x_3$. Реальному обмеженому об'єму рідини в цих просторах відповідають замкнуті області τ і τ^* , обмежені відповідно кусково-гладкими поверхнями S і S^* .

Для досягнення сформульованої вище мети простір, точки якого визначаються криволінійними координатами x_1, x_2, x_3 і до якого віднесено область τ^* , доцільно тепер перетворити в рімановий простір R_3 , метрика якого задається фундаментальною квадратичною формою $ds^2 = g_{ik}dx_i dx_j$, де $g_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ – компоненти коваріантного тензора другого рангу, який задовольняє відповідним умовам неперервності, симетричності та інваріантності відносно допустимих перетворень координат. Компоненти $g_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ метричного тензора

визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 = (x_2 \sin x_3 + z_0)^2, \\
 g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} = (x_2 \sin x_3 + z_0) x_1 \sin x_3, \\
 g_{13} &= \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_3} = (x_2 \sin x_3 + z_0) x_1 x_2 \cos x_3, \\
 g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 = x_1^2 \sin^2 x_3 + 1, \\
 g_{23} &= \frac{\partial x}{\partial x_2} \frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1^2 x_2 \sin x_3 \cos x_3, \\
 g_{33} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3} \right)^2 = x_2^2 (x_1^2 \cos^2 x_3 + 1). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Вирази для g_{ik} (10) свідчать, що вибрана система криволінійних координат $x_1 x_2 x_3$ не є ортогональною, оскільки $g_{ik} \neq 0$ при $i \neq k$. У відповідності з (10)

$$q = \det[g_{ik}(x_1, x_2, x_3)] = x_2^2 (x_2 \sin x_3 + z_0)^2, \quad (11)$$

що, і як повинно бути, повністю узгоджується з якобіаном перетворення

$$D(x, y, z) / D(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{q} x_2 (x_2 \sin x_3 + z_0). \quad (12)$$

В розглядуваному випадку компоненти асоційованого матричного тензора мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 g^{11} &= \frac{x_1^2 + 1}{(x_2 \sin x_3 + z_0)^2}, \quad g^{12} = -\frac{x_1 \sin x_3}{x_2 \sin x_3 + z_0}, \\
 g^{13} &= -\frac{x_1 \cos x_3}{x_2 (x_2 \sin x_3 + z_0)}, \quad g^{22} = 1, \quad g^{23} = 0, \quad g^{33} = \frac{1}{x_2^2}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

На основі формул (11) та (13) легко встановити вирази для елементів об'єму $d\tau$ та елементів поверхонь $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$, які відповідають незбуреній вільній поверхні рідини, боковій поверхні та дну циліндра:

$$d\tau = \sqrt{q} dx_1 dx_2 dx_3 = x_2(x_2 \sin x_3 + z_0) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (14)$$

$$d\sigma_1|_{x_1=k_0} = \sqrt{qg^{11}} x_2 \sqrt{k_0^2 + 1} dx_2 dx_3,$$

$$d\sigma_2|_{x_2=r_0} = \sqrt{qg^{22}} r_0(r_0 \sin x_3 + z_0) dx_1 dx_3,$$

$$d\sigma_3|_{x_1=0} = \sqrt{qg^{33}} x_2 dx_2 dx_3. \quad (15)$$

До основних математичних об'єктів нелінійної динаміки обмеженого об'єму рідини ми відносимо спектральну задачу з параметром в граничних умовах типу (5) або (6) та нелінійну крайову задачу (1)–(4), що описує вільні коливання ідеальної рідини в гравітаційному полі.

Інваріантна форма нелінійної крайової задачі, що описує гравітаційні хвилі в обмеженому об'ємі рідини з вільною поверхнею, може бути подана в криволінійних координатах в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi = & g^{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + 2g^{13} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ & + 2c \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + e \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \text{ в } Q^*, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma^*} = \left(g^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + g^{21} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + g^{31} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = \frac{f_t}{N} \Big|_{\Sigma^*}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{x_2=r_0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + g^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_0=r_0} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{x_1=0} = \left(g^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} = 0. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \\ & + g[(x_1(x_2 \sin x_3 + z_0) - h) \cos \alpha - x_2 \sin x_3 \sin \alpha] = 0 \text{ на } \Sigma^*. \end{aligned} \quad (20)$$

В динамічній умові на вільній поверхні Σ^* через g позначено прискорення сил земного тяжіння. Ця система рівнянь разом з умовою збереження об'єму являє собою повну сукупність рівнянь для визначення потенціалу швидкостей $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ та форми вільної поверхні $\zeta(x_1, x_2, x_3, t) \equiv x_1 - \text{const} - f(x_2, x_3, t) = 0$.

Спектральна задача типу (11) формулюється для незбуреної області Q_0^* в просторі параметрів $x_1 x_2 x_3$, для функції $\phi(x_1, x_2, x_3)$ одержимо відповідну спектральну задачу в наступному вигляді:

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ в } Q_0^*, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \kappa \phi \text{ на } S_0^*, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_1^*, \int_{\Sigma_0^*} \phi d\sigma_1 = 0. \quad (21)$$

При цьому крайова умова на незбурений вільній поверхні Σ_0^* і умова неперетікання на S_0^* в криволінійній системі координат $x_1 x_2 x_3$ формулюються на основі (13), (17)-(19) з використанням виразів:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{x_1=k_0} = \left[g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + g^{31} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right]_{x_1=k_0}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{x_2=r_0} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right]_{x_2=r_0}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{x_1=0} = \left[g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right]_{x_1=0}. \quad (23)$$

Наведені вище нелінійна крайова задача (16)-(20) і спектральна задача (21) сформульовані для області Q^* більш простої, порівняно з вихідною, конфігурації. В просторі параметрів $x_1 x_2 x_3$ область Q^* має форму прямого кругового циліндра ($0 \leq x_1 \leq k_0, 0 \leq x_2 \leq r_0, 0 \leq x_3 \leq 2\pi$) з елементами площ поверхонь (21), що обмежують об'єм Q^* (незбуреної вільної поверхні Σ_0^* , бокової поверхні S_2^* , дна циліндра S_3^* та збуреної вільної поверхні Σ^*).

Це відкриває в конструктивному аспекті широкі можливості застосування варіаційних принципів механіки в плані створення подальших методів при дослідженні нелінійних проблем динаміки твердого тіла з рідиною у випадку нахилених циліндричних порожнин.

З іншого боку, проведене дослідження видається також перспективним і в плані розробки альтернативних варіаційних чисельно-аналітичних методів розв'язування спектральної задачі (21), яка є базовою в нелінійній теорії просторового руху твердих тіл з порожнинами, частково заповненими рідиною.

1. Луковский И.А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. – К.: Наук. думка, 2010. – 407 с.

TENSOR FORMULATION BOUNDARY PROBLEMS OF NONLINEAR THEORY OF OSCILLATIONS OF THE LIQUID IN AN INCLINED CYLINDRICAL TANKS

The report discusses the general principle of rational choice of unlimited systems of curvilinear coordinates, and proposed formulas for the transformation of three-dimensional non-symmetric regions in regions of a simple geometric configuration. On the basis of a Riemannian space formulate the main boundary-value problems of nonlinear dynamics of a limited volume of fluid in a tensor form and offers the ways for their further studies. The concrete realization is demonstrated in example of an area in the form of a truncated circular cylinder.

УДК 519.6

**ПОСТАНОВКА І РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ
ТЕРОПРУЖНИХ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО
ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ**

Романна Малець, Георгій Шинкаренко

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;*

*Політехніка Опольська,
вул. Любошицька, 3, м. Ополь, 45036, Польща*

Досліджено задачу термопружності для тонких пружних оболонок, податливих до зсуву та стиснення під впливом нестационарного теплового та силового навантаження. Побудову цієї моделі виконано за допомогою процедури напівдискретизації методу Гальоркіна варіаційної задачі тривимірної термопружності. В результаті застосування гіпотез Тимошенка-Міндліна стосовно лінійності зміщень та температури за змінною товщини та Дюгамеля-Неймана, щодо деформаційних співвідношень, шуканими функціями у задачі є вектор пружних зміщень і поворотів нормалі та вектор приросту температури, які визначені на серединній поверхні оболонки. Враховується взаємний вплив температурного поля та поля механічних напружень. Тобто, розглядається зв'язна задача динамічної термопружності.

Застосовані способи дискретизації, що ґрунтуються на варіаційних формулюваннях та приводять до заміни тривимірної (за просторовими змінними) задачі деякою двовимірною варіаційною задачею, що дозволило послабити вимоги гладкості на простори допустимих функцій.

Нехай пружне тіло займає у просторі $\mathbb{R}^3$ обмежену область D

з неперервною за Ліпшицем границею $S = \partial D$.

Припускаємо, що на нього діють масові сили $\{F_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$, поверхневі навантаження $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ на $S_\sigma \subset S$, внутрішні джерела тепла $g = g(\mathbf{x}, t)$ і тепловий потік $\bar{q} = \bar{q}(\mathbf{x}, t)$ на границі $S_q \subset S$, під впливом яких виникають пружні переміщення $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ та приріст температури $\theta(\mathbf{x}, t)$ відносно початкової температури $\theta_0(\mathbf{x})$. Вважаємо, що ці характеристики задовольняють рівняння лінійної термопружності [1, 2].

Простори допустимих переміщень і температур визначені таким чином:

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{V} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{V} = 0 \text{ на } S_u\}, \quad G = \{\xi \in H^1(D) : \xi = 0 \text{ на } S_\theta\},$$

$$Z = L^2(D), \quad \mathbf{H} = Z^3,$$

Варіаційне формулювання досліджуваної задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано } \mathbf{U}_0 \in \mathbf{Y}, \mathbf{V}_0 \in \mathbf{H}, \theta_0 \in Z; \\ \text{знайти } \{\mathbf{U}, \theta\} \in L^2(0, T; \mathbf{Y} \times G) \text{ такі, що} \\ m(\mathbf{U}'(t), \mathbf{V}) + c(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}) - b(\theta(t), \mathbf{V}) = \langle l_s(t), \mathbf{V} \rangle, \\ c_\varepsilon \vartheta(\theta'(t), \xi) + \Lambda(\theta(t), \xi) + b(\xi, \mathbf{U}'(t)) = \langle l_c(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{U}'(0) - \mathbf{V}_0, \mathbf{V}) = 0, \quad c(\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_0, \mathbf{V}) = 0, \\ \vartheta(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{Y} \quad \forall \xi \in G, \end{cases}$$

Шляхом відокремлення незалежної змінної товщини оболонки сформульована відповідна частково дискретизована варіаційна задача. Невідомими отриманої задачі зв'язної динамічної термопружності оболонок, податливих на зсув та стиснення, виступають вектор пружного зміщення точок серединної поверхні і кутів повороту нормалі серединної поверхні та вектора приросту температури.

Окреслено клас регулярності вхідних даних частково дискретизованої варіаційної задачі, які гарантують єдність та неперервну залежність шуканого розв'язку в енергетичній нормі задачі. На додаток доведено існування розв'язку розглядуваної задачі як границі послідовності напівдискретних (за просторовими змінними) апроксимацій Гальоркіна.

1. Ignaczak J., Starzewski M.O. Thermoelasticity with Finite Wave Speeds. – New York: Oxford University Press Inc., 2010. – 432 p.
2. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 2. – С. 53-61.

STATEMENT AND SOLVABILITY OF THE VARIATIONAL PROBLEM OF THERMOELASTIC THIN SHELLS, COMPLIANT TO SHEAR AND COMPRESSION

We present the model of thin shells, compliant to shear and compression, under the influence of non-stationary heat and force loads. This model is constructed using the Timoshenko-Mindlin hypotheses due to the linear approximation of displacements regarding the thickness variable and the linear distribution of temperature. The variational problem was formulated by the particularly Galerkin discretization of dynamic coupled three-dimensional thermoelasticity problem. As a result, we obtained the variational problem of thermoelasticity of thin shells in terms of the vector of elastic displacements, temperature and their derivatives after thickness variable on the mid-surface of the shell. In view of the energy balance equation also we found sufficient conditions for the setting the well-posedness of the resulting variational problem.

УДК 539.3

**ЗАСТОСУВАННЯ ІМПУЛЬСНИХ ФУНКЦІЙ ДО
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ
КВАЗІСТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ
ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ**

Ігор Махоркін, Любов Мاستикаш

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглядається пружне ізотропне сферичне тіло з центральною сферичною порожниною, що піддається зовнішньому комбінованому центрально-симетричному термосиловому навантаженню, яке залежить від температури граничних поверхонь. Фізико-механічні властивості матеріалу тіла залежать від температури, а його початкова температура неоднорідна по товщині. Припускається також, що матеріал тіла володіє простою тепловою нелінійністю (коефіцієнт температуропровідності незначно залежить від температури).

Для визначення теплового та напруженого стану тіла використано відомі співвідношення [1-3], а саме: нелінійне рівняння теплопровідності для знаходження температурного поля $t(r, \tau)$, рівняння рівноваги в переміщеннях зі змінними коефіцієнтами, співвідношення Дюамеля-Неймана та граничні умови.

З огляду на наявність простої теплової нелінійності, для розв'язування задачі теплопровідності застосовано підхід, який полягає у введенні змінної Кірхгофа [1]

$$\vartheta = \int_{t_n}^t \lambda_t(\xi) d\xi \quad (1)$$

та поданні температурних залежностей фізико-механічних характеристик матеріалу у вигляді кусково-постійних функцій температури

$$p(t) = p_1 + \sum_{i=1}^m (p_{i+1} - p_i) S_+(t - t_i), \quad t_{\Pi} < t_1 < t_2 < \dots < t_K, \quad (2)$$

що дало можливість, зокрема, однозначно визначити температуру через змінну Кірхгофа в аналітичному вигляді з інтегрального співвідношення (1) за довільної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури.

Тут $S_+(\zeta - \zeta_i) = \{1, \zeta > \zeta_i; 0, \zeta \leq \zeta_i\}$ – асиметрична одинична функція Хевісайда, $p_i = \text{const}$ в інтервалі температур $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ із заданою точністю відповідають фактичному значенню відповідної фізико-механічної характеристики, (t_{Π}, t_K) – розглядуваний температурний інтервал.

Підставляючи подані у вигляді (2) характеристики у співвідношення термопружності, було отримано диференціальне рівняння з коефіцієнтами типу асиметричних імпульсних функцій (одинична функція, дельта-функція Дірака) від складного аргументу. З використанням властивостей цих функцій [2] побудовано аналітичні розв'язки відповідних центрально-симетричних задач термопружності термочутливих тіл. Запропоновано аналітично-числову процедуру дослідження їх термопружної поведінки.

Проведено числові дослідження термопружного стану порожнистої термочутливої ізотропної сфери зі сталим початковим розподілом температури за дії внутрішнього джерела тепла та теплового удару і сталих тисків на граничні поверхні.

З метою верифікації результатів проведено аналогічні дослідження напружено-деформованого стану за допомогою методу збурень. З'ясовано ефективність запропонованого підходу.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект Ф54.2/015 конкурсу спільних проектів фундаментальних досліджень ДФФД України і БРФФД – “ДФФД–БРФФД–2013”).

1. Лыков Л.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 599 с.
2. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.

USE OF IMPULSE FUNCTIONS FOR SOLUTION OF CENTRALLY SYMMETRIC QUASISTATIC THERMOELASTICITY PROBLEMS OF THERMOSENSITIVE BODIES

An approach to solution of centrally symmetric transient thermal problems and quasistatic thermoelasticity problem of thermosensitive isotropic body under thermomechanical loading which depended of boundary surfaces temperature has been approved. The approach is based on the use of elements of algebra of generalized functions and approximation of temperature dependences of physico-mechanical material characteristics by piecewise-constant functions of temperature

УДК 539.4:621.6

РАЗРАБОТКА ИНЖЕНЕРНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА СЛОИСТЫХ ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ И ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ

Валентин Можаровский, Дмитрий Кузьменков, Наталия Марьина

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь*

Настоящая работа посвящена разработке алгоритма решения граничных задач для неоднородного покрытия с учетом функционально-градиентных и термочувствительных свойств материала. Для приближенного инженерного расчета покрытия из ФГМ рассмотрены контактные задачи типа [1, 3]: найти распределение давления в области контакта и определить напряженно-деформированное состояние покрытия и основания при граничных условиях [1]. В случае жесткого скрепления неоднородного ортотропного покрытия с однородным основанием используются граничные условия [3].

Для решения данной контактной задачи строится функция Грина, а затем, учитывая граничные условия, составляется интегральное уравнение, из решения которого и определяется неизвестное давление $p(x)$ в зоне контакта. Функция Грина строится по формулам для вертикального перемещения u на границе неоднородной полосы $y=0$ при действии нормальной и касательной единичных сил. Решение для неоднородного покрытия строится по методике [1] с учетом температурных эффектов.

Проводились исследования по расчету изменения температурного поля в покрытии из функционально-градиентных материалов в случае движения индентора по поверхности покрытия. Для этого ис-

пользовались разработанные теоретические подходы, представленные в [1]-[3].

Рассмотрен расчет покрытия из композита, представляющего собой высокомодульные параллельные волокна в податливой полимерной матрице. Исследуется напряженное состояние полосы из композитного материала, свободно лежащей на жестком основании при действии сосредоточенной силы $P\delta(x)$.

Рассмотрена контактная задача о вдавлении жёсткого шара в упругое функционально-градиентное покрытие. Аналитическое решение данной осесимметричной задачи находим, используя интегральное преобразование с ядром Ханкеля. Используя методику построения функции Грина для слоя [Valentin Mozharovsky, Sergey Shilko, Natalia Marina, Study of contact parameters of the reinforced layered rubber with reference to creation of tires // 10-th International Symposium of Ukrainian Mechanical Engineers in Lviv, 25-27 May, 2011, p. 14-16], легко получаем асимптотические зависимости, дающие компоненты перемещений слоя при действии давления в зоне контакта. Возможен и другой путь, когда используется условие равновесия для построения алгоритма расчета.

Был разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений, возникающих в теле с ФГМ.

Программа автоматически строит графики напряжений для различных значений параметра неоднородности k .

Исследования выполнены при частичной поддержке БРФФИ (грант № T13K-025).

1. *Sakti Pada Barik*. Effect of anisotropy on thermoelastic contact problem / Sakti Pada Barik, M. Kanoria, P.K. Chaudhuri // Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – V. 29. – № 4. – P. 501-510.
2. *Можаровский, В.В.* Анализ механико-математических моделей расчета функционально-градиентных материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // Материалы, технологии и инструменты. – 2013. – № 4. – С. 5-13.
3. *Можаровский, В.В.* Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский, Ю.М. Плескачевский, С.Ю. Бабич, Е.М. Березовская // Трение и износ. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379-385.

DEVELOPMENT OF ENGINEERING METHODS LAYERED COMPOSITE SYSTEMS TRIBOLOGICAL MATERIALS WITH REGARD TO FUNCTIONALLY GRADED AND THERMOSENSITIVE PROPERTIES

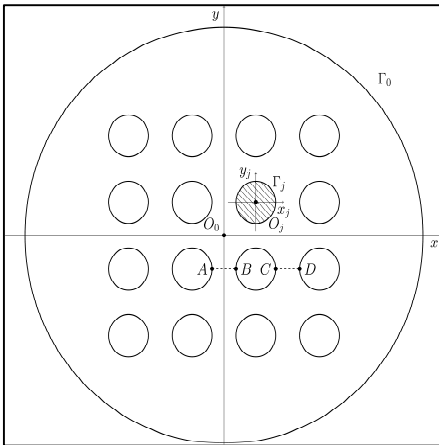
An algorithm for solving boundary value problems for inhomogeneous coatings based on functionally graded and termosensitivity properties of the material.

МОДЕЛЬ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ОДНОСПРЯМОВАНОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТУ

Олексій Ніколаєв, Євген Танчік

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна

Розглянемо циліндричний зразок односпрямованого волокнисто-



го композиту, волокна якого утворюють тетрагональну структуру з шістнадцятьма циліндричними включеннями (див. рис.). Передбачається, що волокна знаходяться в ідеальному контакті з матрицею, а до зовнішньої границі зразка прикладене кусково-постійне радіальне навантаження. Вважається, що матеріали матриці та включень мають пружні сталі (G, σ) та (G_j, σ_j) відповідно, радіуси зразка та включень є R і R_j , відстань між сусідніми волокнами

дорівнює $2a$ ($a > R_j$). Будемо використовувати однаково орієнтовані циліндричні (ρ_j, φ_j, z_j) системи координат, початки яких віднесено до центрів зовнішнього циліндра та включень O_j , $j = 0 \div 16$. Точки O_j розташовані в одній площині, яка перпендикулярна осі зразка.

Для визначення напружено-деформівного стану в розглянутому тілі необхідно розв'язати крайову задачу для рівняння Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad \mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_0} = T\mathbf{e}_\rho = \begin{cases} T, & |z| \leq h/2, \\ 0, & |z| > h/2. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_j$ – вектори переміщень в матриці та включенні, $\mathbf{F}\mathbf{U}$ – вектор зусиль на відповідній граничній поверхні, який відповідає переміщенню $\mathbf{U}$; Γ_j – границя циліндричного включення з центом O_j .

Розв’язок задачі шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}) = & \sum_{j=1}^{16} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_j(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda, \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad (5)$$

де $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$, $B_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ – невідомі функції, які визначаються з граничних умов, Ω , Ω_j – області матриці та включення, $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)$ є повним набором часткових лінійно незалежних розв’язків рівняння Ламе для циліндра [1].

Граничні умови задовольняються точно за допомогою апарату узагальненого методу Фур’є [1]. У результаті отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$, $B_{s,m}^{(j)}(\lambda)$, оператор якої є фредгольмовим у гільбертовому просторі l_2 за умови неперетинання граничних поверхонь, а також $\forall \lambda \neq 0$. Останнє дає можливість ефективно знаходити чисельний розв’язок даної системи методом редукції при фіксованих значеннях параметра λ . При чисельній реалізації задачі отримано значення компонентів тензора напружень на лініях AB і CD , які з’єднують центри сусідніх включень (див. рис.), в залежності від відстані між включеннями та пружних характеристик матеріалів матриці та включень. Наведено розподіл напружень для площин $z = 0$ і $z = \frac{h}{2}$.

Проведено порівняння результатів для чотирьох та шістнадцяти включень.

1. Николаев А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости: монография / А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 344 с.

STRESS STATE MODEL OF UNIDIRECTIONAL FIBER COMPOSITE

A three-dimensional model of elastic deformation of a unidirectional fiber composite, whose fibers are cylindrical inclusions, is proposed. Tetragonal packing of sixteen inclusions is considered. Displacement vectors in the matrix and inclusions are constructed using the generalized Fourier method. Calculations of stress tensor components on lines of their maximum concentration of the geometric and mechanical characteristics in a wide range are given.

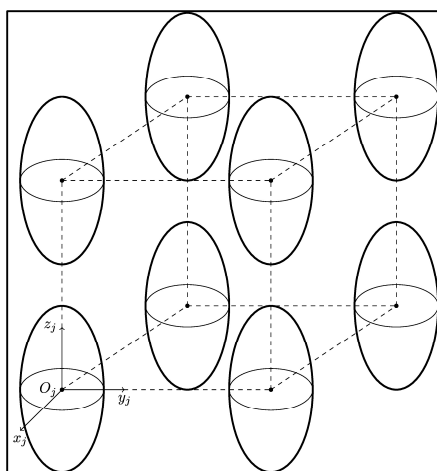
УДК 539.3

НЕОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ПРУЖНИЙ СТАН ПРОСТОРУ З ВИТЯГНУТИМИ СФЕРОЇДАЛЬНИМИ ПОРОЖНИНАМИ

Олексій Ніколаєв, Євген Танчік

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна

Розглядається пружний простір Ω з вісьмома непересічними



сфероїдальними порожнинами, центри яких знаходяться у вершинах O_j куба зі стороною a (див. рис.). Використовуються однаково орієнтовані циліндричні (ρ_j, φ_j, z_j) та витягнуті сфероїдальні системи координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, початки яких віднесено до центрів порожнин O_j , $j = 1 \div 8$. Вважається, що на нескінченності прикладене постійне розтяжне зусилля $\sigma_z^\infty = T$, $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосний розтяг) або $\sigma_\rho^\infty = T$, $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$

(двоосний розтяг), а границі порожнин вільні від напружень.

Загальний розв'язок крайової задачі для рівняння Ламе

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2)$$

у пружному просторі Ω шукається у вигляді суперпозиції лінійно незалежних зовнішніх частинних розв'язків рівняння Ламе для витягнутих сфероїдів [1]:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^8 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \phi_j), \quad (4)$$

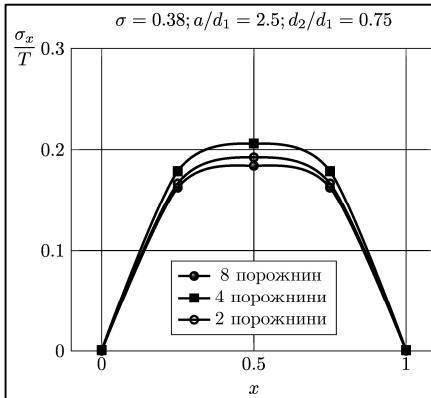
де $\mathbf{U}$ – функція переміщень, σ – коефіцієнт Пуассона, $A_{s,n,m}^{(j)}$ – невідомі коефіцієнти. Переміщення $\mathbf{U}_0$ відповідає напружено-деформівному стану на нескінченності (для одноосного та двоосного розтягу пружного простору):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

де T – зусилля на нескінченності, G – модуль зсуву, $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ – орти циліндричної системи координат. Для зображення вектора пере-

міщень $\tilde{\mathbf{U}}$ у системах координат з початками O_j використовуємо апарат узагальненого методу Фур'є [1]. У результаті задоволення граничним умовам (2) отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_{s,n,m}^{(j)}$, оператор якої є фредгольмовим у гільбертовому просторі l_2 за умови неперетину граничних поверхонь. Чисельні розрахунки було проведено при різ-



них відносних відстанях a/d_1 між порожнинами та різних відношеннях напівосей d_1/d_2 порожнин. Одержано графіки розподілу нормальних компонент тензора напружень на лініях, що з'єднують центри порожнин. Наведено порівняння результатів для різного чис-

ла порожнин. Вище на рис. представлено таке порівняння для напружень σ_x / T у випадку одноосного розтягу.

1. Николаев, А.Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. - Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. - 109 с. - Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 - Ук 93.

NONAXISYMMETRIC ELASTIC STATE OF SPACE WITH PROLATE SPHEROIDAL CAVITIES

The problem of determination of the stress-strain state in an elastic space with eight prolate spheroidal cavities is solved by generalized Fourier method. The centers of the cavities are located at the vertices of the cubic lattice. The cases of uniaxial and biaxial tension of space at infinity are considered. Spheroidal cavities are free of load. The numerical analysis of stresses on the edges of the lattice for different geometrical parameters is carried out.

УДК 539.3

МЕТОД КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ПОБУДОВІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

Ярослав Пастернак, Роман Пастернак, Георгій Сулим

*Луцький національний технічний університет,
вул. Львівська, 75, м. Луцьк, 43018, Україна;*

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Сучасні високотехнологічні прилади та пристрої часто містять виготовлені з п'єзоматеріалів елементи, що слугують сенсорами, актуаторами чи електромеханічними перетворювачами. Найвищими значеннями п'єзоелектричних коефіцієнтів наділені сегнетоелектрики, які в свою чергу також виявляють і термоелектропружні властивості. Тому при побудові моделей та розрахункових підходів до дослідження п'єзоелементів приладів враховують можливість внутрішньої взаємодії якомога більшої кількості полів, зокрема, теплового, електричного та механічного. При цьому застосування аналітичних методів аналізу дає можливість виявити нові істотні зв'язки та впливи різних параметрів, які доволі складно з'ясувати шляхом використання числових підходів.

Тому у даному дослідженні запропоновано підхід, що дає можливість отримати інтегральні рівняння та деякі фундаментальні розв'язки для плоских задач термоелектропружності тіл практично до-

вільної форми. Метод полягає у використанні конформних відображень плоских областей на півпростір та подальшого застосування авторського підходу [1] на основі формалізму Стро і теорії функції комплексної змінної для побудови інтегральних подань комплексних потенціалів термоелектропружності у відображеній області. У свою чергу останні дають можливість безпосередньо отримати інтегральні рівняння задачі, ядра яких також є і фундаментальними розв'язками для заданих областей.

1. Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H. Boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**, No. 11. – P. 1514-1523.

CONFORMAL MAPPING TECHNIQUE IN DERIVATION OF INTEGRAL EQUATIONS AND FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR PLANE PROBLEMS OF THERMOELECTROELASTICITY

This study presents general complex variable approach for obtaining extended Somigliana integral identities, corresponding boundary integral equations, their kernels and Green's functions for 2D domains that can be conformally mapped on a half-plane.

УДК 539.3

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СКЛАДОВИХ ПЛАСТИН

Олександр Петров, Юрій Черняков, Павло Стеблянко

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
пр-т Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна;*

*Дніпродзержинський державний технічний університет,
вул. Дніпробудівська, 2, м. Дніпродзержинськ, 51918, Україна*

Основними методами розв'язання нестационарних задач теорії термо-пружно-пластичності є:

- різницевий метод розв'язання у теорії простих процесів деформування;
- метод скінченних елементів у теорії простих процесів деформування і теорії процесів малої кривизни;
- метод розщеплення за геометричними властивостями у теорії простих процесів деформування і теорії процесів малої кривизни.

В рамках різницевого методу та методу скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теорії термо-пружно-пластич-

ності зводиться до розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, побудованих за класичною схемою [1, 2], коли диференціальні оператори, які входять до складу повної системи рівнянь, замінюються на їх різницеві аналоги.

В залежності від вигляду фізичних співвідношень, які зв'язують напруження, деформації та температуру, можливі різноманітні варіанти цих методів. Це може бути різницевий метод у теорії простих процесів деформування, різницевий метод у теорії процесів деформування малої кривизни, метод скінченних елементів у теорії простих процесів деформування, метод скінченних елементів у теорії процесів малої кривизни та інші.

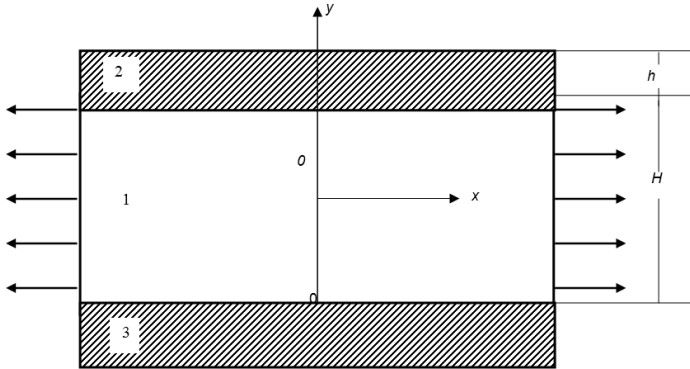
У роботі [1] запропоновано варіант методу покомпонентного розщеплення підвищеної точності, розроблений для розв'язання нестационарної задачі теорії термо-пружно-пластичності. Основними невідомими є швидкості зміщень, компоненти тензорів напружень та деформації і температура. Усі невідомі є функціями часу і координат.

Повну систему рівнянь складають три рівняння руху тонкостінного елемента конструкції і шість рівнянь для швидкостей зміни компонент тензорів напружки та деформації, отриманих за допомогою фізичних співвідношень шляхом виключення в них деформацій. При наявності пластичних деформацій використовуються співвідношення теорії процесів деформування середньої кривизни [2]. Температурне поле будується на підставі рішення нестационарного двовимірного рівняння теплопровідності з урахуванням можливого тепловиділення в процесі навантаження тіла.

Зазначена система нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних розв'язується чисельно за допомогою ітераційної процедури, заснованої на неявній схемі методу покомпонентного розщеплення. Нульовою ітерацією виступає рішення, побудоване за явною схемою.

Невідомі величини були представлені у виді сплайн-функцій (використовувалися як кубічні В-сплайни, так і напружені сплайни). Застосування апарату сплайн-функцій дало можливість записати нові більш точні різницеві вирази для диференціальних операторів, що входять до складу схем розщеплення. Це дозволило в цілому підвищити як мінімум на порядок точність обчислень по координатах.

Розглянуто задачу про нестационарне деформування тришарової пластини, складеної з різних матеріалів. Шар 1, який при початковій температурі $T=T_0$, однакою для усіх точок тіла, має плоскі границі $y = -H/2$, $y = H/2$ і розтягується в напрямку осі x за відомим законом на краях $x = L$, $x = -L$. Розподіл температури в складеній пластині обчислюється окремо.



Термомеханічні властивості шарів 2 і 3 однакові, залежать від температури і відмінні від властивостей шару 1. Вважаємо, що в процесі деформування саме тут можуть виникати пластичні деформації.

Результати представлені у виді таблиць і графіків. Ефективність методу оцінювалася шляхом порівняння обчислювальних витрат при одержанні результатів із класичним методом скінченних різниць.

1. *Стеблянюк П.А.* Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
2. *Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г.* Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5-ти т. – Т. 2: Термовязкопластичность. – Киев: Наукова думка, 1987. – 264 с.

УДК 517.94

МЕТОД ІТЕРАЦІЙ ПО ПІДОВАСТЯМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Олександр Поліщук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Під час чисельного розв'язання інтегральних рівнянь теорії потенціалу, еквівалентних тривимірним граничним задачам для рівняння Лапласа, зазвичай зіштовхувалися з двома основними пробле-

мами. Перша з них полягала в обґрунтуванні числових методів, тобто встановленні умов їхньої стійкості та збіжності. Ця проблема на даний час практично вирішена завдяки встановленню умов коректної розв'язності інтегральних рівнянь першого роду та систем, які включають подібні рівняння, еквівалентних основним граничним задачам для рівняння Лапласа [1-2]. Друга проблема полягає у великій ресурсоемності наближених методів, зокрема, у необхідності зберігання та розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, які дискретизують відповідні системи інтегральних рівнянь. Нові можливості для вирішення цієї проблеми з'явилися з появою багатоядерних персональних комп'ютерів та інтегрованих середовищ розробки програмного забезпечення для них, які містять засоби розпаралелювання обчислювальних процесів. Ці можливості вдається реалізувати шляхом розробки нових алгоритмів чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь теорії потенціалу, один з яких пропонується у даній роботі.

Нехай Γ – гранична поверхня, яка є об'єднанням окремих ділянок $\Gamma_i \subset \Gamma$, $i = \overline{1, N}$. Вважаємо, що на кожній ділянці Γ_i задана гранична умова $\gamma_{j,i}u(x) = f_{j,i}(x)$, $x \in \Gamma_i$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, якій повинна задовольняти шукана гармонійна функція $u(x)$, $x \in R^3$. Оператор сліду $\gamma_{j,i}$ функції $u(x)$ на ділянці Γ_i визначає тип граничної умови (Діріхле, Неймана, Пуанкаре, стрибка шуканої функції та (або) її нормальної похідної тощо), а $f_{j,i}$ – значення цієї умови. Граничні умови можуть бути як одно-, так і двосторонніми, у тому числі змішаними, тобто на різних сторонах ділянок граничної поверхні можуть задаватися граничні умови різних типів. Позначимо

$$u(x) = W(\gamma_1^1 u, \gamma_0^1 u)(x) = (U, V)(\gamma_1^1 u, \gamma_0^1 u)^T(x),$$

де U і V – потенціали простого та подвійного шару, γ_0^1 і γ_1^1 – оператори стрибка функції, визначеної у R^3 , та її нормальної похідної при переході через граничну поверхню Γ , $\gamma_1^1 u$ і $\gamma_0^1 u$ – густини потенціалів простого та подвійного шару відповідно. У результаті ми приходимо до необхідності розв'язання системи інтегральних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N \gamma_{j,k} W(\gamma_1^1 u, \gamma_0^1 u)(x) = f_{j,i}(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (1)$$

Континуальний варіант методу ітерацій по підобластям наближеного розв'язання системи (1) визначається співвідношенням:

$$\sum_{k \leq n} \gamma_{j,k} W(\gamma_1^1 u_{n+1}, \gamma_0^1 u_{n+1})(x) = f_{j,i}(x) - \sum_{k > n} \gamma_{j,k} W(\gamma_1^1 u_n, \gamma_0^1 u_n)(x), \quad (2)$$

$$x \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Нехай для апроксимації шуканої густини потенціалів застосовуються системи тотальних функцій, наприклад, скінченні елементи, згенеровані на сітках, побудованих у областях визначення ділянок $\Gamma_i, \quad i = \overline{1, N}$:

$$\gamma_1^1 u_n = \sum_{l=1}^L a_{n,l} \phi_l(x), \quad \gamma_0^1 u_n = \sum_{l=1}^L b_{n,l} \phi_l(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, \dots$$

У результаті отримуємо дискретний аналог (систему лінійних алгебраїчних рівнянь зі щільною матрицею) системи (2):

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq n} \gamma_{j,k} \sum_{l=1}^L W(\gamma_1^1 a_{n+1,l} \phi_l, \gamma_0^1 b_{n+1,l} \phi_l)(x) &= f_{j,i}(x) - \\ - \sum_{k > n} \gamma_{j,k} \sum_{l=1}^L W(\gamma_1^1 a_{n,l} \phi_l, \gamma_0^1 b_{n,l} \phi_l)(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки всі відображення у діагональних елементах системи (2) є стискаючими, ітераційна процедура, визначена співвідношенням (3), є збіжною [3].

У роботі пропонуються оптимальні обчислювальні схеми реалізації методу ітерацій по підобластям для дво- та чотириядерних процесорів персональних комп'ютерів, які можна розповсюдити і на більш загальний випадок.

1. Polishchuk A.D. Construction of boundary operators for the Laplacian // Proc. of the X-th Intern. Seminar "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory" (DIPED-2005), September 12-15, 2005, Lviv, Ukraine. – P. 137-142.
2. Polishchuk A.D. Construction of boundary operators for the Laplacian in the case of tired boundary surface // Proc. of the XI-th Intern. Seminar "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory" (DIPED-2006), October 12-13, 2006, Tbilisi, Georgia. – P. 153-160.
3. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

ITERATION METHOD ON SUBDOMAINS FOR NUMERICAL SOLUTION OF POTENTIAL THEORY INTEGRAL EQUATIONS

Iteration method on subdomains for numerical solution of systems of integral equations for simple and double layer potentials, equivalent to mixed three dimensional boundary value problems for the Laplacian are proposed.

ПРО ВИДІЛЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ В ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ПРОСТОГО ТА ПОДВІЙНОГО ШАРУ

Олександр Поліщук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Необхідність розв'язання граничних задач для рівняння Лапласа виникає під час моделювання багатьох фізичних процесів. Застосування потенціалів простого та подвійного шару призводить до необхідності розв'язання слабосингулярних та сингулярних інтегральних рівнянь Фредгольма. Однак, при вирішенні багатьох прикладних проблем реалізація числових методів потребує врахування особливостей у ядрі та шуканій густині потенціалу при наближенні до краю, ребра чи кутової точки граничної поверхні. Вирішенню цієї проблеми були присвячені, зокрема, праці [1, 2] у яких пропонувалися аналітичні методи виділення особливості для окремих видів поверхонь. Застосування скінченно-елементних апроксимацій шуканої густини потенціалу відкриває додаткові можливості для виділення особливостей та побудови нових універсальних алгоритмів обчислення відповідних інтегралів.

Нехай $\tilde{\Gamma}$ – ділянка граничної поверхні $\Gamma \in R^3$ з прямокутною областю визначення параметрів $\tilde{S} \in R^2$, в якій згенерована рівномірна прямокутна сітка $\tilde{S}_h$ з кроками h_τ , h_v , $P = [\tau_0, \tau_1] \times [v_0, v_1]$ – деякий елемент $\tilde{S}_h$, $\tau_1 - \tau_0 = h_\tau$, $v_1 - v_0 = h_v$. Зрозуміло, що виділяти особливість у густині доцільно лише для елементів сітки, дотичних до країв, ребер чи кутових точок граничної поверхні. Розглянемо елементи матриці системи колокаційних рівнянь, які в залежності від типу заданих на $\tilde{\Gamma}$ граничних умов та виду потенціалу, формуються з інтегралів виду

$$I_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{v_0}^{v_1} \frac{\rho(\tau, v) L(\tau, v) J(\tau, v)}{|x(\tau, v) - \tilde{y}|} dv d\tau,$$

$$I_2 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{v_0}^{v_1} \rho(\tau, v) L(\tau, v) J(\tau, v) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\tilde{y}}} \frac{1}{|x(\tau, v) - \tilde{y}|} dv d\tau,$$

$$I_3 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{v_0}^{v_1} \rho(\tau, v) L(\tau, v) J(\tau, v) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x(\tau, v) - \tilde{y}|} dv d\tau ,$$

$$I_4 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{v_0}^{v_1} \rho(\tau, v) L(\tau, v) J(\tau, v) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\tilde{y}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x(\tau, v) - \tilde{y}|} dv d\tau ,$$

де $\tilde{y} \in \tilde{\Gamma}$ – точка спостереження, $L(\tau, v)$ – базисна функція, визначена на P , $J(\tau, v)$ – якобіан перетворення системи координат, $\rho(\tau, v)$ – функція особливості густини, яку будуємо у вигляді

$$\rho(\tau, v) = \left(\frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau - \tau_0} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{v_1 - v_0}{v - v_0} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{\tau_0 - \tau_1}{\tau - \tau_1} \right)^{\alpha_3} \left(\frac{v_0 - v_1}{v - v_1} \right)^{\alpha_4} .$$

У випадку співпадиння внутрішніх точок спостереження та інтегрування при застосуванні квадратурних формул Гауса, функція $\rho(\tau, v)$ дає можливість повністю усунути особливість у ядрах інтегралів $I_1 - I_3$. У випадку кутових точок та ребер, поєднання застосування функції $\rho(\tau, v)$ та спеціальних квадратурних формул обчислення слабосингулярних інтегралів [3] при неспівпадинні точок інтегрування та спостереження дозволяє повністю усунути особливість у ядрі та густині інтегралів $I_1 - I_3$. У інших випадках, зокрема при обчисленні інтегралів $I_2 - I_4$ в околі ребер та кутових точок граничної поверхні при співпадинні точок інтегрування та спостереження використовуються спеціальні квадратурні формули обчислення сингулярних інтегралів [4].

У роботі наводяться приклади чисельного розв'язання за допомогою потенціалів простого та подвійного шару низки тривимірних граничних задач для рівняння Лапласа в областях зі складною границею, які ілюструють високу ефективність пропонуванних методів виділення особливостей.

1. *Иванов А.В., Тиунов М.А.* Применение метода граничных интегральных уравнений при моделировании формирования и динамики пучка в установках электронного охлаждения // Вестник НГУ. – Серия: Физика. – 2008. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 56-61.
2. *Медведев М.Ю.* Метод коллокации для решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле, расположенном в резонаторе // Изв. ВУЗов. – Физ.-мат. науки. – 2011. – № 2. – С. 28-40.
3. *Бойков И.В.* Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях. – Пенза: Изд-во ПГУ. – 1983. – С. 3-10.

4. Stoll H.V., Strauss P. On the numerical integration of certain singular integrals // Computing. – 1992. – Vol. 48. – P. 177-189.

ABOUT REMOVING THE SINGULARITIES IN INTEGRAL EQUATIONS FOR SIMPLE AND DOUBLE LAYER POTENTIALS

Method for removing the singularities in densities and kernels of integral equations for simple and double layer potentials in the case of tired boundary surfaces are proposed. Results of numerical experiments confirming its efficiency are described.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КОНТАКТУЮЧИХ ПІВПРОСТОРІВ З МИТТЄВИМИ ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМИ НА МЕЖІ ДОТИКУ

Василь Попович, Оксана Вовк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

При дослідженні напружено-деформованого стану елементів конструкцій, які працюють в умовах високих перепадів температур, особливо важливим є врахування термочутливості їх матеріалів, складного теплообміну, внутрішніх джерел, контактної взаємодії тощо. За нехтування перетворенням механічної енергії у теплову приходимо до розв'язування квазістатичної незв'язаної задачі термопружності, яка полягає у знаходженні температурного поля тіла та визначенні його термопружного стану, зумовленого цим полем та іншими можливими силовими факторами. Складність таких моделей – потреба розв'язування нелінійних крайових задач математичної фізики та крайових задач для систем диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Дана робота є продовженням досліджень, які стосуються застосування аналітико-числової методики, що базується на використанні методу лінеаризувальних параметрів [1], стосовно нелінійних задач теплопровідності. Раніше нами були побудовані розв'язки квазістатичних незв'язаних задач термопружності для термочутливих тіл простої геометричної форми за складного теплообміну, а також контактної задачі термопружності для двох термочутливих півпросторів за дії джерела тепла, залежного від часу і рівномірно розподіленого на межі контакту, коли матеріали півпросторів володіють простою нелінійністю [2, 3]. Тут побудовано роз-

в'язок цієї ж задачі теплопровідності за відсутності будь-яких обмежень на характер зміни теплових характеристик матеріалів півпросторів, що ускладнює побудову розв'язку, адже не дозволяє лінеаризувати рівняння теплопровідності шляхом введення змінної Кірхгофа, як у попередньому випадку. Тому для розв'язування отриманої нелінійної задачі на змінну Кірхгофа використано метод послідовних наближень. Крім того, досліджено термопружний стан півпросторів за дії миттєвого джерела різної потужності. Визначено вплив термочутливості матеріалів на розподіл температур та напружень у півпросторах.

Нестационарні температурні поля t_1, t_2 двох ідеально контактуючих півпросторів, що нагріваються на межі дотику миттєводіючим джерелом тепла інтенсивності q_0 визначаємо з рівнянь теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right) = c_v^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} \quad \begin{cases} i = 1, z > 0 \\ i = 2, z < 0 \end{cases} \quad (1)$$

за початкової

$$t_i|_{\tau=0} = t_p, \quad (2)$$

крайових

$$\frac{\partial t_i}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad t_i|_{z \rightarrow \infty} = t_p \quad (3)$$

та умов теплового контакту

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} = q(\tau), \quad (4)$$

де t_p – початкова температура півпросторів, $q(\tau) = q_0 \delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ – дельта-функція Дірака, $\lambda_t^{(i)}(t_i)$, $c_v^{(i)}(t_i)$ ($i = 1, 2$) – коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів півпросторів відповідно.

Термопружний стан півпросторів визначаємо з виразів, що описують випадок вільного від зовнішнього навантаження кусково-однорідного термочутливого простору з врахуванням умов обмеженості напружень, а також $t_i \rightarrow t_p$ на безмежності.

Аналітико-числова методика розв'язування поставленої задачі включає наступні кроки:

- зведення вихідної задачі до безрозмірного вигляду;
- часткова лінеаризація задачі у безрозмірних величинах шляхом застосування перетворення Кірхгофа та використання методу лінеаризувальних параметрів;

- застосування до отриманої задачі на змінну Кірхгофа методу послідовних наближень, який передбачає на кожному ітераційному кроці розв'язання лінійної задачі;
- розв'язування лінійної задачі на m -те наближення змінної Кірхгофа за допомогою перетворення Лапласа. В результаті чого знаходимо залежності $\theta_{im}(Fo, \bar{z}, \kappa)$;
- встановлення формул для обчислення температурних полів півпросторів за відомих залежностей коефіцієнтів теплопровідності внаслідок обернення перетворення Кірхгофа;
- визначення невідомого лінеаризувального параметру з умови рівності температур на межі контакту;
- визначення термopужного стану.

В результаті знайдено наступні основні безрозмірні залежності:
 m -их наближень змінних Кірхгофа

$$\theta_{1m}(Fo, \bar{z}, \kappa) = \frac{(1 + \kappa)Ki}{K_\lambda \sqrt{K_m^{(2)}} + \sqrt{K_m^{(1)}}(1 + \kappa)} \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} e^{-\frac{\bar{z}^2 K_m^{(1)}}{4Fo}}, \quad \bar{z} > 0, \quad (5)$$

$$\theta_{2m}(Fo, \bar{z}, \kappa) = \frac{Ki}{K_\lambda \sqrt{K_m^{(2)}} + \sqrt{K_m^{(1)}}(1 + \kappa)} \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} e^{-\frac{\bar{z}^2 K_m^{(2)}}{4Fo}}, \quad \bar{z} < 0; \quad (6)$$

m -их наближень температур

$$T_{im}(Fo, \bar{z}, \kappa) = k_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_i \theta_{im}(Fo, \bar{z}, \kappa)} - 1 \right) + T_p, \quad \text{де } k_i = \text{const},$$

та напружень

$$\bar{\sigma}_i(z, Fo) = -K_\sigma^{(i)} \frac{E_i^*(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \bar{\Phi}_i(t_i), \quad (7)$$

$$\text{де } \bar{z} = \frac{z}{l_0}, \quad T_i = \frac{t_i}{t_0}, \quad T_p = \frac{t_p}{t_0}, \quad Fo = \frac{a_0^1 \tau}{l_0^2}, \quad a_0^{(i)} = \frac{\lambda_{t0}^{(i)}}{c_v^{(i)}}, \quad K_a = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}},$$

$$Ki = \frac{q_0 l_0}{\lambda_{t0}^{(1)} t_0}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}}, \quad K_{m-1}^{(1)} = c_v^{(1)*} (T_{1m-1}) / \lambda_t^{(1)*} (T_{1m-1}),$$

$$K_{m-1}^{(2)} = K_a c_v^{(2)*} (T_{2m-1}) / \lambda_t^{(2)*} (T_{2m-1}), \quad \kappa - \text{невідомий лінеаризувальний}$$

$$\text{параметр, } K_\sigma^{(i)} = \frac{E_0^{(i)} \alpha_{t0}^{(i)}}{E_0^{(o)} \alpha_{t0}^{(o)}}, \quad l_0, t_0, E_0^{(o)}, \alpha_{t0}^{(o)} - \text{вибрані нами відлікові}$$

значення координати, температури, модуля Юнга і ТКЛР,

$\bar{\Phi}_i(T_i) = \int_{T_p}^{T_i} \alpha_{ti}^*(\xi) d\xi$. Зазначимо, що вирази T_{im} отримано за припу-

щення лінійної залежності від температури коефіцієнтів теплопро-
відності матеріалів, а саме $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t0}^{(i)}(1 + k_i(T_i - T_p))$.

Невідомий лінеаризувальний параметр κ визначено з умови
рівності температур на межі контакту, яка після нескладних пере-
творень набуває вигляду

$$(k_2(1 + \kappa) - k_1)^2 \theta_2(Fo, 0, \kappa) = 2(k_1 - k_2)\kappa.$$

Досліджено вплив термочутливості матеріалів півпросторів та
інтенсивності джерел тепла на величину та характер розподілу тем-
ператури та спричинених нею напружень.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках
наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД
(№ держреєстрації 0114U005082).

1. Кушнір Р.М., Попович В.С. Термопружність термочутливих тіл. –
Львів: Сполом, 2009. – 410 с. – (Моделювання та оптимізація в термоме-
ханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака,
Р.М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.).
2. Попович В., Вовк О. Побудова розв'язку контактної нестационарної задачі
теплопровідності для двох півпросторів з джерелом тепла на межі дотику
// Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми ме-
ханіки та математики». В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташ-
ника. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 157-159.
3. Попович В.С., Вовк О.М. Дослідження температурних полів термочутли-
вих півпросторів за дії джерела тепла на межі контакту // Матеріали
XIX Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми приклад-
ної математики та інформатики» (Львів, 3-4 жовтня 2013 р.). – ЛНУ
ім. І. Франка, 2013. – С. 111-112.

RESEARCH OF THERMOELASTIC STATE OF THE CONTACTING THERMO- SENSITIVE HALF-SPACES WITH INSTANT HEAT RELEASE ON THE EDGE TOUCH

*The solution of quasi-static thermoelasticity problem for two contacting
half-spaces with instant heat release on the contact boundary was constructed.
Their thermoelastic state was studied.*

ІНТЕГРО-АЛГЕБРИЧНІ РІВНЯННЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

Борис Процюк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

В [1, 2] визначення термopужного стану кусково-неоднорідних термочутливих циліндричних тіл, що перебувають під дією одновимірного температурного поля, зведено за допомогою функції Гріна задачі пружності для однорідного циліндра до розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відповідно відносно радіальних напружень за однакових сталих та радіальних переміщень за різних коефіцієнтів Пуассона складових. Для відшукування розв'язків цих систем використано метод послідовних наближень. Виявилось, що чим істотніша відмінність між коефіцієнтами Пуассона, тим більше необхідно наближень для досягнення заданої точності.

В даній роботі розроблено ефективну методику визначення термopужного стану зазначених тіл і для випадків, коли коефіцієнти Пуассона складових можуть значно відрізнятися. Вона передбачає розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень, але отриманих за допомогою функції Гріна задачі пружності для шаруватого циліндра з сталими фізико-механічними характеристиками (ФМХ) складових. Для n -шарового циліндра з залежними від температури і кординати ФМХ ця система рівнянь з урахуванням поверхневих навантажень σ_0 , σ_n має вигляд

$$\begin{aligned} c_p(\rho)u_p(\rho) - \frac{\phi_{2p}(\rho)}{2r_{p-1}Q} \left[\sum_{j=1}^{p-1} r_j M_{1j}^+ V_{aj}(r_j) - \sum_{j=1}^p r_{j-1} M_{1j}^- V_{bj}(r_{j-1}) \right] - V_{ap}(\rho) + \\ + V_{bp}(\rho) + \frac{r_p \phi_{1p}(\rho)}{2Q} \left[\sum_{j=p+1}^n \frac{c_{0p} M_{2j}^+}{r_{j-1} c_{0j}} V_{bj}(r_{j-1}) + \sum_{j=p}^n \frac{c_{0p} M_{2j}^-}{r_j c_{0j}} V_{aj}(r_j) \right] - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i(r_i) - \frac{1}{2Q} \left[\frac{\gamma_n r_p c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n(r_n) \phi_{2p}(\rho) - \frac{2\gamma_1 r_0}{r_{p-1}} u_1(r_0) \phi_{1p}(\rho) \right] = \end{aligned}$$

$$= u_{tp}(\rho) + \frac{1}{2Q} \left[\frac{2r_0^2}{r_{p-1}} \sigma_0 \phi_{2p}(\rho) - \frac{c_{0p}}{c_{0n}} r_p \sigma_n \phi_{1p}(\rho) \right] - \varepsilon_z u_{\varepsilon p}(\rho), \quad p = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де невідомі функції $u_p(\rho)$ входять в інтегральні оператори

$$V_{ap}(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu_p(t_p, r)}{1 - 2\nu_p(t_p, r)} \right) u_p(r) dr,$$

$$V_{bp}(\rho) = \rho \int_{\rho}^{r_p} \frac{1}{r} \frac{d\mu_p(t_p, r)}{dr} u_p(r) dr,$$

$V_{aj}(r_j), V_{bj}(r_{j-1})$; невідомою є також осьова деформація $\varepsilon_z = \text{const}$.

Розв'язок системи (1) шукали у вигляді

$$u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho) - \varepsilon_z u_p^{\varepsilon}(\rho),$$

де (з урахуванням змінності ФМХ) перший доданок описує переміщення, зумовлені температурним полем, другий – поверхневими навантаженнями у циліндрі з закріпленими торцями.

Осьову деформацію визначали з умови самоврівноваження зусиль, прикладених на торцях.

Числові дослідження проведено в тришарових циліндрах для різних комбінацій сталих коефіцієнтів Пуассона, але змінних інших ФМХ складових. При цьому показано, що для визначення з заданою точністю переміщень на основі системи рівнянь (1) необхідно менше наближень ніж на основі рівнянь [2]. Зокрема, для однієї з таких комбінацій для досягнення абсолютної точності 10^{-5} необхідно було відповідно 5 і 31 наближень.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0114U005081).

1. Процюк Б.В. Квазістатичні задачі термopужності для кусково-неоднорідних термочутливих циліндричних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи / Під заг. ред. В.Д. Кубенка, Р.М. Кушніра, Д.В. Тарлаковського – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2012. – С. 174-178.
2. Процюк Б.В. Визначення термopужного стану кусково-неоднорідних термочутливих тіл обертання // Сучасні проблеми механіки і математики / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – В 3-х т. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1 – С. 161-164.

**INTEGRO-ALGEBRAIC EQUATIONS OF ONE-DIMENSIONAL
THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR PIECEWISE-INHOMOGENOUS
CYLINDRICAL BODIES**

The systems of integro-algebraic equations in respect to radial displacements of one-dimensional thermoelasticity problems for piecewise-inhomogenous cylindrical bodies are obtained. It was accomplished using Green's function of elasticity problem for layered cylinder with constant physical-mechanical characteristics of constituents. The results of numerical researches are presented.

УДК 539.3

**ВПЛИВ КОНВЕКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ НА
ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО
ТРИСКЛАДОВОГО ТІЛА ЗА ДІЇ ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА**

Борис Процюк, Олег Горун

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянемо одновимірну нестационарну задачу теплопровідності для півбезмежного термочутливого трискладового тіла, яке перебуває під дією джерела тепла $w_t(z, \tau)$. Вважаємо, що на плоскопаралельних поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а через обмежуючу поверхню $z = z_3$ здійснюється конвективно-променевий теплообмін з середовищем зі змінною температурою $t_c(\tau)$.

Для визначення температурного поля використано перетворення Кірхгофа, узагальнені функції та функцію Гріна $G(z, \zeta, \tau)$ нестационарної лінійної задачі теплопровідності для трискладового простору [1]. Для змінної Кірхгофа, за припущення, що коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0,i}(1 + \beta_i t_i)$, коефіцієнти об'ємної теплоємності мають вигляд $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0,i} c_i(t_i)$ ($i = 1, 2, 3$), а коефіцієнти температуропровідності є сталими в межах кожної області, що має місце для ряду металів, отримано таке інтегральне подання:

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' + \\ & - \int_0^{\tau} \left[G(z, \zeta, \tau - \tau') \left(\varepsilon \sigma \left(t(\theta)^4 - t_c^4 \right) + \alpha(\tau') (t(\theta) - t_c(\tau')) \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_{0,3} \theta(z, \tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial z} \right]_{z=z_3} d\tau' + \int_{-\infty}^{z_3} \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\zeta d\tau', \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де} \quad F_{j+1}(\tau) = \left(1 - \beta_j \beta_{j+1}^{-1} \right) \left[\theta_{j+1}(z_j, \tau) - \beta_{j+1}^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_{j+1}\theta_{j+1}(z_j, \tau)} - 1 \right) \right],$$

$$\theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 [\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)] S(z - z_k), \quad \lambda_0(z) \quad \text{та} \quad c_0(z)$$

$$\text{мають вигляд} \quad p(z) = p_1(z) + \sum_{k=1}^2 [p_{k+1}(z) - p_k(z)] S(z - z_k), \quad \theta_i(z, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{0i}} \int_0^{t_i(z, \tau)} \lambda_t^i(x) dx - \text{змінна Кірхгофа, } t_i(z, \tau) - \text{температура в } i\text{-ій}$$

складовій, ε – ступінь чорноти, σ – стала Стефана-Больцмана, $\alpha(\tau)$ – коефіцієнт теплообміну, $S(z)$ – функція Гевісайда, $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака; індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $-\infty < z < 0$, $i = 2$ – другій $0 < z < z_2$, $i = 3$ – третій $z_2 < z < z_3$.

Апроксимувавши в (1) лінійними сплайнами співмножники, які містять невідомі функції [2], та підставивши у (1) $z = z_j + 0$ ($j = 1, 2$), $z = z_3$ і $\tau = \tau_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$), отримаємо рекурентну систему трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_2(z_1, \tau_k)$, $\theta_3(z_2, \tau_k)$ та $\theta_3(z_3, \tau_k)$. Розв'язавши її, знайдемо вирази для змінної Кірхгофа, а зі співвідношення $t_i(z, \tau) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(z, \tau)} - 1 \right)$ знаходимо шукане температурне поле.

Наведено результати числових досліджень.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0114U005082).

1. Процюк Б.В., Верба І.І. Нестационарное одномерное температурное поле тришаровых тел с плоско-параллельными границами подлду // Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 1999. – Вип. 1. – С. 200-205.
2. Процюк Б.В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вип. 38. – С. 63-69.

THE INFLUENCE OF A CONVECTIVE-RADIANT HEAT EXCHANGE ON THE TEMPERATURE FIELD OF HALF-INFINITE THERMOSENSITIVE THREE-LAYER BODY UNDER THE ACTION OF A HEAT SOURCE

The approach to determine a non-stationary temperature field of half infinite thermosensitive threelayer bodies under the action of a heat source considering convective-radiant heat exchange is proposed. The results of numerical researches of temperature fields are presented.

УДК 539.3

АНАЛІЗ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ У ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ

Ярослав П'янило, Марія Васюник, Іван Васюник

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна;*

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Останнім часом для моделювання фізичних процесів все частіше використовуються дробові похідні та інтеграли [1, 2]. Як показує практика, для моделювання фізичних процесів із пам'яттю використання похідних дробового порядку дозволяє більш адекватно описати процес, що вивчається, порівняно з математичними моделями в термінах похідних цілого порядку. Особливо це стосується моделювання процесів, які проходять у пористих середовищах складної структури. До таких середовищ належать і поклади корисних копалин, зокрема, газу та нафти. У математичному плані визначення шуканих параметрів зводиться до необхідності розв'язування в загальному нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

Аналітичні підходи до їх розв'язування зводяться до застосування певних інтегральних перетворень: Лапласа, Мелліна тощо. У таких випадках досить часто виникає проблема обернення, тобто відновлення шуканого розв'язку за знайденим його зображенням.

Задача обернення належить до класу некоректних і її розв'язання вимагає значних зусиль.

Виникають значні труднощі і під час застосування числових методів. Вони пов'язані як з процедурою дискретизації, так і нестійкістю відповідних алгоритмів. Якщо врахувати, що досить часто на практиці вхідна інформація задається в дискретному вигляді з невисокою точністю, то знаходження розв'язку числовими методами з необхідною точністю й обмеженим часом на розрахунок є проблематичне.

У зв'язку з цим застосовують наближені та ітераційні методи розв'язування сформульованих відповідним чином задач математичної фізики.

Перевагою останніх є те, що наближені методи виключають процедуру дискретизації, відтак є менш чутливі до похибки вхідної інформації. Одним із таких наближених методів є спектральний у деякому базисі. Оскільки дробові похідні задаються інтегралами типу згортки, то за базис, зазвичай, беруть многочлени Лагерра.

У пропонованій праці аналізуються аналітичний на базі інтегрального перетворення Лапласа та спектральний у базисі многочленів Чебишева-Лагерра методи розв'язування задач математичної фізики в термінах похідних дробового порядку.

Внаслідок проведеного дослідження отримано такі висновки.

1. Застосування інтегрального перетворення Лапласа значно спрощує процедуру знаходження розв'язку в зображеннях. Однак при цьому можуть виникнути такі труднощі: наявні аналітичні методи не дозволяють знайти оригінал у замкненому вигляді; оскільки значення дробової похідної можуть бути довільними, то в багатьох задачах функції-розв'язки мають порядок більший за одиницю, що унеможливорює знаходження оригіналу.

Перевагою застосування рядів Фур'є-Лагерра є те, що інтегрування згортки двох функцій зводиться до сумування згортки рядів. Таким чином уникаємо використання процедури дискретизації, яка вносить значну похибку в процес обчислень.

2. Основний недолік числових методів полягає в тому, що вони є чутливими до дискретизації вихідних рівнянь і неусувної похибки. Зазвичай, кожна із практичних задач, яка розв'язується на основі побудови математичної моделі, вимагає використання розв'язку в певних просторово-часових межах, а це потребує проведення додаткових досліджень методів розв'язування задач математичної фізики.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: Научное издание НАН Украины, 2008. – 256 с.

3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – Москва: Высшая школа, 1975. – 407 с.

ANALYSIS OF SOME METHODS FOR SOLVING OF THE EQUATIONS WITH FRACTIONAL TIME DERIVATIVES

Two methods for solving of the problems of mathematical physics in terms of derivatives of fractional order have been analyzed: analytical method – based on the integral Laplace transformation, and spectral method – in the basis of Chebyshev-Laguerre polynomials.

УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ ТІЛАХ

Ярослав П'янило, Софія Твардовська, Назар Лопух

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаяєва, 15, м. Львів, 79005, Україна

У механіці суцільного середовища розглядаються тіла, яка володіють просторово однорідними властивостями. Процеси переносу частин та енергії, що виникають у пористих матеріалах можна описати з допомогою дробових похідних по просторових координатах і по часу.

Фізична інтерпретація зумовила підвищення інтересу до диференціальних рівнянь дробового порядку. Перехід до похідної дробового порядку за часом дозволяє враховувати ефекти пам'яті системи.

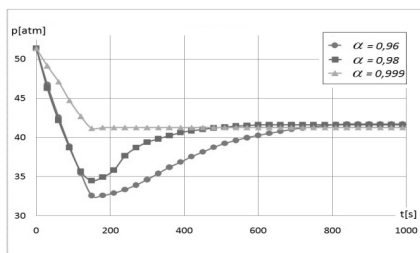


Рис. 1. Значення тисків газу в околі свердловин для різних значень порядку дробової похідної α .

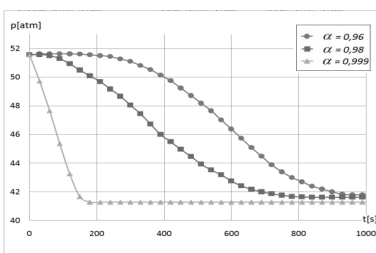


Рис. 2. Значення тисків газу в примежовій зоні пласта для різних значень порядку дробової похідної α .

Записано систему рівнянь електромагнітної механіки у термінах дробової похідної Капутто, а також запропоновано схему розв'язу-

вання диференціального рівняння із дробовою похідною за часом апробовану в ході обчислювального експерименту.

На основі реальних даних показано необхідність та доцільність застосування інтегродиференціального числення дробового порядку у прикладних задачах.

**USING FRACTIONAL TIME DERIVATIVE FOR RESEARCH OF WAVE PROCESSES
IN POROUS SOLIDS**

Used the fractional time derivative to study the problems of gas filtration in porous medium and the dependence of decay coefficients and phase velocities of waves of structural and physical chemical characteristics of the porous medium.

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ
ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЗА
ОСЬОВОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА
ЗА СКЛАДНОГО НАГРІВАННЯ**

Ірина Ракоча, Василь Попович

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Сучасна інженерна практика ставить вимоги якнайточнішого визначення термопружного стану багатошарових конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання. Для їх реалізації використовують модель термочутливого тіла, в якій враховують залежність теплових та механічних характеристик матеріалів від температури [1, 3], а також реальні умови нагрівання.

Формулювання задачі. Розглядається термочутливий циліндр, який складається з трьох різної довжини циліндрів, виготовлених з різних матеріалів. На одній з обмежуючих плоских поверхонь заданий потік тепла q , а через іншу відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем сталої температури t_c . Циліндричну поверхню вважаємо теплоізованою. Залежності коефіцієнтів теплопровідності контактуючих циліндрів задані в діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Необхідно визначити розподіл температури в такому

кусково-однорідному циліндрі та спричинений цим розподілом термомпружний стан.

Математична модель для визначення розподілу температури. За означених умов нагрівання в циліндрі буде наявний одновимірний (за осью координатою) розподіл температури, а безрозмірна математична модель для її визначення матиме вигляд

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_t^{(i)*} (T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

$$\lambda_t^{(1)*} (T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -Ki, \quad \left[\lambda_t^{(3)*} (T_3) \frac{dT_3}{dz} + Bi(T_3 - T_c) \right]_{z=z_4} = 0, \quad (2)$$

$$T_1|_{z=z_2} = T_2|_{z=z_2}, \quad T_2|_{z=z_3} = T_3|_{z=z_3}, \quad (3)$$

$$\lambda_t^{(1)*} (T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_\lambda^{(2)} \lambda_t^{(2)*} (T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_2},$$

$$\lambda_t^{(2)*} (T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_3} = K_\lambda^{(3)} \lambda_t^{(3)*} (T_3) \frac{dT_3}{dz} \Big|_{z=z_3}, \quad (4)$$

де $z = z/l_0$ – безрозмірна координата, а l_0 – вибраний нами характерний розмір, $\{T_i, T_c, T_p\} = \{t_i, t_c, t_p\}/t_k$ – безрозмірні температури, а t_k – вибране за відлікове, максимальне значення температури з діапазону задання температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності контактуючих циліндрів, $Ki_0 = ql_0 / (t_k \lambda_{t0}^{(1)})$, $Bi = \alpha l_0 / \lambda_{t0}^{(1)}$, $K_\lambda^{(2)} = \lambda_{t0}^{(2)} / \lambda_{t0}^{(1)}$, $K_\lambda^{(3)} = \lambda_{t0}^{(3)} / \lambda_{t0}^{(2)}$, α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $z = z_4$. При безрозмірненні задачі температурна залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури подані у вигляді

$$\lambda_t^{(i)} (t_i) = \lambda_{t0}^{(i)} \lambda_t^{(i)*} (T_i) = \lambda_{t0}^{(i)} \left(1 + k_i (T_i - T_p) \right). \quad (5)$$

Тут k_i – задані сталі, $\lambda_{t0}^{(i)} = \lambda_t^{(i)}(t_p)$ – опорні значення коефіцієнтів теплопровідності.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Нелінійну задачу (1)-(4) частково лінеаризуємо за допомогою введення змінних Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_*^{(i)} (T_i) dT_i. \quad (6)$$

В результаті отримаємо задачу

$$\frac{d^2\theta_i}{dz^2} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (7)$$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_1} = -Ki, \quad \left[\frac{d\theta_3}{dz} + Bi(T_3(\theta_3) - T_c) \right]_{z=z_4} = 0, \quad (8)$$

$$T_1(\theta_1)|_{z=z_2} = T_2(\theta_2)|_{z=z_2}, \quad T_2(\theta_2)|_{z=z_3} = T_3(\theta_3)|_{z=z_3}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_2} = K_\lambda^{(2)} \left. \frac{d\theta_2}{dz} \right|_{z=z_2}, \quad \left. \frac{d\theta_2}{dz} \right|_{z=z_3} = K_\lambda^{(3)} \left. \frac{d\theta_3}{dz} \right|_{z=z_3}. \quad (10)$$

Задача (7)-(10) залишається нелінійною через вирази температур $T_i(\theta_i)$ ($i = \overline{1,3}$) на поверхнях $z = z_i$ ($i = \overline{2,4}$), які за задання $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ (5) мають вигляд

$$T_i(\theta_i) = \frac{1}{k_i} (\sqrt{1 + 2k_i\theta_i} - 1) + T_p. \quad (11)$$

При побудові розв'язку задачі (7)-(10) замість умов (9) використали рівносильні їм умови [2]

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)|_{z=z_{i+1}} = \frac{k_{i+1} - k_i}{2} (T_i(\theta_i) - T_p)^2 \Big|_{z=z_{i+1}}, \quad i = \overline{1,2}$$

та алгоритм знаходження сталих інтегрування [2]. Аналітично знайдено вираз змінних Кірхгофа θ_i , а через них за формулами (11) – шукані розподіли температури.

Визначення температурних напружень. Спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури напруження в припущенні залежності від температури модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та температурного коефіцієнта лінійного розширення знайдено за формулами [1].

Висновки.

1. Сформульовано нелінійну математичну модель для визначення температурного поля в трискладовому термочутливому циліндрі, коли на плоскій обмежуючій поверхні першого циліндра задано потік тепла, а через обмежуючу плоску поверхню третього циліндра він конвективно обмінюється теплом з середовищем сталої температури.

2. Побудовано аналітичний розв'язок нелінійної моделі та визначено температурна напруження, спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури.

3. Досліджено вплив термочутливості матеріалів складових на характер і рівень розподілу температури та напружень.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за конкурсом ДФФД України і Білоруського РФФД (№ держреєстрації 0114U005078).

1. Кушнір Р.М. Моделирование та оптимізація в термомеханіці електропровідних термочутливих тіл. В 5-ти т. / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. – Т. 3: Термопружність термочутливим тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
2. Кушнір Р.М., Попович В.С. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 3. – 2013. – С. 42-47.
3. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties: Thermal Stresses I / R.B. Hetnarski (ed.). – 1986. – P. 391-483.

MATHEMATICAL MODELING AND DEFINITION OF THERMOSTRESSED STATE OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS AXIAL COORDINATE COMPLEX THERMOSENSITIVE CYLINDER UNDER CONDITIONS OF COMPLEX HEATING

Stationary temperature distribution of three-component cylinder under conditions of complex heat transfer on flat limited surfaces and heat emission on the edge of contact components under conditions of insulation of cylindrical surface, which are based on the model of thermosensitive body, have been defined. The temperature stresses, which were caused by defined temperature field, have been found. The influence of the dependence of thermal and mechanical characteristics of materials of components on temperature on the quantity and the distribution of temperature and stresses, depending on the input parameters, had been investigated.

УДК 539.3

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ТА ТЕОРЕТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ МОДУЛІВ ПРУЖНОСТІ ФІВРОБЕТОНУ

Богдан Стасюк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Стальна фібра все частіше використовується при виробництві тримальних залізобетонних конструкцій, оскільки її застосування підвищує пластичність матеріалу та забезпечує більшу міцність навіть після утворення макротріщин. Крім того, додавання стальної

фібри в бетон підвищує його ударну міцність, втомну міцність, збільшує зносостійкість кутів конструкції та змінює характер тріщиноутворення. Всі ці фактори дають можливість проектувальникам частково або навіть повністю замінювати гнуту арматуру та арматурні сітки сталюю фіброю, що призводить до значного зменшення собівартості конструкцій та помітного зниження їх ваги.

Додавання сталюї фібри навіть в незначних концентраціях помітно змінює механічні характеристики новоутвореного матеріалу. Через велику кількість сталюх включень в бетоні та їх хаотичне розташування, конструкції, виготовлені з фібробетону, розраховують методом гомогенізації середовища. У зв'язку із цим актуальною стає проблема прогнозування ефективних модулів пружності фібробетону в залежності від форми сталюї фібри та її відносної концентрації. Експериментальні дослідження проведені в Рурському Університеті (Німеччина) [4] та австралійському Інституті технологій і проектування конструкцій [5] передовсім мали на меті дослідження міцності та тріщиностійкості фібробетону. Наявні зараз теоретичні методи визначення ефективних модулів пружності гетерогенних середовищ показують добрі результати або для класичних форм включень (мікросфери, прямолінійні волокна) або для складних форм включень з низькою відотною концентрацією їх в матриці [3]. Зважаючи на складну форму сталюї фібри та на високий показник вмісту фібри у реальних конструкціях (до 50 кг/м^3 при будівництві тунелю Хобсон) ці методи є мало ефективними.

В роботі проведено експериментальні дослідження ефективних модулів пружності фібробетону на зразках у формі призм розміром $100 \times 100 \times 400$ мм на 28 день після їх виготовлення згідно з національним стандартом [1]. В якості матриці вибрано бетон марки 200, а наповнювачем виступала фібра марки Wirand FF3 компанії Massaferrі довжиною 50 мм і діаметром 0,75 мм. Призми піддавалися стискуючим навантаженням на пресі ПГ-125 (кафедра опору матеріалів, Національний університет «Львівська політехніка»). Вимірювання стискуючих деформації призми на базі близько $2/3$ її повної висоти при силі рівній близько третини руйнуючого навантаження дозволяло визначити умовний модуль пружності фібробетону. Досліди проведені на серіях призм з відотною концентрацією фібри 15 кг/м^3 , 30 кг/м^3 , 45 кг/м^3 , 60 кг/м^3 , 75 кг/м^3 , 90 кг/м^3 по три зразки в кожній серії.

Для теоретичного дослідження використано “квазікристалінову” модель взаємодії включень [2]. У цю розрахункову формулу входять два тензори. Перший із них відповідає неоднорідним усередненим напруженням всередині ізольованого включення внаслідок шести типів навантаження матриці, а саме віддалених одиничних розтягувальних та зсувних навантажень у трьох перпендикулярних на-

прямках. Інший відповідає усередненим напруженням всередині ізольованого включення внаслідок шести типів фіктивних одиничних власних деформацій у тих же напрямках.

Для визначення напружено-деформованого стану всередині включення складної форми залучено створену автором на базі методу граничних елементів комп'ютерну програму. Розроблено алгоритм чисельного розв'язання граничних інтегральних рівнянь. Взаємодія включень враховується регулярними членами, що не призводять до збільшення розмірності системи розв'язуваних рівнянь порівняно з задачею про ізольоване включення.

Запропонована методика визначення ефективних модулів пружності фібробетону дає добре узгоджені результати з експериментальними даними навіть при високому відносному вмісті сталльної фібри в бетоні. Тоді як існуючі методи дозволяють спрогнозувати ефективні модулі пружності фібробетону з задовільною точністю тільки при вмісті фібри не більшому за 45 кг/м^3 .

1. ДСТУ Б В.2.7-217:2009 Будівельні матеріали і бетони. Методи визначення призової міцності, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. – К.: Держспоживстандарт України, 2009. – 16 с. (Національний стандарт України).
2. Buryachenko V.A. Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of composite materials // Applied Mechanics Reviews. – 2001, **54**. – P. 1-47.
3. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. Dover Public. – 2012. – 384 p.
4. RUB – Test Report “Comparative bending tests on steel fiber reinforced according to RILEM TC 162-TDF and DIN EN 14651”, Lehrstuhl fuer Bausofftechnik, Ruhr-Universitaet Bochum, 2007.
5. Wilson Tunnelling Ltd.: “Proect Hobson – Concrete Test Reports”, Drury, Auckland, 2008.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL DETERMINATION OF THE EFFECTIVE ELASTIC MODULUS OF FIBER REINFORCED CONCRETE

In work, the experimental and theoretical value of effective elastic moduli of fiber reinforced concrete with fiber Wirand FF3 is studied. By the multiparticle effective field method in conjunction with the previously obtained boundary element solutions of 3-D one-particle problem for the uniform tensile and shear loading as well as uniform fictitious eigenstrains conditions, the effective elastic properties of fiber reinforced concrete are estimated and with the experimental data are compared. In the domain of nondilute concentration of inclusions good agreement between experimental and theoretical data is revealed.

УДК 539.3

ЦЕНТРАЛЬНОСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ТІЛА ПРИ ЗАДАНОМУ ПОЧАТКОВОМУ РОЗПОДІЛІ ТЕМПЕРАТУРИ У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Георгій Сулим, Віталій Галазюк, Оксана Попіль

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;*

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна*

Коректна постановка задачі Коші для рівняння теплопровідності вимагає задання початкової умови у всій зайнятій тілом області. Якщо початковий розподіл температури відомий в обмеженій області тіла, то у цьому випадку маємо задачу Коші з частково детермінованою початковою умовою. Тому у класичній постановці таких задач початкову умову до визначають зовні області, що, як правило, приводить до розв'язку, який суперечить рівнянню балансу теплового потоку.

У повідомленні ці задачі зводяться до інтегральних рівнянь першого роду, серед множини розв'язків яких завжди існують такі, що не суперечать рівнянню балансу теплових потоків.

Будемо вважати, що початковий розподіл температури зумовлює в тілі її центральносиметричний розподіл. Тоді у безрозмірних змінних $\alpha = r / R$, $\tau = at / R^2$, де R – радіус сферичної області задання початкового розподілу температури; a – коефіцієнт теплопровідності; t – час, рівняння теплопровідності є таким

$$\alpha^{-2} \partial_{\alpha} \left(\alpha^2 \partial_{\alpha} T \right) = \partial_{\tau} T, \quad 0 \leq \alpha < \infty \quad (1)$$

і його загальний розв'язок в R^3 можна подати інтегралом Фур'є

$$T(\alpha, \tau) = T_0 \left\{ C^T + \int_0^{\infty} A(x, p) e^{-x^2 \tau} \frac{\sin x \alpha}{\alpha} dx \right\}, \quad (2)$$

де C^T – стала, $A(x, p)$ – довільна функція, яка залежить від параметра p , причому $\lim_{(\alpha, \tau) \rightarrow \infty} T(\alpha, \tau) = C^T T_0$.

Нехай у сфері радіуса R початковий розподіл температури $T(\alpha, 0) = T_0 f(\alpha^2)$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Тоді, відповідно до подання (2), для визначення функції $A(\xi, p)$ маємо інтегральне рівняння першого роду:

$$C^T + \int_0^{\infty} A(x, p) \frac{\sin x\alpha}{\alpha} dx = f(\alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3)$$

розв'язок якого подамо рядом Неймана

$$A(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{J_{2n-p}(x)}{x^{p+2}}, \quad (4)$$

де $J_v(x)$ – функції Бесселя першого роду порядку v .

Якщо ряд (4) підставити в інтегральне рівняння (3) та обчислити розривний інтеграл Фур'є, то в області $0 \leq \alpha \leq 1$ матимемо

$$C^T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p) F(n-p; -n; 1, 5; \alpha^2)}{2^{p+1} \Gamma(n+1)} = f(\alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (5)$$

де $F(n-p; -n; 1, 5; \alpha^2)$ – гіпергеометрична функція Гауса, яка у цьому

випадку є поліном степеня $2n$, а тому з константою C^T ряд (5) відповідно до апроксимаційної теореми Вейерштрасса дає можливість подати довільну неперервну функцію $f(\alpha^2)$ через коефіцієнти a_n і сталу C^T .

За відомими коефіцієнтами a_n ця стала визначається рівністю

$$C^T = f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{n} \Gamma(n-p) \Gamma(p+1, 5)}{2^{p+2} \Gamma(n+1) \Gamma(n+1, 5) \Gamma(-n+p+1, 5)}$$

і залежить від параметра $0,5 < p < 1$. Тому усі характеристики напруженого стану також будуть залежати від цього параметра.

CENTRALLY-SYMMETRIC THERMOELASTIC PROBLEM FOR AN INFINITE BODY WITH GIVEN INITIAL DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN A SPHERICAL AREA

The method of determination the non-stationary temperature field in an infinite body with given initial distribution of temperature in a spherical area is presented.

УДК 517.53.57

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Михайло Сухорольський

Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна

Сформульовано загальний підхід до побудови розв'язків крайо-

вих задач для рівняння Гельмгольца. Розв'язок рівняння в крузі зображено у вигляді суми ряду за системою функцій, кожна з яких є добутком аналітичної функції комплексної змінної та функції від модуля цієї змінної. Перетворюючи координати з використанням конформних відображень відповідних областей на круг, одержано множини розв'язків рівняння Гельмгольца у різних системах координат. Розв'язки крайових задач для однозв'язних областей зображено у вигляді сум функціональних рядів.

Запишемо рівняння Гельмгольца за змінними $\bar{w} = u - iv$ та $w = u + iv$:

$$4\partial^2 U / \partial w \partial \bar{w} + a(w\partial U / \partial w + \bar{w}\partial U / \partial \bar{w}) + U = 0, \quad a = \text{const}. \quad (1)$$

Розв'язок цього рівняння у крузі можна записати у вигляді [1, 2]

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(w\bar{w}), \quad (2)$$

де c_m – довільні сталі; $J_m^*(w\bar{w}) = J_m^*(|w|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n^m |w|^{2n}}{2^{2n+m} (n+m)! n!}$,

$$\alpha_n^m = \prod_{k=0}^n [(m+2k)a+1].$$

Нехай $w = \phi(z)$ – конформне відображення однозв'язної області D площини z на круг $K: |w| \leq 1$ і $z = \phi^{-1}(w)$. Переходячи до нових змінних $z = \phi^{-1}(w)$, $\bar{z} = \bar{\phi}^{-1}(w)$, рівняння (1) запишемо у вигляді

$$4\partial^2 U / \partial z \partial \bar{z} + a[\phi(z)\bar{\phi}'(z)\partial U / \partial z + \bar{\phi}(z)\phi'(z)\partial U / \partial \bar{z}] + \phi'(z)\bar{\phi}'(z)U = 0. \quad (3)$$

Задача 1. Розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі за умови $U(w, \bar{w})|_{\partial K} = f(t)$, $t \in \partial K$, де $f(t)$ – значення на колі аналітичної у

крузі функції $f(w) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m w^m$, запишеться у вигляді:

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\bar{w}).$$

Задача 2. Знайдемо розв'язок рівняння (3) за умови

$$U(z, \bar{z})|_L = f(t), \quad t \in \partial D, \quad (4)$$

де $f(t)$ – значення на ∂D функції $f(z)$, аналітичної в області D [1].

Загальний вираз розв'язку одержимо з (2) у вигляді

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(z) J_m^* [\phi(z) \bar{\phi}(z)]. \quad (5)$$

Значення сталих у виразі (5) знайдемо з рівняння, одержаного підстановкою цього виразу в умову (4) з урахуванням рівності

$$\phi(t) \bar{\phi}(t) = |w|^2 = 1, \quad t \in \partial D, \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(t) J_m^*(1) = f(t). \quad \text{Використавши}$$

вирази відображень точок границь відповідних областей, $t = \phi^{-1}(e^{i\psi})$,

$\phi(t) = e^{i\psi}$, $-\pi < \psi \leq \pi$, це рівняння запишемо у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = f[\phi^{-1}(e^{i\psi})]. \quad (6)$$

За знайденими з рівняння (6) значеннями сталих запишемо з використанням формули (5) розв'язок задачі.

Отже, можна стверджувати: Якщо $w = \phi(z)$ – конформне відображення однозв'язної області D на одиничний круг $|w| \leq 1$ і $f(z)$ – аналітична в D функція зі значеннями $f(t)$ на границі цієї області, то розв'язок рівняння (3) в області D за умови (4) задається у вигляді суми ряду (5), коефіцієнти якого визначаються з рівняння (6).

Оскільки $|\phi^m(z)| \leq |w|^m \leq 1$ і $|J_m^*[\phi(z) \bar{\phi}(z)]| \leq \text{const}$, $z \in D$, то можна показати, що ряд (5) збігається рівномірно для системи чисел c_m таких, що $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_m|} \leq 1$, і множина (5) містить розв'язок, що справджує умову (3).

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: «Наука», 1987. – 698 с.
2. Сухорольський М.А., Костенко І.С., Достойна В.В. Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Вестник ХНТУ. – 2013. – 47, № 2. – С. 323-326.

ANALITICAL SOLUTIONS OF HELMHOLTZ EQUATION

General approach to constructing solutions of boundary problems for Helmholtz equation relative to the function of complex variables is formulated. The solution of the equation in the circle is represented in the form of the series sum by the system of functions each of which is the product of an analytical function of complex variable and a function of the module of this variable. By

transforming coordinates with the application of conforming mappings of corresponding domains onto the circle a set of solutions of Helmholtz equation in different coordinate systems is received. The solutions of boundary problems for simply connected domains are represented in the form of the sum of functional series.

УДК 539.3

МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ ЗА ДІЇ ВНУТРІШНЬОЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

Ганна Фесенко

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, м. Одеса, 65082, Україна

Розглянуто мішану задачу теорії пружності для шару $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leq z \leq h$ з урахуванням впливу довільно орієнтованої внутрішньої сили $P = (P_1, 0, P_3)$, що діє у перерізі $y = 0$ шару у точці з координатами $(d, 0, c)$. Припускається, що нижня грань шару є жорстко закріпленою, на верхній грані по прямокутній ділянці $a \in [-A, A]$, $b \in [-B, B]$ задане навантаження сталої інтенсивності.

Метод розв'язання базується на зведенні системи рівнянь рівноваги до двох сумісно і одного окремо розв'язуваних рівнянь [1]. Далі використані наступні позначення: $u_x = u$, $u_y = v$, $u_z = w$, $f' = \partial f / \partial x$, $f'' = \partial f / \partial y$, $f''' = \partial f / \partial z$. Система рівнянь рівноваги має вигляд

$$\Delta Z + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w') = -(P_x' + P_y''), \quad \Delta w + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w') = -P_z,$$

$$\Delta \tilde{Z} = P_x'' - P_y',$$

де $Z = u' + v''$, $\tilde{Z} = v' - u''$ — нові невідомі функції, P_x, P_y, P_z — об'ємні сили, $P_x = G^{-1} P_1 \delta(x - d) \delta(y) \delta(z - c)$, $P_y = 0$, $P_z = G^{-1} P_3 \delta(x - d) \delta(y) \delta(z - c)$, G — модуль зсуву, Δ — оператор Лапласа, $\nabla_{xy} f = f'' + f'''$, $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, μ — коефіцієнт Пуассона. Завдяки застосуванню інтегральних перетворень за змінними x та y до системи рівнянь рівноваги та до трансформованих у термінах нових невідомих функцій крайових умов от-

римано одновимірну задачу у просторі трансформант $Z_{\beta\alpha}(z)$ та $w_{\beta\alpha}(z)$, де α, β – параметри інтегрального перетворення Фур'є

$$\begin{cases} L_2 \mathbf{y}(z) = \mathbf{f}(z), & 0 < z < h, \\ U_i[\mathbf{y}(z)] = \gamma_i, & i = 0, 1, \end{cases}$$

де $L_2 \mathbf{y}(z) \equiv \mathbf{I} \mathbf{y}''(z) + \mu_0 \mathbf{Q} \mathbf{y}'(z) - N^2 \mathbf{P} \mathbf{y}(z)$ – диференціальний оператор 2-го порядку, $\mathbf{y}(z) = (w_{\beta\alpha}(z), Z_{\beta\alpha}(z))^T$ – невідомий вектор трансформант, подання матриць $\mathbf{I}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ наведено у роботі [2], $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\mu_* = 1 + \mu_0$, $\gamma_i, \mathbf{f}(z)$ – задані вектори, $U_i[\mathbf{y}(z)]$ – крайові функціонали, значення яких для $i = 0$ та $i = 1$ відповідають граням $z = 0$ та $z = h$.

Розв'язок задачі побудовано у формі

$$\mathbf{y}(z) = \int_0^h \Phi(z, \xi) f(\xi) d\xi + \mathbf{Y}_-(z) \begin{pmatrix} C_0^0 & C_0^1 \end{pmatrix}^T + \mathbf{Y}_+(z) \begin{pmatrix} C_1^0 & C_1^1 \end{pmatrix}^T,$$

для чого сконструйовано фундаментальну матрицю $\Phi(z, \xi)$ та фундаментальну матричну систему розв'язків $\mathbf{Y}_-(z), \mathbf{Y}_+(z)$.

Після обернення інтегральних перетворень отримано подання переміщень, на базі яких сконструйовано нормальне σ_z та дотичні напруження τ_{xz}, τ_{yz} у закріпленій грані $z = 0$, які досліджувалися в залежності від форми ділянки стискаючого навантаження та розташування зосередженої сили.

1. Попов Г.Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям // ДАН. – 2002. – **384**, № 2. – С. 193–196.
2. Фесенко А.А. Задача стационарной теплопроводности и смешанная задача теории упругости для слоя // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2014. – № 3. – С. 182–191.

THE MIXED ELASTICITY PROBLEM FOR THE LAYER WITH THE PRESENCE A CONCENTRATED FORCE INSIDE THE LAYER

The exact solution of the elasticity mixed problem for the layer in the case of presence a concentrated force inside the layer was constructed, when stresses were set on the side and another one is fixed. New method was used here, based on reducing Lamé equations to an independently solved one and two combined solved equations. The numerical analysis was done for the investigation of the stresses in the fixed side of the layer depending on the area parameters of the initial stresses and the location of the concentrated force.

УДК 539.3

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ В ПЛОСКОМУ ШАРІ

Василь Чекурін, Юрій Бойчук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

У доповіді розглянуто одновимірну задачу стаціонарного кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому теплопровідному шарі $-\infty < x < \infty$, $-b \leq y \leq b$, $-\infty < z < \infty$, який випромінює, поглинає та розсіює ІЧ-радіацію. Шар обмінюється теплом через поверхню $y = b$ за конвективним механізмом із середовищем з температурою T_c , яке не випромінює та не розсіює ІЧ-радіацію. Поверхня $y = -b$ шару є абсолютно чорна, її температура T_0 .

Задачу зведено до розв'язування системи інтегро-диференціальних рівнянь [1, 2]

$$\lambda \frac{d^2 T(y)}{dy^2} + 2\pi k \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu - 4\pi k I_b(T(y)) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial I(y, \mu)}{\partial y} + I(y, \mu) = (1 - \omega) I_b(T(y)) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(y, \mu') d\mu', \quad (2)$$

за крайових умов

$$-\lambda \frac{dT(y)}{dy} \Big|_{y=b} - h(T(y)|_{y=b} - T_c) = \varepsilon \left(I_b(T(y)) \Big|_{y=b} - \int_0^1 I^+(y, \mu) \mu d\mu \Big|_{y=b} \right),$$

$$T(y) \Big|_{y=-b} = T_0. \quad (3)$$

$$I^-(y, \mu) \Big|_{y=b} = \varepsilon I_b(T(y)) \Big|_{y=b}, \quad I^+(y, \mu) \Big|_{y=-b} = I_b(T_0). \quad (4)$$

Тут $\mu = \cos \alpha$, α – кут між віссю Oy та напрямом поширення випромінювання в площині xOy , $I(y, \mu) = I^+(y, \mu)$, $0 < \mu < 1$,

$I(y, \mu) = I^-(y, \mu)$, $0 < \mu < 1$, λ та h – коефіцієнти теплопровідності та конвективного теплообміну, κ та σ – інтегральні коефіцієнти поглинання та розсіювання середовища шару, n – його показник заломлення, $\omega \equiv \sigma/\beta$, $\beta \equiv \sigma + \kappa$, $I_b(\dots) = \bar{\sigma} n^2(\dots)^4/\pi$, $\bar{\sigma}$ – стала Стефана-Больцмана, $p(\mu, \mu')$ – індикатриса розсіювання.

Для розв'язування цієї нелінійної задачі застосовано ітераційний алгоритм, який зводить її до послідовного розв'язування лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (позначення $\tau \equiv \beta y$, $a \equiv \beta b$):

$$\frac{d^2 T^{(k+1)}}{d\tau^2} = -2 \frac{\pi \kappa}{\lambda \beta^2} \int_{-1}^1 I^{(k)} d\mu + 4 \frac{\pi \kappa}{\lambda \beta^2} I_b(T^{(k)}), \quad (5)$$

$$\mu \frac{\partial I^{(k+1)}}{\partial \tau} + I^{(k+1)} = (1 - \omega) I_b(T^{(k+1)}) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I^{(k)}(\tau, \mu') d\mu', \quad (6)$$

$$\left. -\frac{dT^{(k+1)}}{d\tau} \right|_{\tau=a} - \frac{h}{\lambda \beta} \left(\left. T^{(k+1)} \right|_{\tau=a} - T_c \right) = \frac{\varepsilon}{\lambda \beta} \left(\left. I_b(T^{(k)}) \right|_{\tau=a} - \int_0^1 I^{+(k)} \mu d\mu \right|_{\tau=a} \right),$$

$$\left. T^{(k+1)} \right|_{\tau=-a} = T_0, \quad (7)$$

$$\left. I^{-(k+1)} \right|_{\tau=a} = \varepsilon I_b(T^{(k)}) \Big|_{\tau=a}, \quad \left. I^{+(k+1)} \right|_{\tau=-a} = I_b(T_0). \quad (8)$$

За початкове наближення вибрано розв'язок лінійної системи рівнянь

$$\frac{d^2 T^{(0)}}{d\tau^2} = 0, \quad \mu \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \tau} + I^{(0)} = I_b(T^{(0)}) \quad (9)$$

з нелінійними крайовими умовами виду (7), (8).

Для чисельної реалізації ітераційного процесу розроблено алгоритм, який базується на методі скінченних елементів.

З застосуванням розробленого методу проведені кількісні дослідження температурного поля в шарі та інтенсивності випромінювання в шарі й поза його межами залежно від теплофізичних і радіаційних властивостей шару та його товщини.

Отримані результати можна використати для інтерпретації даних безконтактних вимірювань температури об'єктів з використанням техніки ІЧ-термографії.

1. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. Москва, Мир, 1976. – 616 с.
2. Чекурін В.Ф., Бойчук Ю.В. Моделювання стаціонарного кондуктивно-променевого теплообміну в кусково-однорідному плоскому шарі // Відбір і обробка інформації. – 2013. – **114**, № 38. – С. 32-39.

AN ITERATIVE METHOD FOR SOLVING OF NONLINEAR CONDUCTIVE-RADIATION HEAT TRANSFER PROBLEMS IN A FLAT LAYER

An iterative algorithm for solving of 1-D stationary problem for heat and IR-radiation transfer in a plane layer has been developed. Numerical realization of the algorithm is based on the finite element method.

УДК 539.3

ВИЗНАЧАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕТОДУ ФОТОПРУЖНИХ ПОКРИВІВ ДЛЯ НЕРУЙНІВНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ТВЕРДИХ ТІЛАХ

Василь Чекурін, Наталія Васьо

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Метод фотопружності широко використовують для неруйнівного визначення параметрів напружено-деформованого стану твердих тіл. Він базується на залежності діелектричної проникності матеріалу об'єкта від деформації [1, 2, 3]. Для дослідження непрозорих об'єктів застосовують метод фотопружних покривів. Його реалізують, наносячи прозору діелектричну плівку, чутливу до деформації, на поверхню об'єкта. Плівка, деформуючись разом із об'єктом, змінює свої діелектричні властивості. Ці зміни можна зареєструвати, освітлюючи покрив поляризованим світлом та аналізуючи стан поляризації відбитого променя. Для визначення параметрів напружень об'єкта, виходячи із даних таких вимірювань, використовують відоме співвідношення фотопружності (англ. optical- stress law) [2]

$$\delta = \frac{2\pi t}{\lambda} C_{\sigma} (\sigma_I - \sigma_{II}), \quad (1)$$

яке виражає різницю фаз δ , що її набуває поляризоване світло, проходячи крізь напружений діелектрик у напрямку перпендикулярному до площини головних напрямків напружень. Тут C_{σ} – стала фотопружності, σ_I та σ_{II} – значення головних напружень, λ – дов-

жина хвилі зондувального світла, t – товщина об'єкта в напрямку проходження світла.

Тож, застосування методу фотопружних покривів дозволяє встановити апостеріорні значення різниці головних напружень $\Delta\sigma = \sigma_I - \sigma_{II}$ і кута φ , що визначає орієнтацію головних осей тензора напружень на поверхні об'єкта. Знайдені так залежності $\Delta\sigma(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ використовують для формулювання задач відновлення напружено-деформованого стану об'єкта у всій повноті. Проте формула (1) є наближеною. Відносна похибка визначення різниці головних напружень за цією формулою зростає зі збільшенням товщини t півки у напрямку зондування. До того ж товщина покриву t залежить від його деформації у трансверсальному напрямку, що вносить свою похибку.

Вплив деформації проявляється не тільки у зміні різниці фаз поляризованого світла, але й у зміні відношень компонент амплітуди відбитої і заломленої хвиль. Ці зміни можна визначити з використанням поляризаційно-оптичних методів, вимірюючи еліптичність світла і азимут його поляризації як додаткові інформативні параметри для неруйнівних методів визначення напружень в твердих тілах.

На основі точних розв'язків відповідних задач електродинаміки, які описують взаємодію поляризованого світла з шаруватими структурами типу «фотопружний покрив – об'єкт», отримані співвідношення, які визначають параметри стану поляризації відбитого світла (різниці фаз та відношення амплітуд) залежно від значень компонент деформації та напружень на поверхні об'єкта. Проведені кількісні дослідження залежності різниці фаз відбитого променя та його еліптичності від параметрів напружено-деформованого стану об'єкта, товщини покриву та параметрів стану поляризації зондувального світла.

Для декількох типів фотопружних покривів, які широко застосовуються, отримано кількісну оцінку похибок визначення різниці головних напружень, які виникають при застосуванні наближеної формули (1).

Обговорюються способи реалізації методу фотопружних покривів із застосуванням отриманих уточнених співвідношень фотопружності.

1. Dally J.W., Riley W.F. Experimental Stress Analysis. Third Edition. – McGraw-Hill, Inc., 1991. – 89 p.
2. Doyle J.F., Phillips J.W. Society of Experimental Stress Analysis. – 1989. – 171 p.
3. Holister G.S. Experimental stress analysis: principles and methods. – Cambridge U.P., 1967. – 322 p.

THE OPTICAL-STRESS LAW FOR PHOTOELASTIC COATING METHOD OF NON-DESTRUCTIVE DETERMINATION OF STRESSES IN SOLIDS

Nonlinear constitutive relations for the method of photoelastic coating have been obtained in the paper. The relations are based on the exact solutions of problems of the electrodynamics that describes the interaction of polarized light with a stressed layered structure.

УДК 539.3

СИСТЕМА РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Анатолій Чиж

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Система рівнянь теплопровідності для тонких оболонок з використанням операторного методу і усереднення по товщині одержана в роботі [1]. При цьому нехтувалось доданками, які містили добуток кривини на товщинну координату. В даній роботі іншим шляхом отримано систему рівнянь теплопровідності для циліндричної оболонки, в яких враховано ці доданки.

Розглянемо осесиметричну циліндричну оболонку товщиною $2h$, радіусом R і довжиною L . Через циліндричні та торцеві поверхні здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Стационарне температурне поле у випадку відсутності джерел тепла визначаємо з отриманого з [1] рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

за граничних умов

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial z} + \mu^+(x) (t - t^+(x)) &= 0, \text{ при } z = h, \\ \frac{\partial t}{\partial z} - \mu^-(x) (t - t^-(x)) &= 0, \text{ при } z = -h, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} - b_1 (t - t_1^c(z)) &= 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{\partial t}{\partial x} + b_2 (t - t_2^c(z)) &= 0 \text{ при } x = L, \end{aligned} \quad (3)$$

де x змінюється вздовж твірної серединної поверхні, а z – відповідно по товщині оболонки; $\mu^+(x)$, $\mu^-(x)$ та $t^+(x)$, $t^-(x)$ – відносні коефіцієнти тепловіддачі та температура зовнішнього середовища на поверхнях $z = h$ і $z = -h$; b_1 , b_2 та t_1^c , t_2^c – відносні коефіцієнти тепловіддачі та температура зовнішнього середовища на торцях $x = 0$ і $x = L$.

Використовуючи підхід [2] з урахуванням лінійного розподілу температури по товщині

$$t = T_1(x) + \frac{z}{h} T_2(x), \quad (4)$$

отримано систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx_1^2} T_1 - \mu_1 (T_1 - t_1) - \mu_2 (T_2 - t_2) + \frac{1}{2} T_2 \ln \frac{R_1 + 1}{R_1 - 1} = 0, \\ \frac{d^2}{dx_1^2} T_2 - 3\mu_1 (T_2 - t_2) - 3\mu_2 (T_1 - t_1) - \frac{3}{2} R_1 T_2 \ln \frac{R_1 + 1}{R_1 - 1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

та відповідні граничні умови

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dx_1} - b_1 (T_1 - T_{11}^c) &= 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{dT_1}{dx_1} + b_2 (T_1 - T_{12}^c) = 0 \text{ при } x = L, \\ \frac{dT_2}{dx_1} - b_1 (T_2 - T_{21}^c) &= 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{dT_2}{dx_1} + b_2 (T_2 - T_{22}^c) = 0 \text{ при } x = L. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= h \frac{\mu^+ \pm \mu^-}{2}, \quad t_{1,2} = \frac{t^+ \pm t^-}{2}, \quad x_1 = \frac{x}{h}, \quad R_1 = \frac{R}{h}, \quad T_{11}^c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_1^c(z) dz, \\ T_{21}^c &= \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t_1^c(z) dz, \quad T_{12}^c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_2^c(z) dz, \quad T_{22}^c = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t_2^c(z) dz. \end{aligned}$$

У випадку $R_1 \rightarrow \infty$ отримаємо систему рівнянь теплопровідності для тонких пластин, наведену в [2].

1. Подстригач Я.С., Швець Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев.: Наукова думка, 1978. – 344 с.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.

**THE SYSTEM OF EQUATIONS OF THERMAL CONDUCTIVITY FOR
CYLINDRICAL SHELL**

The system of differential equations of thermal conductivity for an axisymmetric cylindrical shell in the case of a linear temperature distribution in thickness and convective heat transfer on face surface is obtained.

УДК 536.12:620.198

**ВПЛИВ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАГРІВАННЯ НА
ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ПЛАСТИНИ З ТОНКИМ
ДВОСТОРОННІМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ**

Віктор Шевчук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Одновимірною крайовою задачею теплопровідності для пластини товщини h , на поверхні якої нанесено тонкі багатопшарові покриття з товщинами $\delta_{ki} = \sum_{i=1}^{n_k} \delta_{ki}$ ($k = 1, 2$), за умов нестационарного конвективного нагрівання має вигляд [2]

$$\frac{\partial t_T}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 t_T}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$t_T|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$-\lambda_T \left(1 + \frac{\mu_1}{H_1} \right) \frac{\partial t_T}{\partial z} + \mu_1 (t_{C1} - t_T) = \Omega_1 \frac{\partial t_T}{\partial \tau}, \text{ при } z = h, \quad (3)$$

$$\lambda_T \left(1 + \frac{\mu_2}{H_2} \right) \frac{\partial t_T}{\partial z} + \mu_2 (t_{C2} - t_T) = \Omega_2 \frac{\partial t_T}{\partial \tau}, \text{ при } z = 0, \quad (4)$$

де t_T , t_{C1} , t_{C2} – температури тіла (пластини) і середовищ відповідно; δ_{ki} – товщина i -го шару k -го покриття; λ_T , λ_{ki} і ω_T , ω_{ki} – коефіцієнти теплопровідності і теплоємності; μ_1 , μ_2 – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь покриття, $a_T = \lambda_T / \omega_T$ – температуропровідність ті-

ла; $\Omega_k = \sum_{i=1}^{n_k} \omega_{ki} \delta_{ki}$, $H_k^{-1} = \sum_{i=1}^{n_k} \delta_{ki} / \lambda_{ki}$ – зведені теплоємності та термоопори покриттів; n_k – кількість шарів k -го покриття. Тут індекс $k = 1$ стосується покриття, нанесеного на поверхню $z = h$, а $k = 2$ – покриття, нанесеного на поверхню $z = 0$ пластини.

Застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа і використовуючи теорему Дюамеля [1], отримуємо розв'язок задачі для пластини у вигляді

$$t_T(z, \tau) = \frac{t_{C1}(\tau) \text{Bi}_1^* \left(1 + \text{Bi}_2^* \frac{z}{h}\right) + t_{C2}(\tau) \text{Bi}_2^* \left(1 + \text{Bi}_1^* - \text{Bi}_1^* \frac{z}{h}\right)}{\text{Bi}_1^* + \text{Bi}_2^* + \text{Bi}_1^* \text{Bi}_2^*} -$$

$$- 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{Bi}_1^* U_2(\kappa_j, z) L_1\left(\tau, -\kappa_j^2 a / h^2\right) + \text{Bi}_2^* \left[U_1(\kappa_j, h) \cos\left(\frac{\kappa_j z}{h}\right) + U_3(\kappa_j, h) \sin\left(\frac{\kappa_j z}{h}\right) \right] L_2\left(\tau, -\kappa_j^2 a_T / h^2\right)}{Z(\kappa_j)}, \quad (5)$$

де κ_j – корені трансцендентного рівняння

$$\text{ctg } \kappa = \frac{\kappa^2 - (\text{Bi}_1^* - \varepsilon_1 \kappa^2)(\text{Bi}_2^* - \varepsilon_2 \kappa^2)}{\kappa (\text{Bi}_1^* + \text{Bi}_2^* - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \kappa^2)}, \quad (6)$$

$$\text{Bi}_k = \frac{\mu_k h}{\lambda_T}, \quad \text{Bi}_k^* = \frac{\text{Bi}_k}{1 + \xi_k \text{Bi}_k}, \quad \xi_k = \frac{H_k^{-1}}{h / \lambda_T}, \quad \varepsilon_k = \frac{\Omega_k}{\omega_T h (1 + \xi_k \text{Bi}_k)},$$

$$U_k(\kappa_j, z) = \kappa_j \cos(\kappa_j z / h) + (\text{Bi}_k^* - \varepsilon_k \kappa_j^2) \sin(\kappa_j z / h),$$

$$L_k(\tau, \eta) = \int_0^{\tau} \frac{dt_{Ck}(\tau_0)}{d\tau_0} e^{\eta(\tau - \tau_0)} d\tau_0, \quad k = 1, 2;$$

$$U_3(\kappa_j, z) = \kappa_j \sin(\kappa_j z / h) - (\text{Bi}_1^* - \varepsilon_1 \kappa_j^2) \cos(\kappa_j z / h).$$

$$Z(\kappa_j) = \left[(1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \kappa_j^2 - (\text{Bi}_1^* - \varepsilon_1 \kappa_j^2)(\text{Bi}_2^* - \varepsilon_2 \kappa_j^2) \right] \kappa_j \cos \kappa_j +$$

$$+ \left[\kappa_j^2 (1 + \text{Bi}_1^* (1 + \varepsilon_2) + \text{Bi}_2^* (1 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 \varepsilon_2) \kappa_j^2) + \text{Bi}_1^* \text{Bi}_2^* \right] \sin \kappa_j.$$

У роботі конкретизовано і записано вирази для випадків лінійного, експоненціального та логарифмічного законів зміни температур середовищ з часом.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного гранту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (номер держреєстрації проекту 0114U005082).

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 328 с.
2. Shevchuk V.A. Modeling and computation of heat transfer in a system «body-multilayer coating» // Heat Transfer Research. – 2006. – **37**, Iss. 5. – P. 412-423.

INFLUENCE OF NONSTATIONARY HEATING ON TEMPERATURE FIELD OF THE PLATE WITH A THIN DOUBLE-SIDED MULTILAYER COATING

On the basis of Laplace transformation using Duhamel theorem, one-dimensional heat conduction problem for the plate with a thin double-sided multilayer coating under nonstationary boundary conditions has been solved.

УДК 536.12:620.198

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПІВПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ ЗА ПРОМЕНЕВО-КОНВЕКТИВНОГО НАГРІВАННЯ

Віктор Шевчук, Олександр Гавриш, Павло Шевчук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

В [2] отримано аналітичний розв'язок лінійної задачі теплопровідності для випадку конвективного нагрівання півпростору з багатошаровим покриттям. В даній роботі розглядається нелінійна одновимірна задача теплопровідності для півпростору з n -шаровим покриттям товщиною $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ за променево-конвективного нагрівання.

Крайова задача теплопровідності з узагальненою нелінійною граничною умовою у безрозмірних величинах має вигляд [4]

$$\frac{\partial^2 \theta(x, Fo)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x, Fo)}{\partial Fo}, \quad (1)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, Fo) = \theta_0, \quad (2)$$

$$(1 + \xi \text{Bi}) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{Bi}(1 - \theta) - \eta \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} - \\ - \text{Sk} \left[\sum_{m=0}^4 (-1)^m C_4^m \xi^m \theta^{4-m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^m - 1 \right] = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (3)$$

де x, Fo, θ – безрозмірні координата, час і температура основи; Bi , Sk – критерії Біо і Старка; η, ξ – відносні ефективні теплоємність і термоопір покриття; $C_4^m = \frac{4!}{m!(4-m)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Для розв'язання крайової задачі (1)–(3) застосовано ітераційну процедуру на основі методу квазілінеаризації [1, 3]. Крайову задачу для k -го наближення подамо так:

$$\frac{\partial^2 \theta^{(k)}(x, \text{Fo})}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta^{(k)}(x, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}}, \quad (4)$$

$$\theta^{(k)}(x, 0) = \theta_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta^{(k)}(x, \text{Fo}) = \theta_0, \quad (5)$$

а лінеаризована умова (3) матиме наступний вигляд

$$\frac{\partial \theta^{(k)}(0, \text{Fo})}{\partial x} - \eta_k^* \frac{\partial \theta^{(k)}(0, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \text{Bi}_k^*(\text{Fo}) \theta^{(k)}(0, \text{Fo}) + q_k^*(\text{Fo}), \quad (6)$$

$$\text{де } \text{Bi}_k^*(\text{Fo}) = \frac{\text{Bi} + \text{Sk} a_2^{(k-1)}(\text{Fo})}{1 + \xi \text{Bi} - \text{Sk} a_1^{(k-1)}(\text{Fo})}, \quad \eta_k^*(\text{Fo}) = \frac{\eta}{1 + \xi \text{Bi} - \text{Sk} a_1^{(k-1)}(\text{Fo})},$$

$$q_k^*(\text{Fo}) = - \frac{\text{Bi} + (1 + a_3^{(k-1)}(\text{Fo})) \text{Sk}}{1 + \xi \text{Bi} - \text{Sk} a_1^{(k-1)}(\text{Fo})}, \quad (7)$$

$$a_j^{(k-1)}(\text{Fo}) = L_j \left[\xi, \theta^{(k-1)}(0, \text{Fo}), \frac{\partial \theta^{(k-1)}(x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=0} \right], \quad j = 1, 2, 3; \quad L_j - \text{деякі}$$

оператори.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано замкнений аналітичний розв'язок задачі (4)–(6). На підставі проведених розрахунків виявлено особливості впливу ефективних теплофізичних характеристик (приведених термоопору і теплоємностей покриття), зміни інтенсивностей променевого і конвективного нагрівання системи на температуру в зоні контакту багат шарового покриття з півпростором. Показано високу швидкість збіжності запропонованого підходу на основі використання узагальнених граничних умов та методу квазілінеаризації.

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 223 с.
2. Шевчук В.А. Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журн. – 2013. – **86**, № 2. – С. 423-431.
3. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Методика розв'язання нелінійної задачі теплопровідності радіаційної взаємодії півпростору з доквіллям // Сучасні проблеми механіки і математики: в 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – Львів. – Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 185-187.
4. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багаточаровими покриттями // Машинознавство. – 2010. – № 5. – С. 21-25.

DETERMINATION OF THE TEMPERATURE FIELD OF THE HALF-SPACE WITH A MULTILAYER COATING AT RADIATIVE AND CONVECTIVE HEATING

The calculation of the temperature field of the half-space with a multilayer coating has been performed. The influence of thermophysical parameters on heat transfer in the half-space has been investigated.

УДК 539.3

**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ НДС У ДВОШАРОВИХ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИХ ТІЛАХ З РІЗНИМИ
ПРУЖНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ**

Юнна Щербакова

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна*

Математичний апарат узагальненого методу Фур'є (УМФ) для трансверсально ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями в циліндричних і параболоїдальних координатах, розроблено та обґрунтовано в [1].

В даній роботі цей апарат використано для проведення порівняльного аналізу НДС тіл з трансверсально ізотропних матеріалів з різними пружними властивостями (для скло-пластику, кварцу, пісковика та алевроліту) на прикладі задачі про осесиметричне вдавлювання кругового в плані штампку в трансверсально ізотропний півпростір з нерухомою параболоїдальною основою, яка є співосною осі штампка, за відсутності тертя між штампом та півпростором [2]. Виявлено залежність розподілу напружень між граничними поверхнями безпосередньо від пружних властивостей матеріалу та коренів характеристичного рівняння, які визначають ступінь анізотропії матеріалу.

1. Николаев А.Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2009. – № 3. – С. 160-169.
2. Щербакова Ю.А. Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропного полупространства с параболоидальным основанием с различными упругими характеристиками // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 4. – С. 158-162.

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF TENSELY-DEFORMED STATE IN DOUBLY CONNECTED TRANSVERSELY ISOTROPIC SOLIDS WITH DIFFERENT ELASTIC PROPERTIES

The axially sphere forcing circular stamp in transversely isotropic half-space with a stationary paraboloidal basis in the absence of friction between the die and the half-space task is solved by the generalized Fourier's method. The comparative analysis of stress-strain state between boundary surfaces for material with different elastic properties (glass-reinforced plastic, silicone, sandstone, alevrolit) was carried out.

МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ ТА НАНОМЕХАНІКА

УДК 624.012.45:539.385

ЗНАЧЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БЕТОНУ ПРИ ПРОСТОРОВОМУ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ

Талят Азізов, Надія Вільданова

*Одеська державна академія будівництва та архітектури,
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна*

При дослідженні напружено-деформованого стану конструкцій для підвищення точності розрахунків важливо враховувати змінення як згинальної, так і крутильної жорсткостей в залежності від січних модулів деформацій матеріалів [1, 2]. При цьому крутильна жорсткість залишається значно менш дослідженою, порівняно зі згинальною.

Перерозподіл зусиль запропоновано враховувати наступним чином [1]: на кожній ітерації значення згинальної і крутильної жорсткостей як функції січних модулів деформацій бетону, обчислених за деформаційними залежностями [3, 4], слід уточнювати в залежності від обчислених за допомогою внутрішніх зусиль (визначених у ПК «ЛИРА», наприклад), і так до збіжності. В роботі січні модулі деформацій першого E_c і другого G_c роду було визначено в залежності від початкових E_c^0 і G_c^0 , відповідно, з урахуванням коефіцієнтів змін січних модулів ν_c і ϑ_c за діаграмами деформування М.І. Карпенка [4] і О.Ф. Яременка [5], відповідно:

$$\begin{cases} E_c \nu_c = E_c^0 \left(\overline{\nu_c} \pm (\nu_0 - \overline{\nu_c}) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2} \right) \\ G_c \vartheta_c = G_c^0 \left(\overline{\vartheta_c} \pm (\vartheta_0 - \overline{\vartheta_c}) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2} \right). \end{cases} \quad (1)$$

При цьому співвідношення модулів деформацій при визначенні зусиль прийнято за пропозицією [5]:

$$\tau_c = G_c \gamma_c = \frac{E_c^0 \vartheta_c}{2(1 + \mu)} \gamma_c. \quad (2)$$

Для прикладу досліджено вплив крутильної жорсткості на перерозподіл зусиль просторово-ребристої системи (залізобетонного пере-

криття з п'ятьма ребрами прямокутного перерізу): балки розділені на 20 кінцевих елементів за довжиною, плити – на 5; ребра перерізом 25х25см, плити – 15х5см, клас бетону С16/20; довжина балок складає 3м, прольот – 1м. Рівномірно розподілене навантаження $q=45\text{кН/м}$ було прикладене до першого ребра, за довжиною якого і було простежено зміння значень жорсткостей і зусиль.

При цьому січні модулі пружності і зсуву бетону були враховані як компоненти згинальної і крутильної жорсткостей, відповідно, на кожній ітерації для кожного кінцевого елементу всіх п'ятих балок. Епюру крутильних моментів M_t наведено для елементів однієї половини першої балки (в інших ребрах перерозподіл зусиль менший), оскільки значення внутрішніх зусиль іншої половини є зворотно симетричними (рис. 1).

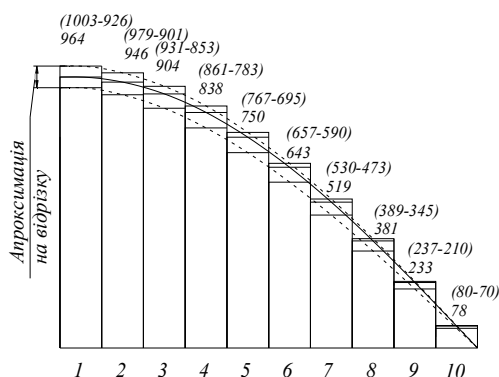


Рис. 1 Епюра M_t (для половини ребра за довжиною)

Похибка при порівнянні значень модуля зсуву G_c у крайньому елементі першої балки складає 26,334%, при цьому модуль пружності E_c у цьому ж елементі змінюється на 4,030%. У центральних елементах першої балки модуль пружності E_c змінюється на 42,660%, а модуль зсуву G_c у цьому ж елементі – лише на 0,7896%.

Дані розрахунку підтверджують необхідність врахування січного модуля зсуву при визначенні внутрішніх зусиль і їх перерозподілу в статично невизначених системах через істотний його вплив на крутильну жорсткість залізобетонних елементів, яка є значущим фактором в просторовій роботі залізобетонних конструкцій.

1. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий. – К: Науковий світ, 2001. – 276 с.
2. Вільданова Н.Р. Вплив крутильної жорсткості ЗБЕ як функції модуля зсуву бетону з урахуванням деформацій пластичності на просторову роботу конструкцій // Сборник научных трудов SWorld. – Вып. 3. – Т. 50. – Иваново: МАРКОВА АД, 2013. – ЦИТ: 213-0064. – С. 13-19.

3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
4. Яременко О.Ф., Школа Ю.О. Несуча здатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів в складному напруженому стані. – Одеса: ОДАБА, 2010. – 136 с.

SPATIAL STRUCTURES' CALCULATION CONSIDERING NONLINEAR DEFORMATIONAL CHARACTERISTICS

The influence of RCE's torsional stiffness on the strains' redistribution in the ribs of the cross-ribbed system while the 1st beam's loading has been researched in the paper.

УДК 539.3

ВПЛИВ НАПРЯМКУ ОРТОТРОПІЇ МАТЕРІАЛУ НА СТІЙКІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Анатолій Дзюба, Олена Лотохова, Євген Прокопало

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
пр-т Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

Оболонкові конструктивні елементи з вираженою ортотропією матеріалу широко використовуються в різних галузях машинобудування. В той же час вплив зміни напрямку ортотропії на величину критичного навантаження конструкції залишається все ще малодослідженим.

У поданій роботі представлені результати експериментального дослідження стійкості циліндричних оболонок, виготовлених із спеціального креслярського паперу марки «В» ГОСТ 597-73, який найкращим чином відповідає вирішенню зазначеного аспекту проблеми, оскільки при яскраво вираженій ортотропії механічних властивостей, цей матеріал відрізняється досить високою стабільністю і однорідністю показників пружності і міцності. Найбільш важливими властивостями цього матеріалу є його досить висока технологічність для виготовлення високоякісних ідентичних зразків та підготовки їх до випробувань.

В результаті досліджень, виконаних як на плоских зразках, так і на оболонках за допомогою електромеханічної системи, були визначені модулі пружності $E_x = 6,9 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $E_y = 3,45 \cdot 10^9 \text{ Па}$ і коефіцієнти Пуассона $\mu_x = 0,3$; $\mu_y = 0,15$ використовуюваного в експерименті матеріалу. Тут індекси x і y відповідають головним напрямкам ортотропії, які збігаються відповідно з напрямками довгої і короткої сторони стан-

дартного аркуша паперу. Товщина листа складала $h = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ і залишалася однаковою для всіх випробуваних моделей.

Виготовлення оболонок здійснювалося шляхом склеювання прямокутної заготовки клеєм БФ-2 на металевому циліндрі. Радіус кривини всіх моделей становив $R = 3,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, робоча довжина $L_p = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Повна довжина оболонок була прийнята рівною $L_n = 11,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Для забезпечення можливості передачі на оболонку зовнішніх зусиль, до її криволінійних кромek приклеювалися циліндричні металеві торцеві пристосування. Ширина приклею становила $2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Всього випробувано дві серії оболонок (А і Б) загальною кількістю 50 моделей. Для оболонок серії А заготовки вирізалися так, щоб головні напрямки ортотропії паперу x і y ($E_x > E_y$) збігалися з твірною і напрямною оболонки, відповідно, а для оболонок серії Б вісь x збігалася з напрямною, а вісь y – з твірною.

Оболонки кожної з серій випробовувалися на п'ять різних видів навантаження: осьовий стиск, зовнішній тиск, кручення, чистий згин, поперечний згин. Аналіз отриманих результатів показує, що орієнтація головних осей ортотропії відносно твірної і напрямної оболонки суттєво впливає на відповідні критичні навантаження для всіх видів проведених випробувань.

Критичні навантаження, отримані в результаті випробувань на осьовий стиск і чистий згин, для випадку, коли більший модуль пружності (E_x) збігається з твірною, виявляються більшими на 18%, ніж для оболонок, для яких напрямок E_x збігається з напрямною.

Для поперечного згину, кручення і зовнішнього тиску спостерігається протилежний ефект. При цьому для оболонок серії Б критичні навантаження виявились більшими, ніж для оболонок серії А, це перевищення склало 23% при поперечному згині, 26% при крученні і 60% при зовнішньому тиску. Ця обставина легко пояснюється особливостями закритичних форм рівноваги при різних видах навантаження.

При осьовому стиску і чистому згині втрата стійкості відбувається в результаті досягнення нормальними напруженнями критичного значення. Оскільки нормальні напруження діють уздовж твірної оболонки, то природно, що критичні навантаження, отримані на оболонках серії А перевищують їх відповідні значення для оболонок серії Б. У результаті втрати стійкості утворюються ромбовидні вм'ятини, витягнуті майже однаково в обох напрямках.

Втрата стійкості оболонок, випробуваних на поперечний згин,

відбувалася переважно від дії дотичних напружень, що обумовлювалося їх геометричними параметрами. Як і при крученні, на оболонках утворювались витягнуті вздовж довжини і нахилені до її осі досить глибокі вм'ятини. Природно, що при такому хвилеутворенні більші значення модуля пружності, що діють уздовж напрямної оболонки (серія Б), призводить до підвищення критичних навантажень у порівнянні з оболонками серії А.

Втрата стійкості оболонок під дією зовнішнього тиску відбувається при досягненні нормальними напруження в поперечних перерізах оболонок, критичного значення і супроводжується утворенням регулярних по колу вм'ятин, витягнутих уздовж всієї довжини оболонки. Природно, що при такому хвилеутворенні визначальне значення для критичних навантажень має величина модуля пружності, діючого уздовж напрямної.

Результати проведених досліджень можуть бути корисними для прогнозування несучої здатності оболонкових елементів, виготовлених із ортотропного матеріалу.

INFLUENCE OF ORIENTATION OF MATERIAL ORTHOTROPY ON CYLINDRICAL SHELLS STABILITY

The paper presents the results of an experimental research of cylindrical shells stability. The influence of the orientation of the principal axes of orthotropy regarding generatrix and guides of the shell was investigated. The shells were tested for five types of loading: axial compression, external pressure, torsion, pure bending, transverse bending. The results of analytical comparisons are provided.

УДК 539.3:517.95

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НУЛЬОВИХ РАДІАЛЬНИХ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ ШЛЯХОМ ВИБОРУ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛУ

Богдан Калиняк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Умови відсутності переміщень, викликаних температурними полями в оболонках, виготовлених з однорідного матеріалу, досліджені у роботі [1]. Актуальну проблему можливості отримання потрібного

розподілу напружень чи переміщень, зокрема нульового, при відомому розподілі температури за шляхом підбору залежності від координати характеристик матеріалу, навантажень та масових сил можна вирішувати за рахунок:

- використання неоднорідних за просторовою змінною матеріалів з відомою технологією виготовлення;
- наявності математичних моделей характеристик двокомпонентних ФГМ, що виражають характеристики матеріалу через характеристики компонент та зміни їх об'ємної концентрації з координатою [2].

Розглянуто неоднорідний довгий кільцевий циліндр з заданими на його поверхнях і по довжині навантаженнями з відомим розподілом температури. Характеристики матеріалу, температурне поле, напруження, переміщення вважаються залежними від радіальної координати r . Умова відсутності радіальних напружень отримана прирівнюванням до нуля правої частини запропонованого інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіального напруження:

$$\sigma_r(\rho) - \int_{\rho_1}^1 K_r(\rho, \eta) \sigma_r(\eta) d\eta = Q_r(\rho), \quad (1)$$

де $K_r(\rho, \eta)$ – ядро інтегрального рівняння класу L_2 , залежне від характеристик матеріалу та їх похідних,

$$Q_r(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2} \frac{d_1 V(1) - d_2 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2} \frac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + f(\rho),$$

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E}{1 - \nu^2} d\eta, \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E \nu}{1 - \nu^2} d\eta, \quad d_1 = -p_2 - f(1),$$

$$d_2 = p + \int_{\rho_1}^1 \frac{\eta E (1 + \nu)}{1 - \nu^2} \Phi(T) d\eta + \int_{\rho_1}^1 [W(1) - W(\eta)] \frac{1 + \nu}{E} \eta F(\eta) d\eta,$$

$$\Phi = \int_{T_0}^{T(\rho)} \alpha_t(\tau) d\tau,$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta \left\{ \frac{(1 + \nu(\eta)) E(\eta)}{1 - \nu^2(\eta)} \Phi(T(\eta)) + \left[(V(\rho) - V(\eta)) \frac{1 + \nu(\eta)}{E(\eta)} + \eta \right] F(\eta) \right\} d\eta - \frac{1}{\rho^2} \rho_1^2 p_1,$$

а $E = E(\rho)$, $\nu = \nu(\rho)$, $\alpha_t = \alpha_t(\rho, T(\rho))$, $e_z = \text{const}$, $F(\rho)$ – модуль пруж-

ності, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного розширення, повздовжня стала деформація, масові сили відповідно, $T = T(\rho)$ – відомий розподіл температури, T_0 – базова температура, при якій у циліндрі за відсутності навантажень відсутні деформації та переміщення, $\rho = r / R_2$ – безрозмірна радіальна координата, R_2 – зовнішній радіус циліндра. Характеристики двокомпонентного матеріалу циліндра виражені через об'ємні концентрації однієї компоненти матеріалу в другій, які зв'язані рівністю $V_1(\rho) = 1 - V_2(\rho)$, ($V_1(\rho) \in [0, 1]$, $V_2(\rho) \in [0, 1]$), та характеристики кожної компоненти на основі відомих моделей матеріалу (наприклад, Фойгта, Морі-Танака, інші). Розв'язок рівняння $Q_r(\rho) = 0$, який зв'язує характеристики матеріалу та температурне поле, має вигляд

$$T(\rho) = T_0 - p \frac{W(1) - V(1)v(\rho)}{\alpha(\rho)(1 + v(\rho)) [V^2(1) - W^2(1)]} + C \frac{1}{\alpha(\rho) [V(1) + W(1)]},$$

де C – довільна стала. Визначено об'ємні концентрації матеріалів при заданому температурному полі $T = T(\rho)$, які приводять до нульових радіальних напружень. З метою перевірки отриманих результатів проведено розрахунок термонапруженого стану циліндра на основі запропонованих автором інтегральних рівнянь відносно однієї з компонент тензора напружень.

1. Підстригач Я.С. Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
2. Shen Huj-Shen. Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. – CRC Press Taylor & Francis Group. – 2002. – 278 p.
3. Obata Y., Noda N. Steady Thermal Stresses in a hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material // J. Therm. Stress. – 1994. – 17, № 3. – P. 471-483.

ENSURING THE ZERO RADIAL STRESSES IN THE INHOMOGENEOUS LONG HOLLOW CYLINDER CHOOSING MATERIAL CHARACTERISTICS

Using the mathematical models of two-component material the volume concentration and axial loading, leading to zero radial stresses by known temperature distribution have been determined from the relations between temperature distribution, material characteristics, loadings, mass forces and known stresses or displacements in the inhomogeneous long hollow cylinder supposing radial dependence of parameters and material characteristics. The proposed integral equations were solved to verify the obtained relation and approach.

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ КІЛЬЦЕВОГО ЗВАРНОГО ШВА У ПРОМИСЛОВИХ РЕЗЕРВУАРАХ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ З ПЛОСКИМ ДНИЩЕМ

Мирон Николишин, Андрій Дзюбик, Любов Базилевич

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна*

Промислові резервуари – це оболонкові конструкції, що мають кілька поздовжніх та кільцевих зварювальних швів. Під дією термодеформаційного циклу зварювання в околі цих швів виникають залишкові зварювальні напруження.

Розглянемо осесиметричну задачу визначення залишкових на-

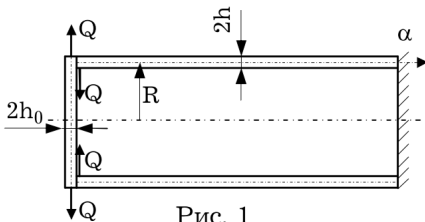


Рис. 1

пружень в замкнутій круговій циліндричній оболонці з привареним до її торця плоским днищем (рис. 1). Нехай умови зварювання конструкції такі, що поле залишкових деформацій є незмінним за товщиною днища. Жорсткість на згин в днищі є значно більшою, ніж в оболонці,

тому кут повороту оболонки на торці вважатимемо рівним нулю. Тоді днище буде знаходитися в умовах плоского напруженого стану. Якщо початок координат вибрати в центрі днища, то розв'язувальне рівняння для визначення залишкових напружень матиме вигляд

$$\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} - \frac{w_0}{r^2} = (1 + \nu_0) \frac{d}{dr} \varepsilon_*^0(r), \quad (1)$$

де w_0 – радіальне переміщення, а $\varepsilon_*^0(r)$ – поле залишкових деформацій в днищі.

Зусилля взаємодії між оболонкою і днищем позначимо через Q .

Для визначення залишкових напружень в циліндричній оболонці матимемо розв'язувальні рівняння [4]

$$\frac{d^4 w}{d\alpha^4} + 4a^4 w = \frac{2a^4 R^2}{Eh} Q + 4a^4 R \varepsilon_{22}^0(\alpha) - (1 + \nu) R^2 \frac{d^2 (\kappa_{11}^0(\alpha) + \nu \kappa_{22}^0(\alpha))}{d\alpha^2} \quad (2)$$

Умови спряження між оболонкою і днищем запишемо так

$$w(\alpha)|_{\alpha=0} = w_0(r)|_{r=R}, \quad \left. \frac{dw}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R} = \frac{Q}{2h_0}, \quad Q_1(\alpha)|_{\alpha=0} = -Q. \quad (3)$$

Другий край оболонки вважатимемо жорстко закріпленим

$$w(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \left. \frac{dw}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 0. \quad (4)$$

Диференціальні рівняння (1)-(2) з умовами (3)-(4) розв'язуємо методом змішаної колокації, подаючи шукані функції w_0 , w як від- різки степеневого ряду з невідомими коефіцієнтами. Шукані інтег- ральні характеристики поля залишкових деформацій $\varepsilon_{ii}^0(\alpha)$, $\kappa_{ii}^0(\alpha)$, $i = 1, 2$, $\varepsilon_{*}^0(r)$ представляємо аналогічно [4]. Систему колокації зами- каємо рівняннями, що одержані із прирівнювання теоретичних знач- ень напружень з отриманими експериментально. Експериментальні значення різниці головних напружень на зовнішній поверхні зварно- го кільцевого шва отримано на основі електромагнітного методу [3]. Розглянута задача є некоректною і вимагає певних умов регуляри- зації. Цими умовами є припущення про гладкість поля залишкових деформацій та його локалізацію в околі зварного шва.

Дана задача є застосуванням та розвитком числово-експеримен- тального методу [1, 2, 4] для практичних задач неруйнівної діагнос- тики промислових оболонкових конструкцій, які мають зварні кіль- цеві шви.

1. *Николишин М., Базилевич Л.* Задача ідентифікації зварних залишкових напружень в циліндро-конічній металевій оболонці обертання // *Машино- знавство*. – 2010, № 6 (156). – С.41-44.
2. *Николишин М.М., Базилевич Л.В., Назар І.Б., Дзюбик А.Р.* Розподіл за- лишкових напружень у пологій сферичній оболонці в околі звареного кругового циліндра // *Науковий вісник НЛТУ України*. Зб. наук.-техн. праць. – 2013. – Вип. 23.12. – С. 353-357.
3. *Осадчук В.А., Банахевич Ю.В., Іванчук О.О.* Визначення напруженого стану магістральних трубопроводів в зоні кільцевих зварних швів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2006. – 42, № 2. – С. 99-104.
4. *Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М.* Остаточные напряже- ния, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: На- ук. думка, 1991. – 289 с.

DETERMINATION OF RESIDUAL STRESSES IN THE VICINITY OF THE CIRCULAR WELD IN THE INDUSTRIAL CYLINDRICAL TANKS WITH A FLAT BOTTOM

A numerical-experimental procedure for solution of inverse problems of determination the residual stresses in the industrial cylindrical tanks with a flat bottom is developed.

УДК 539.3

КУБИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В НАНОКОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Екатерина Савельева, Сергей Синчило, Ярослав Симчук

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 03057, Украина*

Представлены результаты теоретического исследования взаимодействия горизонтально и вертикально поляризованных поперечных упругих плоских волн при их распространении в гиперупругом материале, деформирование которого описывается нелинейной моделью Мурнагана [2]. Использованное представление упругого потенциала

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}\mu \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] + \\ & + \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}A + B + \frac{1}{3}C \right) (u_{1,1})^3 + \frac{1}{2}(\lambda + B) u_{1,1} \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] + \\ & + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + A + 2B) \left[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]^2 + \\ & + \frac{1}{8}(3A + 10B + 4C)(u_{1,1})^2 \left[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right], \end{aligned}$$

позволяет исследовать квадратично и кубически нелинейные волновые эффекты [3]. Для распространяющихся вдоль оси Ox плоских волн было принято условие: первоначально на входе в среду возбуждаются только поперечные волны; продольные перемещения отсутствуют. Получены уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} &= N_4 u_{2,xx} (u_{2,x})^2 + N_6 u_{2,xx} (u_{3,x})^2; \\ \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} &= N_4 u_{3,xx} (u_{3,x})^2 + N_6 u_{3,xx} (u_{2,x})^2. \end{aligned}$$

На их основании исследовалась задача об одновременном распространении поперечных волн двух видов: горизонтально и вертикально поляризованных.

Начальные и граничные условия принимались в виде

$$u_2(x, 0) = u_3(x, 0) = 0; \quad u_2(0, t) = u_2^0 \cos \omega t; \quad u_3(0, t) = u_3^0 \cos \omega t.$$

Решение было получено методом возмущений с точностью до третьего приближения в виде

$$u_2(x, t) = u_2^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu} u_2^0 \left((u_2^0)^2 N_4 + (u_3^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t),$$

$$u_3(x, t) = u_3^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu} u_3^0 \left((u_3^0)^2 N_4 + (u_2^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t).$$

Для численного анализа полученного решения были использованы значения эффективных постоянных для четырех типов нанокompозитных материалов, соответствующих модели Знапо, из публикации [3]. Характеристики и свойства материалов и их составляющих представлены и подробно описаны в публикации [3], а также в книге [1].

Волновые параметры $\omega = 1,0$ МГц, $u_2^0 = u_3^0 = 1 \cdot 10^{-7}$ м, $k \approx 0,5 \cdot 10^6$ 1/м были выбраны одинаковыми для всех рассматриваемых вариантов нанокompозита.

Теоретический и численный анализ полученного решения показал: при одновременном возбуждении на границе гиперупругой среды двух поперечных волн разного вида происходит их взаимодействие. В результате обе волны трансформируются в свои третьи гармоники. Таким образом, происходит переключение волнового процесса с одинарной на тройную частоту. При отсутствии такого взаимодействия переключение не происходит. По мере одновременного распространения двух волн различной мощности происходит перекачка энергии из мощной волны в слабую.

1. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompозитов. – К.: Академперіодика, 2010. – 398 с.
2. Руцицкий Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, 1998. – 377 с.
3. Rushchitsky J.J. On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, No. 1. – P. 73–93.

CUBIC NONLINEAR TRANSVERSE PLANE WAVES IN NANOCOMPOSITE MATERIALS

The theoretical study of cubically nonlinear elastic plane harmonic waves interaction is carried out for the material, nonlinear properties of which are

described by Murnaghan elastic potential. The interaction of transverse horizontal and transverse vertical harmonic waves is studied by means of perturbing method. Pumping of the energy between different types of transverse waves is described. Results of a numerical and graphical analysis for five types of nanocomposite materials are presented.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ У ЗОНІ ЗВАРНОГО СПІРАЛЬНОГО ШВА У МАГІСТРАЛЬНИХ ТРУБОПРОВОДАХ

Леся Сеньків

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

При монтажі магістральних трубопроводів широке застосування мають труби, отримані за допомогою спірального зварювання. Надійність таких трубопроводів під час експлуатації визначається за інших рівних умов якістю зварних з'єднань. Одним із ефективних методів визначення залишкових технологічних напружень є розрахунково-експериментальний метод [2], який ґрунтується на розв'язанні обернених задач механіки деформівного тіла з використанням експериментальної інформації, отриманої неруйнівними методами. Нижче побудовано вирази для знаходження такого осесиметричного розподілу залишкових напружень у циліндричних оболонках в зоні спірального зварного шва.

Для оцінки залишкових напружень біля спірального шва у трубі моделюємо її круговою циліндричною оболонкою завтовшки $2h$ під дією локалізованих зварювальних деформацій. Віднесемо оболонку до триортogonalної системи координат α, β, γ , де $\alpha = z/R$ – безрозмірна координата вздовж осі z (z – відстань уздовж твірної від початку координат, вибраного в площині осі шва), R – радіус серединної поверхні труби; β – кутова координата; γ – координата вздовж зовнішньої нормалі до серединної поверхні оболонки. Нехай на серединній поверхні оболонки розташована гвинтова лінія, спрямована під кутом φ до координатної лінії $\beta = \text{const}$. Позначимо через τ дотичну до гвинтової лінії, ν – нормаль, $n_1 = \cos(\varphi)$, $n_2 = \sin(\varphi)$ – напрямні косинуси. Введемо на серединній поверхні оболонки нову систему координат $\alpha'O\beta'$, де вісь $O\alpha'$ напрямлена вздовж нормалі, а вісь $O\beta'$ – уздовж дотичної τ .

Поле локалізованих біля шва власних $e_{\beta'\beta'}^0$ і $e_{\alpha'\alpha'}^0$ залишкових пластичних деформацій у випадку симетрії відносно перерізу $\alpha'_2 = 0$ апроксимуємо виразами [1]

$$\begin{aligned} e_{\beta'\beta'}^0(\alpha', \gamma) &= -\mathbf{E}_1^* f_1(\gamma) \varphi_1(\alpha') S^0(\alpha'), \\ e_{\alpha'\alpha'}^0(\alpha', \gamma) &= -\mathbf{E}_2^* f_2(\gamma) \varphi_2(\alpha') S^0(\alpha'), \end{aligned} \quad (1)$$

де $f_i(\gamma) = 1 - m_i(1 - \gamma/h)^2$, $\varphi_1(\alpha) = 1 + s_1 \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} - (3 + 2s_1) \frac{\alpha^4}{\alpha_1^4} + (2 + s_{i1}) \frac{\alpha^6}{\alpha_1^6}$, $S_i^0(\alpha') = 1$, $|\alpha'| \leq \alpha'_i$; $S_i^0(\alpha') = 0$, $|\alpha'| > \alpha'_i$; $\alpha'_1 = b_1 / R$ – півширина зони пластичних деформацій; $\mathbf{E}_i^*$, s_i , m_i – числові параметри, значення яких, як і величин a_i , заздалегідь є невідомими.

Система ключових рівнянь у переміщеннях серединної поверхні в рамках гіпотези Кірхгофа-Лява для тонких оболонок в системі координат $\alpha O \beta$ записана у [2]. З використанням побудованого фундаментального розв'язку отримано інтегральні зображення для розтягуючих зусиль $\bar{N}_1, \bar{N}_2$, перерізуючої сили, згинних моментів $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ і крутильного моменту $\bar{H}$, в системі координат $\alpha O \beta$. Використовуючи формули для перетворення координат, визначаємо в системі координат $\alpha' O \beta'$ зусилля $\bar{N}'_1, \bar{N}'_2, \bar{S}'$, і моменти $\bar{M}'_1, \bar{M}'_2, \bar{H}'$.

За допомогою методу механічних квадратур [3] було розраховано теоретичне значення різниці головних напружень $\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}$ на лицевих поверхнях оболонки для різних значень кута нахилу зони зварювання $\beta = const$.

1. Осадчук В.А., Банахевич Ю.В., Іванчук О.О. Визначення напруженого стану магістральних трубопроводів в зоні кільцевих зварних швів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – № 2. – С. 99-104.
2. Кир'ян В.І., Осадчук В.А., Николишин М.М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛЮМ, 2007. – 320 с.
3. Каландия А.И. Математические методы двухмерной теории упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.

DETERMINATION OF THE STRESSED STATE IN THE ZONE OF SPIRAL SEAM WELDED JOINT IN PIPELINES

A mathematical model of computation-experimental determination of cyclical symmetric residual stresses distribution in pipelines in the zone of spiral seam welded joint has been constructed.

ВПЛИВ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН БАГАТОШАРОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗМІНИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ШАРІВ НА ПОВЕРХНЯХ ЇХ ПОДІЛУ

Людмила Токова, Анатолій Ясінський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Для ефективного здійснення оптимального керування [1] термо-напруженим станом багатошарових циліндричних тіл важливим є урахування впливу фізичних та геометричних властивостей шарів на розподіли температурних напружень, зокрема, поблизу поверхонь їх спряження. Більшість методів дослідження термопружної поведінки багатошарових циліндрів ґрунтується на двох основних підходах – методі спряження [2], який полягає у формулюванні задач термопружності для кожного з шарів із подальшим «зшиванням» розв'язків на поверхнях поділу з використанням заданих умов контакту, та методі, який розглядає багатошарове тіло як неоднорідне із кусково-змінною залежністю властивостей матеріалу від координат, на основі чого формулюють неklasичні задачі термомеханіки для усього тіла із застосуванням теорії узагальнених функцій [3]. Реалізація обох цих підходів у випадку, коли властивості шарів є залежними від координат чи температури, вимагає застосування ефективної методики розв'язування прямих задач теорії пружності та термопружності зі змінними пружними та термомеханічними характеристиками. Одна з таких методик [4] полягає у зведенні вихідних рівнянь задач до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з інтегральними умовами.

Тут розглянуто застосування методики [4] до розв'язання одновимірної задачі термопружності для суцільного багатошарового циліндра з вільною від силового навантаження поверхнею, властивості шарів якого залежать від змінного за радіальною координатою температурного поля. Приймаючи умови ідеального термомеханічного контакту шарів, на основі методу [3] задачу записано в напруженнях із вихідними рівняннями рівноваги та суцільності у термінах узагальнених похідних. Для розв'язання ключового інтегрального рівняння Вольтерри, до якого зведено поставлену задачу, використано метод резольвентного ядра [5], яке має вигляд кусково-неперервної функції. На основі отриманого розв'язку проаналізовано вплив на напружений стан умов узгодження між властивостями матеріалів сусідніх шарів на поверхнях їх контакту.

Дослідження здійснено за часткової фінансової підтримки спільного гранту Національної академії наук України та Російського фонду фундаментальних досліджень (номер проекту 0114U005082).

1. Кушнір Р.М., Попович В.С., Ясінський А.В. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. В 5-ти т. / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. – Т. 5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с.
2. Ke L.-L., Wang Y.-S. A linear multi-layer model and its applications in fracture and contact mechanics of elastic functionally graded materials // Functionally graded materials / Ed. N.J. Reynolds. – New York: Nova Science Pub., 2012. – P. 1-92.
3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 378 с.
4. Візак В.М., Калиняк Б.М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60-67.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.

EFFECT OF INTERFACIAL VARIATION OF THE THERMOMECHANICAL PROPERTIES OF LAYERS ON THE STRESS-STATE OF A MULTILAYER THERMOSENSITIVE CYLINDER

An application of the technique of reduction to the integral equations to solution of a one-dimensional thermoelasticity problem for a multilayer cylinder with free lateral surface with dependence of the material properties in each layer on the radial variation of the temperature is presented. By application of the generalized functions technique, the problem is formulated in terms of stresses and then reduced to solution of a Volterra integral equation of second kind with integral condition. The solution is constructed in an explicit form by means of the resolvent-kernel technique. An analysis of effect of interlayer variation of the material properties on the stress-state in the cylinder is presented.

УДК 624.074.04

СТІЙКІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ КРУЧЕННІ В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Володимир Трач, Андрій Подворний

*Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна*

Стійкість анізотропних оболонкових конструкцій на основі дво-

вимірної теорії детально досліджено в роботі [1]. Досліджень стійкості оболонок обертання з ізотропних і ортотропних матеріалів, а тим більше з матеріалів властивості яких мають одну площину пружної симетрії, при крученні, у тривимірній постановці, авторами знайдено не було. Можливо, що це викликано зв'язаністю деформацій розтягу та зсуву, згину та кручення. Але їх урахування дозволить проєктувати конструювати оболонкові системи з таких матеріалів, які можуть сприймати експлуатаційні навантаження і бути при цьому оптимальними, наприклад, за масою. Крім того, отримані тривимірні розв'язки можуть бути еталонами у розрахунках на стійкість, наприклад методом скінченних елементів, оболонкових конструкцій більш складної геометрії.

Розглядаються пружні циліндричні оболонки, віднесені до циліндричної системи координат r, z, θ , осі z та θ якої співпадають з лініями головних кривизн конструкції, r – нормальна координата за товщиною циліндра. Анізотропія матеріалу обумовлена поворотом головних напрямків пружності ортотропного матеріалу відносно осі z прийнятої системи координат.

Рівняння рівноваги запишемо у вигляді [5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\sigma_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}) - \sigma_{\theta\theta} + r F_r \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}) + r F_z \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r} + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}) + r F_{\theta} \right],\end{aligned}\quad (1)$$

де r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; σ, τ – проекції напруг на осі прийнятої системи координат до деформування оболонки [5].

Зв'язок між складовими деформацій та переміщень, а також співвідношення узагальненого закону Гука для матеріалу з однією площиною пружної симетрії візьмемо з [5] та [4] відповідно.

Так як розглядається задача кручення, то превалюючими є напруги $\tau_{z\theta}^0$ та σ_{zz}^0 [4], зв'язок між якими за аналогією з [6] приймемо у вигляді:

$$\sigma_{zz}^0 = -\frac{a_{66}}{a_{16}} \tau_{z\theta}^0. \quad (2)$$

Для перетворення тривимірної задачі в одновимірну використа-

ємо процедуру Бубнова-Гальоркіна. Відповідно до неї, розкладемо усі функції у тригонометричні ряди за координатою уздовж твірної z так, щоб вони задовольняли граничним умовам, а також врахуємо їх періодичність за окружною координатою θ [2].

Після математичних перетворень отримуємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r) \bar{y}, \quad T(r) = t_{i,j}(r), \quad (3)$$

де $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$ – розв’язуюча вектор функція, p, m – хвильові числа в рядах Фур’є.

Реалізація отриманої системи (3) проводиться при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [3].

1. *Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2010. – 352 с.
2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Задачі теорії упругості неоднородних тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
3. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 264 с.
4. *Лехницький С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
5. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
6. *Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В.* Стійкість шаруватих оболонок з матеріалів з однією площиною пружної симетрії у просторовій постановці. – Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Зб. наук. праць. – Вип. 28. – С. 405-421.

STABILITY OF CYLINDRICAL ANISOTROPIC SHELLS UNDER TORSION IN THREE-DIMENSIONAL STATEMENT

The approach on the implementation of the stability problems of anisotropic cylindrical shells under torsion, based on the use of the Bubnov-Galerkin procedure with account of boundary conditions on surfaces and the ends of the cylindrical shell and the numerical method of discrete orthogonalization is proposed.

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КВАЗІСТАТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ В ПЛИТІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ НАГРІВАННЯ

Ігор Турчин, Юрій Колодій

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

У багатьох областях сучасної теплоенергетики виникають проблеми, пов'язані зі створенням та експлуатацією функціональних структур матеріалів з високим ступенем релаксації термічних напружень і великим опором окисленню чи корозії [1]. Найпростішими з них є тіла з покриттями, для яких характерна різка стрибкоподібна зміна фізико-механічних властивостей при збереженні неперервності розподілу фізичних полів. Прагнення до більш точного математичного моделювання реальних технологічних процесів, що проходять в таких структурах часто призводить до необхідності врахування так званих змішаних умов нагрівання, що враховують одночасний нагрів поверхні за деякою, часто обмеженою, областю та охолодження поза нею. Слід зазначити, що існування лінії поділу крайових умов на поверхні покриття значно ускладнює, а можливо і не уможлиблює застосування підходу, за якого покриття моделюється певною поверхнею із своїми фізико-механічними властивостями, а її наявність заміщується ускладненими крайовими умовами [2].

У зв'язку з цим розглянемо віднесену до циліндричної системи координат (r, z) безмежну плиту ($0 \leq r < \infty$, $0 \leq z \leq H$), що складається з двох шарів різної товщини h_i , ($h_1 + h_2 = H$) і з різними термомеханічними властивостями. Один з шарів будемо вважати покриттям, а інший – основою. Починаючи з моменту часу $t = 0$, двшарова плита нагрівається по поверхні покриття потоком тепла, осесиметрично розподіленим в колі радіуса R . Поза цим колом відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем, що має нульову температуру. Нижню основу плити будемо вважати теплоізовлюваною.

Шляхом застосування до задачі теплопровідності інтегрального перетворення Лагерра [3] та інтегрального перетворення Ханкеля задачу зведено до послідовності парних інтегральних рівнянь виду

$$\int_0^{\infty} \xi \bar{g}_n(\xi) [1 + f(\xi)] J_0(\xi \alpha) d\xi = -\tilde{q}_n(\alpha) + \int_0^{\infty} \xi F_n(\xi) J_0(\xi \alpha) d\xi, \quad \alpha \leq 1, \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \xi \bar{g}_n(\xi) J_0(\xi \alpha) d\xi = 0, \quad \alpha > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

де $\bar{g}_n(\xi)$ – шукана функція, а всі решта відомі, або визначаються з використанням знайдених $\bar{g}_k(\xi)$ при $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Послідовності рівнянь (1), (2) з використанням методу рядів Неймана [4] зведено до безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь та доведено їх квазірегулярність.

За отриманим температурним полем побудовано розв'язок задачі термопружності. За результатами числового аналізу вивчаються характерні для неоднорідних тіл та змішаних крайових умов особливості часової трансформації температурного поля та напруженого стану залежно від вхідних параметрів задачі: відносної товщини покриття, інтенсивності охолодження зовні плями нагріву, співвідношення між фізико-механічними властивостями покриття та основи.

1. *Tamarin Y.* Protective coatings for turbine blades. – ASM International, USA. – 2002. – 248 p.
2. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Галазюк В.А.* Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3-7.
4. *Галазюк В.А., Турчин И.Н.* Квазистатическое термонапряженное состояние слоя при смешанных условиях нагрева // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 9. – С. 31-38.

AXISYMMETRIC QUASI-STATIC STRESS ANALYSIS IN THE COATED PLATES UNDER MIXED CONDITIONS OF HEATING

Using the Laguerre integral transform the solution of the nonstationary heat conduction problem with mixed boundary conditions for two-layered plate is obtained. Found on the temperature field the solution of the corresponding problem of thermoelasticity is obtained. The results of a numerical analysis of the temperature field and stress-strain state in plate as a function of the relative geometric and thermophysical properties of the plate's components have been given.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ НЕРУЙНІВНОГО МАГНІТОПРУЖНОГО МЕТОДУ ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ ЗВАРЮВАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ У ТРУБОПРОВОДІ

Василь Чекурін, Леся Постолакі

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

В околі стикового зварного з'єднання труб однорідним кільцевим швом виникають осесиметричні залишкові напруження. Ці напруження зумовлені неоднорідними несумісними деформаціями e_{zz}^0 та $e_{\theta\theta}^0$, які відмінні від нуля лише в зоні термічного впливу шириною $2d$ [3].

Пряма задача. Залишкові напруження швидко згасають з віддаллю від шва, тому труба розглядається як безмежна циліндрична оболонка, визначення залишкових напружень в якій можна звести до розв'язування рівняння

$$\frac{\partial^4 u(\xi)}{\partial \xi^4} + 4a^4 u(\xi) = f(\xi), \quad (1)$$

де $w = uh$, $h = \eta R$, $z = \xi R$ – безрозмірні координати, w і R – прогин і радіус серединної поверхні оболонки; $a^4 = 3(1 - \nu^2)/\eta^2$, $2h$ – товщина оболонки, $f(\xi)$ – функція, яка визначається через компоненти осесиметричного тензора вільних деформацій e_{zz}^0 та $e_{\theta\theta}^0$.

В працях [1, 3] запропоновано модельні аналітичні представлення для функцій e_{zz}^0 та $e_{\theta\theta}^0$, використовуючи які можна отримати аналітичний розв'язок рівняння (1), а відтак розрахувати за відомими формулами залишкові напруження.

Обернена задача. На практиці розподіли несумісних деформацій e_{zz}^0 та $e_{\theta\theta}^0$ здебільшого є апіорі невідомі, тому щоб сформулювати відповідні прямі задачі доводиться застосовувати руйнівні методи або ж розглядати обернені задачі. Щоб сформулювати обернену задачу використовують апостеріорні дані про напружений стан об'єкта, отримані неруйнівними методами, разом із відповідною математичною моделлю. Застосування моделі (1) вимагає даних, які дозволили б відновити з достатньою точністю розподіли компонент вільних деформацій e_{zz}^0 , $e_{\theta\theta}^0$ у вузькій зоні термічного впливу. За принципом Сен-Венана

деталі реальних розподілів компонент e_{zz}^0 та $e_{\theta\theta}^0$ проявляються у поведінці залишкових напружень лише в околах їхньої локалізації. З цією метою у праці [1] використовували метод спекл-інтерферометрії, який є частково руйнівний. Натомість, магнітопружний метод [2] є цілком неруйнівний. Він дозволяє отримувати дані про розподіл різниці головних напружень на поверхні трубопроводу без внесення структурних змін у тіло труби. Проте бази сучасних магнітопружних перетворювачів, які використовують для таких вимірювань, є порядку $l \sim 10 \dots 15$ м.м, що часто більше ширини зони термічного впливу. Тож, застосовуючи магнітопружний метод, немає сенсу використовувати математичну модель (1). Тому для опису залишкових зварювальних напружень в тілі труби розглядатимемо її як безмежну циліндричну оболонку, що складається із двох півбезмежних частин, прогини яких $u_{(1)}(\xi)$, $\xi > 0$ та $u_{(2)}(\xi)$, $\xi < 0$ описують рівняння:

$$\frac{d^4 u_{(\lambda)}(\xi)}{d\xi^4} + 4a^4 u_{(\lambda)}(\xi) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \quad (2)$$

а на межі контакту виконуються умови:

$$\begin{aligned} \left. (u_{(1)} - u_{(2)}) \right|_{\xi=0} &= \Delta U, & \left. (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}) \right|_{\xi=0} &= \Delta \Phi, \\ \left. (M_{(1)} - M_{(2)}) \right|_{\xi=0} &= \Delta M, & \left. (Q_{(1)} - Q_{(2)}) \right|_{\xi=0} &= \Delta Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут ΔU , $\Delta \Phi$, ΔM , ΔQ є апіорі невідомі величини, які слід визначити, розв'язуючи обернену задачу.

У доповіді розглянуто варіаційне формулювання оберненої задачі з використанням математичної моделі (2), (3) та даних магнітопружних вимірювань. Із застосуванням числового експерименту проведено дослідження її розв'язків.

1. Осадчук В.А., Банахевич Ю.В. Оцінка допустимості дефектів типу кільцевих тріщин у зоні зварних монтажних швів магістральних трубопроводів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 37-45.
2. Недосека А.Я. Основы расчета и диагностика сварных конструкций. – К.: Изд-во «ИНДРОМ», 2001. – 815 с.
3. Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М. Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: Наук. думка, 1991. – 294 с.

A MATHEMATICAL MODEL FOR NONDESTRUCTIVE MAGNETOELASTIC METHOD DETERMINATION OF RESIDUAL WELDING STRESSES IN A PIPELINE

A mathematical model and a variation formulation for inverse problem for nondestructive determination of residual welding stresses in a pipeline on the base of magnetoelastic data have been considered in the paper.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ НАБОРУ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ У ВАЛАХ З ТОНКИМ ПРИПОВЕРХНЕВИМ ШАРОМ

Роман Швець, Олесь Яцків, Богдан Бобик

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Реальна структура елементів механічних конструкцій переважно є неоднорідною. Фізико-механічні властивості їх тонких приповерхневих шарів та основного матеріалу неоднакові. Зміна властивостей цих шарів може відбуватись як під час виготовлення, так і експлуатації. Для побудови адекватних математичних моделей термопружної поведінки цих елементів конструкцій необхідно мати достовірну інформацію про характер неоднорідності, зокрема про актуальні значення фізико-механічних параметрів, в т.ч. теплофізичних. Визначального значення набувають інформативність і точність даних спостереження. Для цього часто використовують непрямі вимірювання потрібних параметрів і обробку результатів із застосуванням теорії обернених задач (ОЗ). Однак ОЗ чутливі до точності вимірювань вхідних даних – нестійкі. Збільшення ж об'єму вхідної інформації може ще більше посилювати нестійкість їх розв'язків. Тому важливою є проблема розробки ефективних методів розв'язання ОЗ, зокрема визначення сукупності теплофізичних параметрів тіл з тонкими приповерхневими шарами, в т.ч. в умовах реального часу.

Для зменшення нестійкості ОЗ часто застосовують метод регуляризації Тихонова, з яким однак пов'язані труднощі вибору параметра регуляризації та можлива яроподібна поведінка регуляризівного функціоналу. З огляду на це має свої переваги метод підбору шуканих параметрів, оснований на розв'язуванні послідовності прямих задач і порівнянні їх розв'язків з вхідними даними. Хоча тут виникають інші труднощі: відшукування початкового наближення і вибір напрямку руху в області зміни параметрів. Позитивним у методі підбору є отримання областей значень параметрів для проектування конструкцій із забезпеченням зміни їх термонапруженого стану в певному діапазоні.

Тому тут досліджено особливості визначення сукупності теплофізичних параметрів приповерхневих шарів циліндричних валів: зведених тепловіддачі з поверхні та об'ємної теплоємності шару. Однопараметричну ідентифікацію розглядали в праці [1]. Сформульовано ОЗ термопружності визначення двох теплофізичних параметрів для довгих суцільних циліндричних тіл з тонкими приповерхневими

шарами та контактними прошарками за їх нагріву довкіллям, а також тепловиділенням від тертя – у разі обертання валу в обоймі. Розроблений метод ідентифікації базується на побудованій спеціальній структурі розв'язку прямої неklasичної задачі з нестационарними гранично-контактними умовами, якими задається кінетика процесу теплопровідності на межовій поверхні, що дає можливість враховувати вплив приповерхневого шару на фізико-механічну поведінку валу, та на інтегро-диференційному рівнянні з інтегральним оператором типу Вольтерри за часом для температури поверхні, до якого зводиться пряма задача [2]. Теплофізичні параметри в цьому рівнянні виокремлені і входять у нього в явному вигляді, що дозволяє за відомими в послідовності моментів часу значеннями температури поверхні валу (вхідні дані ОЗ) визначати невідомі параметри. У разі точного задання температури отримуємо точні значення зведених параметрів тепловіддачі з поверхні та об'ємної теплоємності шару. Якщо ж температуру задано з похибкою, то через нестійкість ОЗ знайдені параметри можуть значно відрізнитись від їх точних значень. Обчислений набір параметрів вибираємо за початкове наближення і, рухаючись в площині зміни параметрів, знаходимо їх сукупність, для якої середнє квадратичне відхилення температури, обчисленої як розв'язок прямої задачі [2], від заданої буде мінімальним. Вибір напрямку руху в площині параметрів здійснюємо на основі дослідженої поведінки власних чисел прямої неklasичної крайової задачі (прямих незмінності власних чисел). Фіксуємо набори параметрів, для яких відхилення обчисленої температури від заданої відрізняється не більше, ніж на якусь наперед задану величину, отримуємо область значень теплофізичних параметрів, за яких у валі підтримуватиметься заданий в певному діапазоні термонапружений стан. Проаналізовано нестійкість ОЗ залежно від значень параметрів, які ідентифікують, зокрема для валу в обоймі – поблизу значень, за яких наступає термопружна нестійкість контакту. Розроблений метод ідентифікує параметри в режимі реального часу.

1. Швец Р.М., Якув О.І., Бобик Б.Я. Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестационарних умов теплообміну з довкіллям // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 198-207.
2. Швец Р.М., Якув О.І., Бобик Б.Я. Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови // Прикл. пробл. механ. і математ. – 2007. – Вип. 5. – С. 186-194.

IDENTIFICATION OF TWO THERMOPHYSICAL PARAMETERS OF THE LONG COATED CYLINDERS

A method of two thermophysical parameters identification of the long coated cylinder heated by the environment or by the frictional heat generation is presented.

ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 539.3:612.311

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИНТОВОЙ ОСИ ПРИ НАЧАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ КОРНЯ ЗУБА В ЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКЕ

Сергей Босяков, Абдужах Фрхат Мселати

*Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости, 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь*

Одним из основных вопросов ортодонтии является профилактика и коррекция неправильного прикуса, а также других зубочелюстных аномалий. При этом важной задачей является прогнозирование начального и долговременного смещения зубов, в первую очередь их начальных перемещений [1, 2]. Зубы окружены периодонтальной связкой, которая является тонкой мембраной. Она состоит из коллагеновых волокон и обеспечивает прикрепление зуба к окружающей альвеолярной кости. Высокая упругость тканей периодонтальной связки по сравнению с костями и зубами, указывает на то, что именно периодонт определяет начальные перемещения зуба [3, 4]. При аналитическом описании начальной подвижности корня зуба в периодонтальной связке используется комбинации поступательных перемещений вдоль координатных осей и углов поворота относительно этих осей [5, 6]. Настоящая работа развивает этот подход применительно к моделированию смещению корня зуба в линейно упругой периодонтальной связке с использованием уравнения оси винтовой линии.

Внутренняя и внешняя поверхности периодонтальной связки описываются уравнениями эллиптического гиперboloида. Периодонтальная щель имеет одинаковую толщину по нормали к своей внутренней поверхности. Корень зуба является абсолютно твердым телом. На основании высоких значений коэффициента Пуассона для тканей периодонта (0.45–0.49 [7, 8]), предполагается, что периодонтальная связка является несжимаемым материалом, поэтому ее полная деформация по нормали к поверхности. С учетом этого в явном виде сформулированы соотношения между компонентами вектора перемещений и тензора деформаций периодонтальной связки в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к поверхности корня зуба. При этом используется параметр, определяю-

щий толщину периодонтальной щели по нормали к ее внутренней поверхности. Поступательные перемещения и углы поворота определены на основании уравнений равновесия корня зуба в периодонтальной связке. На основании поступательных перемещений и углов поворота определено перемещение вдоль оси винтовой линии. При равенстве перемещения вдоль винтовой линии нулю зуб под действием заданной нагрузки получает плоско-параллельное движение. Если это перемещение не равно нулю, зуб под действием заданной нагрузки получает винтовое перемещение. Положение оси вращения зуба при плоско-параллельном движении и положение оси винтовой линии определяются на основании уравнения винтовой линии.

1. Cronau M., Ihlow D., Kubein-Meesenburg D., Fanghanel J., Dathe H., Nagerl H. Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.* – 2006. – Vol. 129. – P. 599.e13-599.e21.
2. Ren Y., Jaap C., Kuijpers-Jagtman A. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review // *Angle Orthod.* – 2003. – Vol. 73. – P. 86-92.
3. Bourauel C., Freudenreich D., Vollmer D., Kobe D., Drescher D., Jaeger A. Simulation of orthodontic tooth movements // *J. Orofac. Orthop.* – 1999. – Vol. 60. – P. 136-151.
4. Dorow C., Sander F.G. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method // *J. Orofac. Orthop.* – 2005. – Vol. 66. – P. 208-218.
5. Provatidis C.G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation // *Int. J. Eng. Sci.* – 2001. – Vol. 39. – P. 1361-1381.
6. Van Schepdael A., Geris L., J. Van der Sloten A. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // *Med. Eng. Phys.* – 2013. – Vol. 35. – P. 403-410.
7. Rees J.S., Jacobsen P.H. Elastic modulus of the periodontal ligament // *Biomaterials.* – 1997. – Vol. 18. – P. 995-999.
8. Kawarizadeh A., Bourauel C., Jager A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens // *Eur. J. Orthod.* – 2003. – Vol. 25. – P. 569-578.

MODELING OF THE SCREW AXIS FOR DESCRIBING OF THE INITIAL DISPLACEMENTS TOOTH ROOTS IN THE LINEAR ELASTIC PERIODONTAL LIGAMENT

The simulation results of the initial movement of the tooth root in the linear elastic periodontal ligament with using the screw axis are presented. Internal and external surfaces of the periodontal ligament and the external surface of the tooth root are described by equations of elliptic hyperboloids. The tooth root is absolutely solid, periodontal ligament tissue is incompressible material are assumed. Displacement the tooth root is described by a combination of the translational displacements along the coordinate axes and rotation angles about these axes. The translational displacement and the rotation angles for calculating the displacement of the tooth root along the screw axis are defined on the

basis of the equilibrium equations of the tooth root in the periodontal ligament. If displacement along the screw axis equal to zero, a tooth root displaces in one plane. If this displacement is not zero, a tooth root is obtained the screw movement. Location of the rotation axis and the screw axis are determined based on equation of the screw line.

УДК 531.8+62-50

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ БІОТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ “ЛЮДИНА – ЕКЗОСКЕЛЕТОН”

Мирослав Демидюк, Богдан Литвин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Досліджуємо задачі математичного моделювання ходи людини з екзоскелетоном та оптимізації його жорсткісних характеристик. Екзоскелетон (екзоскелет) – це зовнішній біомеханічний пристрій, призначений для відновлення локомоційних функцій людини. Екзоскелетон складається із корсета і пари шарнірно зв'язаних з ним триланкових шарнірних важелів. Корсет закріплюють на корпусі людини, ланки важелів послідовно фіксують на стегні, гомілці та стопі. З метою рекуперації енергії у конструкцію екзоскелетона часто вмонтовують блоки пружин. При цьому раціональний підбір параметрів цих пружин дає можливість істотно понизити рівень м'язових зусиль у суглобах людини.

Для обчислення динамічних характеристик ходи людини з екзоскелетоном використовуємо енергетично-оптимізаційний підхід [1-3].

Розглядаємо ходу людини по нерухомій горизонтальній поверхні на проміжку подвійного кроку $[0, T]$. Опорно-руховий апарат людини моделюємо плоскою системою 9-и твердих тіл: корпус і дві чотириланкові нижні кінцівки (стегно, гомілка, дволанкова стопа). Шарніри екзоскелетона вважаємо циліндричними, пружини невагомими. Рух системи відбувається внаслідок взаємодії сили тяжіння, сил реакцій опорної поверхні та моментів сил у шарнірах. Сили у шарнірах генеруються м'язо-скелетною структурою людини та пружинами екзоскелетона. У припущенні, що маса стоп зосереджена у гомілковостопних суглобах, динаміка руху моделі (у сагітальній площині) описується системою 7-и нелінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку та 4-х умов кінетостатичної рівноваги стоп. Додатково на рух моделі накладаємо кінематичні та динамічні умови антропоморфного контакту стоп з опорною поверхнею, умови періодичності (по

кутах та кутових швидкостях) руху системи та умови взаємного розміщення стоп у моменти часу $t = 0$, $t = T$.

Введемо позначення: $\mathbf{q}$ – вектор узагальнених координат системи, $\mathbf{u}$ – вектор керуючих моментів сил у шарнірах системи, $\mathbf{g}$ – вектор міжланкових кутів у основних суглобах нижніх кінцівок, $\mathbf{c}$ – вектор параметрів екзоскелетона (жорсткість пружин, кути їх ненапруженого стану), E – механічні енерговитрати системи [1-3]. Надалі вважаємо заданими параметричні представлення (від вектора $\mathbf{c}$) моментів пружних сил пружин екзоскелетона у шарнірах системи.

Оптимізацію параметрів екзоскелетона проводимо у два етапи. На першому етапі моделюємо ходу людини без екзоскелетона. Формуємо таку задачу. **Задача 1.** За умов $\mathbf{g}^0(t) \leq \mathbf{g}(t) \leq \mathbf{g}^1(t)$ визначити $\mathbf{q}_N^*(t)$, $\mathbf{u}_N^*(t)$, $t \in [0, T]$, які в силу рівнянь руху системи та накладених обмежень мінімізують енерговитрати E . Тут $\mathbf{g}^0$, $\mathbf{g}^1$ – задані функції обмежень на міжланкові кути. Отриманий оптимальний закон руху системи $\mathbf{q}_N^*(t)$ використовуємо на другому етапі під час оптимізації жорсткісних характеристик екзоскелетона. Відповідна задача має таку постановку. **Задача 2.** Для заданого руху системи $\mathbf{q}_N^*$, $t \in [0, T]$ знайти такі параметри екзоскелетона $\mathbf{c}^*$ та відповідне керування $\mathbf{u}^*(t)$, $t \in [0, T]$, які в силу рівнянь руху системи та накладених обмежень мінімізують функціонал $Z = \sum_i \int_0^T u_i^2(t) dt$. Тут u_i – керування в i -му шарнірі системи.

Алгоритм розв'язання задачі 1 ґрунтується на процедурах параметризації вектора $\mathbf{q}$ кубічними згладжувальними сплайнами, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування [1-3]. Стосовно задачі 2 відзначимо, що підстановка в рівняння руху системи заданої функції $\mathbf{q}_N^*(t)$ та параметризованих виразів для моментів пружних сил екзоскелетона приводить до параметричної множини керувань $\mathbf{u}(t, \mathbf{c})$ та цільової функції $Z(\mathbf{c})$. Для мінімізації $Z(\mathbf{c})$ використовуємо числові процедури математичного програмування (зокрема, генетичні алгоритми).

1. Бербюк В.Є., Демидюк М.В., Литвин Б.А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // Вісн. Київського ун-ту. Серія Кібернетика. – Київ: КНУ. – 2002., № 3. – № 17-20.
2. Бербюк В.Е., Демидюк М.В., Литвин Б.А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005, № 3. – С. 128-144.

3. Демидюк М.В., Литвин Б.А. Задачі математичного моделювання ходи людини з врахуванням біомеханічних експериментальних даних // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 51-62.

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE BIOTECHNICAL SYSTEM “HUMAN-EXOSKELETON”

The mathematical modeling problem of the human gait with an exoskeleton is researched. The exoskeleton is modeled by bar system with cylindrical joints and set of springs. The problem of selection spring parameters in order to decrease joint torques is formulated. The approximate solution of the problem, which is based on parametric optimization method, is obtained.

УДК 539.3

РІВНОВАГА ВИПАЛЮВАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ В КОРПУСІ ОБЕРТОВОГО АГРЕГАТУ

Людмила Дзюбик

Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна

В процесі експлуатації обертового агрегату випалюваний матеріал зміщується на деякий кут відносно нижнього положення. При цьому відбувається перерозподіл діючого навантаження на корпус [1].

Розглянемо обертання циліндричної оболонки частково заповненої матеріалом (кутовою величиною $2\beta_0$), який початково розміщений вздовж дуги у тонкому кільцевому сегменті $|\phi| \leq \beta_0$ (рис. 1).

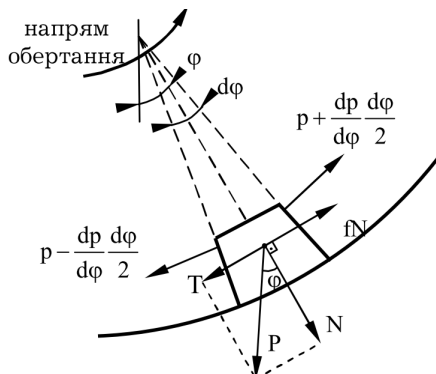


Рис. 1 Розрахункова схема зусиль, які діють на елемент сегмента матеріалу

Розподіл ваги матеріалу вздовж дуги позначимо $W(\phi) \geq 0$. Під час обертання корпусу обертового агрегату виникають сили тертя, які зумовлюють переміщення матеріалу на деякий кут γ_o у напрямку обертання. В кільці матеріалу виникають лише кільцеві зусилля $p(\phi)$, а умова $p(\phi) < 0$ забезпечує нерозривність сегмента. На елемент $d\phi$ сегмента вагою $P = W(\phi)d\phi$ діє нормальна сила $N(\phi) = W(\phi - \gamma_o)d\phi \cos \phi$ та дотична сила $T(\phi) = -W(\phi - \gamma_o)d\phi \sin \phi$.

Крім цього, на цей елемент діє кільцеве зусилля $p(\phi)$ та сила тертя $fN(\phi)$, $f > 0$ – коефіцієнт тертя.

Запишемо умову рівноваги елемента:

$$-\left(p(\phi) - \frac{dp}{d\phi} \frac{d\phi}{2}\right) - W(\phi - \gamma_o)d\phi \sin \phi + \left(p(\phi) + \frac{dp}{d\phi} \frac{d\phi}{2}\right) \cos \frac{d\phi}{2} + fW(\phi - \gamma_o)d\phi = 0. \quad (1)$$

Звідси, при $d\phi \rightarrow 0$ отримаємо диференціальне рівняння для визначення кільцевого зусилля $p(\phi)$:

$$\frac{dp}{d\phi} = W(\phi - \gamma_o) \sin \phi - fW(\phi - \gamma_o) \cos \phi. \quad (2)$$

Загальний розв'язок рівняння (2) запишемо наступним чином

$$p(\phi) = \left(1 + f^2\right) \int_{-\beta_o + \gamma_o}^{\phi} W(\alpha - \gamma_o) \sin(\alpha - \gamma) d\alpha, \quad (3)$$

де $\gamma = \arctg f$.

Зазначимо, що $p(-\beta_o + \gamma_o) = 0$. Покладемо $\gamma = \gamma_o$, тоді отримаємо
мо $p(\phi) = \left(1 + f^2\right) \int_{-\beta_o + \gamma_o}^{\phi} W(\alpha - \gamma_o) \sin(\alpha - \gamma_o) d\alpha$. Проведемо заміну $\alpha - \gamma_o = \beta$:

$$p(\phi) = \left(1 + f^2\right) \int_{-\beta_o}^{\phi - \gamma_o} W(\beta) \sin \beta d\beta. \quad (4)$$

Якщо розподілена вага симетрична відносно $\phi = 0$, то $p(\beta_o + \gamma_o) = \left(1 + f^2\right) \int_{-\beta_o}^{\beta} W(\beta) \sin \beta d\beta = 0$, при цьому $p(\phi) < 0$ при $|\phi - \gamma_o| < \beta_o$.

Отже, кільцевий сегмент матеріалу з розмахом $|\phi| \leq \beta_o$ і симетрично розподіленою вагою при обертанні корпусу агрегату здійснить нерозривне зміщення на кут γ_o такий, що

$$\operatorname{tg} \gamma_o = f. \quad (5)$$

Отриманий вираз дає змогу визначити розподіл навантажень на оболонку при зміщенні випалюваного матеріалу.

1. Кузьо І.В., Дзюбик Л.В., Дзюбик А.Р. Напружено-деформований стан корпусу обертового агрегату із врахуванням випалювального матеріалу // Зб. наук. праць ПНТУ ім. Юрія Кондратюка – 2012. – Т. 2, Вип. 2 (32). – С. 160-165.

THE EQUILIBRIUM OF BURNED MATERIAL IN THE HOUSING ROTATING UNITS

We consider the problem of equilibrium of material in a circular cylindrical shell that rotates. The expressions for the distribution of loads on the shell when shifting burned material are obtained.

УДК 539.3

СТРУКТУРНА СКЛАДОВА НАПРУЖЕНЬ У СКЛЯНИХ ТІЛАХ ЗА НЕПЕРЕРВНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

Богдан Дробенко, Степан Будз, Володимир Асташкін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

При виготовленні, обробленні та експлуатації скляних виробів у них виникають напруження різного походження: термічні та залишкові. Термічні напруження виникають внаслідок теплової дилатації, зовнішніх навантажень та неоднорідного розподілу температури при нагріві та охолодженні. При охолодженні скляних тіл від температур, вищих за температуру склування виникають гартувальні напруження та просторово неоднорідна структура, яка також є причиною формування відповідних їй залишкових напружень.

Після повного механічного розвантаження скляного тіла чи зняття з нього деяких заданих кінематичних обмежень виниклі в тілі термічні напруження зникають. Що стосується залишкових та структурних напружень, то вони існують у тілі і після припинення дії термомеханічного навантаження. Зняття цих напружень можна домогтись шляхом застосування довготривалого відпалу, при якому

релаксують напруження і так званий вільний об'єм – частка об'єму тіла, не зайнята скляною субстанцією. Під релаксацією вільного об'єму розуміють зменшення об'єму, незайнятого склом.

Напруження, що виникають у скляних тілах, мають класичну дилатаційну складову, яка залежить від температури, і складову, залежну від кінетичних параметрів процесу – градієнта температури та швидкості охолодження при склуванні. Це експериментально встановлені факти [1, 2], з яких випливає, що термічні напруження є функцією процесу навантаження, а залишкові – функціоналами. У загальному випадку напружений стан скляного тіла можна кількісно оцінити з використанням теорії тіл із внутрішніми змінними [3]. У цьому випадку вихідне фізичне співвідношення моделі має вигляд:

$$d\sigma_{ij} = 2\mu_0 de_{ij} + [\lambda_0 de_{kk} - (3\lambda_0 + 2\mu_0)(\alpha_g dT + \delta e_f + \delta e_0)]\delta_{ij}, \quad (1)$$

де α_g – коефіцієнт лінійного термічного розширення; μ_0, λ_0 – пружні константи; $e_{kk} = (e_{11} + e_{22} + e_{33}) / 3$; $\delta e_f, \delta e_0$ – залишкові структурні й неструктурні деформації, δ_{ij} – символ Кронеккера.

Зауважимо, що наведене співвідношення (1) у приростовому вигляді можна використати лише для конкретно вибраного шляху термомеханічного навантаження, коли вдасться встановити зв'язок між вільним об'ємом, залишковими напруженнями та параметрами процесу навантаження.

Як приклад, розв'язано задачу про визначення залишкових структурних напружень у скляній пластині з використанням експериментально встановлених залежностей температури склування і вільного об'єму від швидкості охолодження у кожній точці тіла [2].

На рис. 1, 2 подано графіки розподілу температури склування T_g^* та напружень у пластині товщиною 22 мм для різних практично реалізованих значень тепловіддачі: 10 (1), 30 (2), 50 (3), 100 (4) та 200 (5) Вт/м²/К (початкова температура $T_0 = 1200$ К).

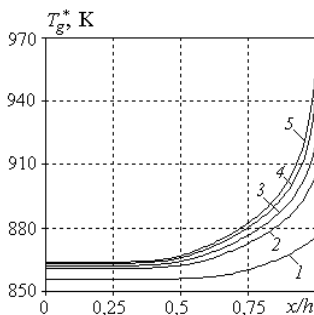


Рис. 1

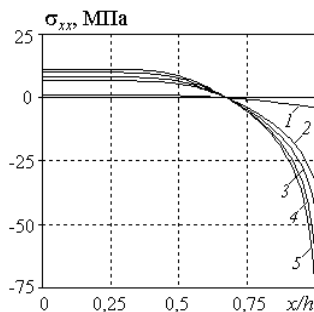


Рис. 2

Зазначимо, що максимальні структурні напруження стиску за абсолютним значенням удвоє більші за розтягальні. Загалом структурні напруження у 4–5 разів менші, ніж гартувальні. Їх слід враховувати при оцінці міцності виробів зі скла, особливо за наявності зовнішніх кінематичних обмежень, коли навіть за відносно невеликих швидкостей охолодження вони можуть істотно зростати.

1. Бартенев Г.М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. – М.: Госстрой, 1960. – 166 с.
2. Сандитов Д.С., Бартенев Г.М. Физические свойства неупорядоченных структур. – Новосибирск: Наука, 1982. – 248 с.
3. Coleman B.D., Gurtin M.E. Thermodynamics with Internal State Variables // J. Chemical Physics. – 1967. – Vol. 47, № 2. – P. 597-613.

STRUCTURAL COMPONENT OF STRESSES IN GLASS SOLID SUBJECTED TO CONTINUOUS COOLING

The model for the quantitative description of the free volume formation at non-homogenous cooling is used for research of the processes parameter influence on the residual structural stresses distribution in the glass plate. Maximal tensile and compressible stresses increase by rising of the temperature cooling began, increasing cooling speed.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ РОСТОВЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ В ЖИВЫХ СИСТЕМАХ

Валерий Лохов, Юрий Няшин, Василий Тропин

*Пермский национальный исследовательский политехнический ун-т,
Комсомольский пр-т, 29, г. Пермь, 614990, Российская Федерация*

Известно, что в органах и тканях живого организма постоянно происходят процессы, приводящие к развитию напряжений, например, это относится к процессам филогенеза, онтогенеза, резорбции, перестройки, различным оперативным вмешательствам. Важную роль играют также температурные напряжения, вызванные нагревом или охлаждением органов и тканей или их искусственных заменителей. Во многих работах обсуждается роль ростовых деформаций, возникающих в живых системах, начиная с самого начала их развития (например, для человека напряжения возникают уже в период внутриутробного развития).

Для анализа и управления напряжениями в живых системах

удобно ввести подход, предложенный Рейсснером в 1931 г. [2, 3].

В рамках теории геометрически линейных деформаций тензор деформации в каждой точке тела $\boldsymbol{\varepsilon}$ представляется как сумма тензоров упругой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ и собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^*$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (1)$$

причем тензор упругой деформации связан с тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ законом Гука

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2)$$

где $\mathbf{C}^{-1}$ – тензор упругой податливости.

Под собственной деформацией можно понимать температурную деформацию, пластическую деформацию, деформацию ползучести, деформацию при фазовых превращениях, различные деформации в живых тканях (при росте, перестройке и т.д.). Аналогичные подходы разрабатываются в монографиях [1].

В работах авторов данного сообщения разработана теория управления напряжениями с помощью собственных деформаций.

Она основана на теореме о разложении собственной деформации на две составляющие: одна из них не вызывает напряжений в системе, другая не вызывает деформаций (так как упругая деформация уравнивается собственной деформацией) [1].

А именно, имеет место соотношение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}_u^* + \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$ – собственная деформация, не вызывающая напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$ – собственная деформация, не вызывающая деформаций.

Указанное разложение собственной деформации позволяет строить эффективные алгоритмы независимого управления напряжениями и деформациями (или перемещениями) в живых и неживых системах.

Для учета ограничений, накладываемых природой собственных деформаций, представим собственную деформацию, которую возможно создать в системе, в следующей форме:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \sum_{k=1}^K a_k \boldsymbol{\xi}_k, \quad (4)$$

где коэффициенты a_k и элементы $\boldsymbol{\xi}_k$ определяются природой собственной деформации и технологическими ограничениями. Например, однородный нагрев изотропного тела дает собственную деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}^* = a_1 \boldsymbol{\xi}_1$, где $a_1 = \alpha T$, $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{I}$ – единичный тензор.

В данном сообщении, в качестве примера описывается решение задачи об управлении ростовыми деформациями при лечении врожденной расщелины твердого неба. Целью управления является создание заданной формы небного свода и уменьшение величины расщелины во время ортопедического лечения. Если лечение проведено успешно, то проводится хирургическое сшивание фрагментов. Чем ближе окажутся разобщенные фрагменты друг к другу, тем безопаснее и успешнее будет хирургическое вмешательство. Отметим, что ростовые деформации должны быть созданы таким образом, чтобы они не вызывали остаточных напряжений во фрагментах. Таким образом, описанная задача может быть решена с применением теории независимого управления ростовыми деформациями.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: В-во «СПО-ЛОМ», 2003. – 320 с.
2. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM. – 2005. – **85**, No. 8. – P. 557-570.
3. Reissner H. Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // ZAMM. – 1931. – **11**, No. 1. – P. 1-8.

MODELING AND CONTROL OF GROWTH STRAIN IN LIVING SYSTEMS

The theoretical approach for independent stress and deformation control by eigenstrain is developed based on the concepts of stress-free and deformation-free eigenstrain distributions. The restriction caused by physical background of eigenstrain are considered and suggested to be written as a linear combination. The obtained theory is applied for growth strain control at healing of congenital cleft of the child hard palate.

УДК 539.3

РАВНОПРОЧНЫЕ ПО ТРЕСКА ГИБРИДНЫЕ ДИСКИ ГАЗОВЫХ ТУРБИН

Юрий Немировский

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090, Российская Федерация*

Вращающиеся диски являются наиболее ответственными элементами газотурбинных двигателей, парогазовых энергетических установок и гидротурбинных систем. В последние десятилетия актуальной становится проблема оптимального проектирования, связан-

ная с созданием экономически выгодных установок с требуемой степенью надежности их эксплуатации. Улучшение требуемых качеств может быть достигнуто в результате целевого распределения материалов, управления анизотропией и неоднородностью их свойств, создания предварительных полей напряжений, реализации специальных структур армирования и рядом других способов. При создании надежных конструкций, предназначенных для длительной эксплуатации и обеспечивающих экономию расхода материалов, естественным выступает требование достижения уровня деформирования всех материалов в конструкции соответствующих пределов упругого состояния. Для армированных дисков и пластин решение соответствующей задачи при использовании критерия Мизеса было рассмотрено в [1]. Здесь рассмотрены радиально слоистые и поперечно слоистые конструкции при условии пластичности Треска.

1. Радиально слоистые диски. Для i -го слоя ($x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $x = r/R$) из условия пластичности Треска

$$\varepsilon_{2i} + \nu_i \varepsilon_{1i} = \frac{\sigma_{0i}}{E_i} (1 - \nu_i^2), \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{2i} = \frac{u_i}{x}, \quad \varepsilon_{1i} = \frac{du_i}{dx} \quad \left(u_i = \frac{\bar{u}_i}{R}, \quad x = \frac{r}{R} \right) \quad (1.2)$$

получим уравнение для радиального перемещения $u_i(x)$

$$\frac{du_i}{dx} + \frac{1}{\nu_i} \frac{u_i}{x} = g_i = \frac{\sigma_{0i} (1 - \nu_i^2)}{E_i \nu_i}. \quad (1.3)$$

Его решение

$$u_i(x) = e^{-F_i(x)} \left[U_{0i} + g_i \int_{x_{i-1}}^x e^{F_i(x)} dx \right], \quad F_i(x) = \ln \left(\frac{x}{x_{i-1}} \right)^{1/\nu_i}.$$

Тогда для радиальных напряжений получим

$$\sigma_{1i}(x) = \Psi_i(x) = \frac{E_i}{(1 - \nu_i^2)} (\varepsilon_{1i}(x) + \nu_i \varepsilon_{2i}(x)). \quad (1.4)$$

Из уравнения равновесия будем иметь следующие уравнения для профиля $h_i(x)$:

$$\frac{1}{h_i(x)} \frac{d}{dx} (\Psi_i(x) h_i(x)) + \frac{\Psi_i(x) - \sigma_{0i}}{x} + \rho_i v^2 x = 0 \quad \left(v^2 = \frac{\rho_0^0 R_0^2 \omega^2}{g \sigma_0^0 h_0^2}, \quad h_i = \frac{\bar{h}_i}{h_0} \right).$$

Его решение

$$h_i(x) = h_{0i} \exp(-\Phi_i(x)), \quad \Phi_i(x) = \int_{x_i}^x Z_i(x) dx,$$

$$Z_i(x) = \frac{1}{x\Psi_i(x)} \left[\rho_i v^2 - \sigma_{0i} + \frac{d}{dx}(x\Psi_i(x)) \right].$$

Константы интегрирования u_{0i} определяются из граничного условия на валу и условий непрерывности радиальных перемещений

$$u_i(x_{i+1}) = u_{i+1}(x_{i+1}).$$

В случае гладкого сопряжения профилей составляющих элементов радиально-слоистого диска постоянные h_{0i} выражаются через h_{01} из условий

$$h_i(x_{i+1}) = h_{i+1}(x_{i+1}).$$

При этом координаты раздела материалов x_i определяются из условий непрерывности радиальных напряжений

$$\sigma_i(x_{i+1}) = \sigma_{i+1}(x_{i+1}).$$

Окончательно постоянная h_{01} будет определена из условия

$$h_n(1)\sigma_n(1) = kv^2,$$

где k – коэффициент лопаточной нагрузки. Если же границы x_i распределения материалов заранее заданы, то на этих границах из условия непрерывности радиальных усилий должны выполняться равенства для скачков профиля

$$\sigma_{1i}(x_i)h_i(x_i) = \sigma_{1,i+1}(x_i)h_{i+1}(x_i).$$

2. Поперечно слоистые диски. Для поперечно слоистых дисков будем рассматривать конструкции с симметричным расположением материалов относительно срединной плоскости диска с постоянными толщинами слоев внутреннего набора и профилированными наружными слоями усиливающих или защитных покрытий. Тогда при упругом деформировании материалов связь между усилиями и деформациями в таком слоистом диске будет определяться равенствами

$$N_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2, \quad N_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{11}\varepsilon_2, \quad (2.1)$$

$$a_{11} = 2 \sum_{j=1}^m h_j E_j (1 - \nu_j^2)^{-1}, \quad a_{12} = 2 \sum_{j=1}^m h_j E_j \nu_j (1 - \nu_j^2)^{-1}. \quad (2.2)$$

В этих выражениях $h_m = h_m(x)$, а остальные толщины $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$ известны и постоянны. Равнопрочность усиливающих слоев будем определять по критерию Треска. Тогда для перемещений $u(x)$ и деформаций $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)$ будем иметь выражения:

$$u(x) = e^{-F_m(x)} \left[u_0 + g_m \int_{x_0}^x e^{F_m(x)} dx \right], \quad (2.3)$$

$$F_m(x) = \ln \left(\frac{x}{x_0} \right)^{1/\nu_m}, \quad g_m = \frac{\sigma_{0m} (1 - \nu_m^2)}{E_m \nu_m}, \quad \varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{x}. \quad (2.4)$$

Постоянная u_0 определяется из граничных условий на валу $x = x_0$. В случае жесткого вала будем иметь $u_0 = 0$. Следовательно деформации $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)$ будут полностью известны и усилия N_1, N_2 содержат одну неизвестную функцию $h_m(x)$, для нахождения которой используется уравнение равновесия

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{N_1 - N_2}{x_m} + \nu^2 x H(x) = 0, \quad H(x) = 2 \sum_{j=1}^{x_m} h_j \rho_j, \quad \left(\rho_j = \frac{\bar{\rho}_j}{\rho_0} \right).$$

Поскольку все входящие в это уравнение величины, кроме $h_m(x)$, известны, то для определения $h_m(x)$ мы получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого нетрудно выписать. Возникающая при интегрировании постоянная будет определяться из условия

$$N_1(1) = \kappa \nu^2.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-90400 Укр_а.

1. *Немировский Ю.В., Богомолова О.А.* Рациональное и оптимальное проектирование мозаичных дисков и пластин // *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Доклады III Всероссийской научной конференции* (Томск, 2-4 окт. 2002 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – С. 162-171.

DURABLE POWER FOR TRESCA HYBRID DRIVES GAS TURBINES

Based on the criterion Tresca the analytical solutions of the problem of designing a full-strength elastic longitudinal cross-layered and layered turbine rotating disks are constructed.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЙ ПАТОЛОГИЙ ЗУБОЧЕЛЮСТНОЙ СИСТЕМЫ НА МОЗГОВОЕ КРОВООБРАЩЕНИЕ

Юрий Няшин, Валерий Лохов

*Пермский национальный исследовательский политехнический ун-т,
Комсомольский пр-т, 29, г. Пермь, 614990, Российская Федерация*

Концепция «Виртуальный физиологический человек» начала развиваться сначала в США, а затем в странах Западной Европы с конца XX столетия (*Virtual Physiological Human, VPH*). Согласно этой концепции организм человека рассматривается как сложная многоблочная биомеханическая система. В состав этой системы входят все подсистемы организма человека (сердечно-сосудистая система, система дыхания, нервная система, зубочелюстная система, билиарная система, опорно-двигательный аппарат и др.). Каждая из указанных подсистем состоит из ряда других подсистем различного уровня сложности (от макроуровня до наноуровня).

Цель развития концепции «Виртуальный физиологический человек» состоит в детальном исследовании всех подсистем организма человека и установлении количественных и качественных связей между ними. Развитие данной концепции позволит значительно ускорить и улучшить диагностику, с также найти оптимальный метод лечения каждого индивидуального пациента, включая проведение виртуальной операции.

В предлагаемом исследовании особое внимание уделяется анализу структуры и физиологических особенностей зубочелюстной системы человека в динамике ее развития, начиная от рождения и далее в течение всей жизни человека.

Анализируется влияние биомеханического давления на процессы филогенеза и онтогенеза в зубочелюстной системе, в частности, показано развитие различных элементов системы в норме и при различных патологиях.

Особенно важным элементом исследования в рамках поставленной проблемы является анализ связи патологических изменений в зубочелюстной системе и в других системах организма.

Показывается связь неправильной окклюзии (неправильного прикуса) с нарушениями шейного отдела позвоночника и нарушениями в системе кровообращения.

Очень важным и интересным объектом исследования с точки зрения биомеханики и связей с другими системами организма является парный височно-нижнечелюстной сустав. Этот сустав является последним с точки зрения эволюции человека как биологического вида и

самым сложным с точки зрения его функционирования. Этот сустав иногда называют рыцарем суставов человека. Важными элементами суставов являются два диска сустава. Каждый из них представляет собой пористое (двухфазное, твердо-жидкое) тело. Диски суставов являются аваскулярными (лишенными кровеносных сосудов) и питание их производится не за счет кровеносных капилляров, а за счет втекающей и вытекающей внутритканевой жидкости.

Математическое моделирование дисков производится с помощью решения краевой задачи пороупругости (в постановке М. Био [1]). Течение жидкости в порах губчатого скелета происходит согласно закону Дарси. Описывается эксперимент для определения констант, входящих в определяющие соотношения пороупругости, в частности коэффициента проницаемости Дарси.

В заключение, наиболее подробно анализируются связанные патологии в зубочелюстной системе (начиная с развития патологии при неправильном искусственном вскармливании детей раннего возраста), нарушения усилий в мышцах лицевой области, нарушения в распределении в дисках височно-нижнечелюстных суставов, патологические деформации и смещения в дисках суставов, деформации и нарушения проводимости внутренней сонной артерии, нарушения внутримозгового кровообращения, включая инсульт сосудов головного мозга.

Описываются биомеханические подходы (для численного моделирования соответствующих начально-краевых задач биомеханики применяется метод конечных элементов), позволяющие улучшить диагностику и лечение описанных заболеваний.

1. Biot M.A. Mechanics on Incremental Deformation. – New York: Wiley, 1965. – 504 p.

INVESTIGATION OF INFLUENCES OF PATHOLOGIES IN DENTOFACIAL SYSTEM ON BRAIN BLOOD CIRCULATION

Because of complicated hierarchy of biological objects forming interconnected functional systems, the human body is one of the complex objects of the scientific investigations. Technological breakthrough in the diagnostics and describing of in vivo processes and also development of mathematical models made possible an opportunity to obtain realistic simulations of normal and pathological events in the human body. The project "Virtual Physiological Human" is one of actual trends today in the contemporary science. The multi-disciplinary project unites mathematicians, biomechanicians, physicists, biologists, doctors, biochemists, and other specialists from different countries of the world. The human dentofacial system is connected within the framework of this new approach. In given work, the connection of the dentofacial system with other systems of the human causes the dentofacial system disturbance appearance, and possible consequences are considered. The following pathology is analyzed: deformation of the temporomandibular joint and internal carotid artery resulting in disturbance of brain blood circulation.

ОПТИМІЗАЦІЯ ОБОЛОНКОВИХ ВІБРОЗАХИСНИХ ПРИСТРОЇВ ЗА КРИТЕРІЕМ МАКСИМАЛЬНОГО ПОГЛИНАННЯ ЕНЕРГІЇ ЗОВНІШНІХ ВПЛИВІВ

Ігор Попадюк, Іван Шацький, Василь Шопа, Андрій Величкович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Івано-Франківський відділ,
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна;
Івано-Франківський національний технічний ун-т нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна*

Проблема захисту машин, механізмів і споруд, а також обслуговуючого персоналу від шкідливого впливу вібрацій є актуальною як в технічному, так і у соціальному розумінні. Авторами розроблені перспективні конструкції віброізоляторів, серед яких чільне місце належить оболонковим пружним елементам з деформівним заповнювачем. При механіко-математичному моделюванні їх поведінки в умовах немонотонного навантаження виникає клас конструктивно нелінійних неконсервативних мішаних контактних задач про фрикційну взаємодію тонких оболонок з деформівним заповнювачем [1]. У межах цього класу відбулися перші спроби оптимізації конструкцій оболонкових пружних елементів за критерієм максимальної податливості.

Робота присвячена проблемі оптимізації оболонкових віброзахисних пристроїв за критерієм максимального поглинання енергії зовнішніх впливів. За приклад обрано базову конструкцію (рис. 1). Пружний циліндр, радіус якого R і довжина $2a$, поміщений в оболонку завтовшки h_o . Заповнювач стискається на торцях абсолютно жорсткими гладкими поршнями, до яких прикладене зовнішнє немонотонне за часом навантаження Q . Формулювання мішаної задачі фрикційного контакту та аналітичний опис діаграми циклічного деформування (рис. 2) представлені в роботі [2]. Для ілюстрування за приклад обрано систему з параметрами $h_o/R = 0.1$, $E/E_o = 0.001$, $f = 0.3$, $\nu = 0.499$, $\nu_o = 0.3$, $a/R = 2$. Тут E , ν , E_o , ν_o – фізичні константи матеріалів заповнювача та оболонки. Зведену розсіяну енергію $\dot{\Psi}$ визначено як площу петлі конструкційного гістерезису, віднесену до енергії пружного деформування консервативної системи. Графік залежності величини $\dot{\Psi}$ від коефіцієнтів сухого тертя f та асиметрії циклу навантаження s наведено на рис. 3. Зі збільшенням коефіцієнта тертя пари заповнювач-оболонка кількість розсіяної за цикл

енергії спершу зростає, набуває екстремуму і далі поступово спадає. Встановлено, що функція $\tilde{\Psi}$ сягає максимального значення за пульсуючого циклу навантаження ($s = 0$) при значенні коефіцієнта сухого тертя $f = 0.26$. Існування екстремуму пояснюється тим, що у системах із сухим позиційним тертям розподіл сил тертя залежить від деформацій контактуючих елементів (тут це заповнювач і оболонка), а деформації, у свою чергу, залежать від сил тертя. Такий тісний взаємозв'язок і визначає специфічні, часто інтуїтивно непередбачувані особливості поведінки подібних конструкцій. У даній ситуації збільшення коефіцієнта тертя f призводить до зменшення області взаємного проковзування оболонки і заповнювача, а отже, і до зменшення конструкційного розсіювання енергії, яке відбувається тільки у цій області.

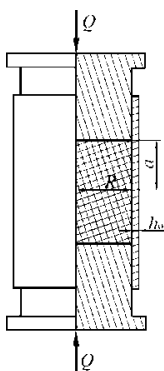


Рис. 1

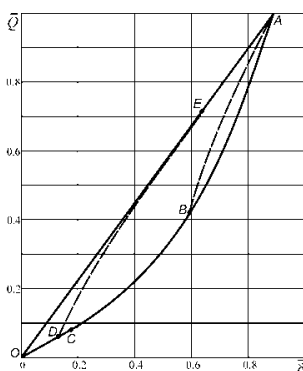


Рис. 2

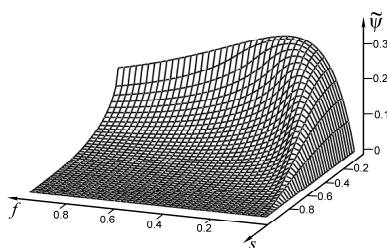


Рис. 3

Таким чином, у роботі реалізовано ідею оптимізації оболонкових віброзахисних пристроїв шляхом визначення потрібних трибологічних властивостей контактуючих пар.

1. Попадюк І.Й., Шацький І.П., Шона В.М. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.
2. Попадюк І.Й., Шацький І.П., Шона В.М. Фрикційний контакт циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні. – Доп. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 59-64.

OPTIMIZATION OF SHELL VIBROPROTECTIVE DEVICES BY THE CRITERION OF MAXIMAL ABSORPTION OF EXTERNAL INFLUENCES ENERGY

The results of the investigation of non-monotonous loading of an deformable filler in the momentless cylindrical shell have been used for the analysis of dependence of size of absorbed energy from the coefficient of dry Coulomb friction.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ГНУЧКИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Інга Сафронова

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
пр-т Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

Гнучкі оболонки обертання часто використовуються як пружні елементи багатьох конструкцій в аерокосмічній, енергетичній, приладобудівній і нафтогазопереробній промисловості та інших галузях. Такими конструктивними оболонковими елементами є, зокрема, мембрани синусоїдального профілю, що використовуються як чутливі елементи багатьох вимірювальних приладів, сильфони як компенсатори теплових переміщень трубопроводів та ін. [1].

За своїм функціональним призначенням такі оболонки мають, як правило, спеціальну і досить складну форму меридіану та великі переміщення. Розрахунок параметрів напружено-деформованого стану таких конструктивних елементів пов'язаний з необхідністю розв'язання нелінійних крайових задач для системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [2].

У цій роботі розв'язування таких задач пропонується здійснювати методом послідовних наближень (за нульове наближення обирається розв'язок лінійної задачі) шляхом лінеаризації системи, де на кожному кроці наближень нелінійні складові долучаються як до коефіцієнтів при невідомих (аналог методу змінних параметрів пружності), так і до складових навантаження (аналог методу додаткових навантажень).

Інтегрування отриманої лінеаризованої крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами здійснюється методом прогонки з ортогоналізацією за С.К. Годуновим.

Слід зазначити, що кількість розв'язувань лінеаризованих систем в загальній схемі методу простих послідовних наближень може виявитись досить значною, а сам алгоритм розрахунку таких нелінійних систем – трудомістким, тому питання про зменшення кількості таких розрахунків є досить важливим для ефективної практичної реалізації методу.

Для прискорення збіжності ітераційного процесу розрахунку напружено-деформованого стану таких оболонкових елементів в роботі пропонується застосування низки окремих підходів, що, зокрема, ґрунтуються на використанні апроксимації значень нелінійних складових рівнянь стану таких оболонок для кожного (деяких) наступних кроків ітераційного процесу методом імітаційного прогнозування [3],

а також на використанні схеми Ейткена-Стеффенсона [4], модернізованого алгоритму методу Адамса, методу релаксації та ін. Проведені відповідні порівняння.

Підхід реалізовано у вигляді спеціально розробленого програмного продукту. Його апробація здійснена шляхом розв'язання досить широкого кола задач механіки. Це, зокрема, відшукання оптимальних параметрів динамометричної шайби, числові дослідження великих прогинів та вибору раціональних параметрів мембран синусоїдального профілю та гофрованих оболонок обертання як компенсаторів переміщень та ін.

Проведено числовий експеримент з метою порівняльного аналізу ефективності застосовуваних методик прискорення збіжності.

1. *Андреева Л.Е.* Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1962. – 455 с.
2. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. *Bulakajev P.I., Dzjuba A.P.* An algorithm for the prediction of search trajectory in nonlinear programming problems optimum design // Structural Optimization: Research J. of Int. Society of Struct. and Multidisciplinary Optimiz. (ISSMO, Germany). – Springer-Verlag. – 1997. – V. 13, № 2, 3. – P. 199-202.
4. *Шаманский В.Е.* Методы решения краевых задач на ЭЦВМ. Часть 2. – К.: Наук. думка, 1996. – 242 с.

BEHAVIOR RESEARCH OF FLEXIBLE ELASTIC SHELL STRUCTURE ELEMENTS

The results of numerical experiments comparative analysis of the proposed methods accelerate the convergence of the solution of nonlinear boundary value problems are analyzed.

УДК 539.3

ОЦІНКА ДОВГОВІЧНОСТІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ПРИ БАГАТОШАРОВОМУ НАПЛАВЛЕННІ І ПОДАЛЬШОМУ ЦИКЛІЧНОМУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ігор Сенченков, Ольга Червінко, Сергій Якименко

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна;*

*Кіровоградський національний технічний університет,
пр-т Університетський, 8, м. Кіровоград, 25006, Україна*

Робочі поверхні деталей для гарячої обробки металу такі, як прокатні валки, ролики машин неперервного розливу заготовок,

штампи гарячого деформування металу тощо, зміцнюються методом багатошарового наплавлення і піддаються в процесі експлуатації температурному і механічному циклічному навантаженню [1].

Сучасний рівень моделювання таких процесів відображений в роботах [1, 2]. В цій роботі викладена розрахункова методика оцінки довговічності деталей на прикладі штампу гарячого деформування металу.

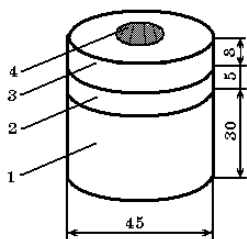


Рис. 1

Схема наплавленого циліндра наведена на рис. 1. Розміри наведені в мм, позначки 1, 2 і 3 відповідають сталям: основний – 40Х, прошарку – 08кп, зовнішнього шару – 25Х5ФМС.

На торці $z = H$ в колі характерного радіуса $\eta_0 < R$ (область 4 на рис. 1) прикладається циклічне термомеханічне навантаження, яке визначається такими граничними

умовами:

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_0(t) \exp \left[-(r / \eta_0)^2 \right] \quad (0 < r < \eta_0),$$

$$\sigma_{zz} = -p_0 \sigma(t) \left[1 - (r / \eta_0)^2 \right]^{1/2}, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (0 < r < \eta_0),$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sin \pi t / t^* & nT < t < nT + t^*, \\ 0 & nT + t^* < t < (n+1)T; \end{cases}$$

де t^* і T – час дії і період навантаження; p_0 – інтенсивність навантаження. Циліндр знаходиться на гладкій основі, а бічна поверхня вільна від навантаження і конвективно охолоджується.

Задача розв'язується з використанням єдиного підходу, викладеного в роботі [1]. Довговічність в кожній точці оцінюється за допомогою універсального рівняння Менсона, яке для багатоциклової втоми зводиться до такого

$$\lg N = 8,33 \lg \left((\sigma_B - \sqrt{3} s_{im}) / s_{ia} \right),$$

де $\sigma_B(\theta)$ – тимчасовий опір, який розраховується для максимального значення температури в циклі в кожній точці, s_{ia} , s_{im} – амплітудне та середнє значення інтенсивності дотичних напружень.

На рис. 2 а і 2 б наведені осьові ($r = 0$, $z > 0$) розподіли довговічності при $p_0 = 500 \text{ МПа}$ і різних значень максимальної температури в циклі на торці. Криві на рис. 2 а відповідають випадку наплавлення без прошарку, а рис. 2 б – наплавленню з прошарком із сталі 08кп.

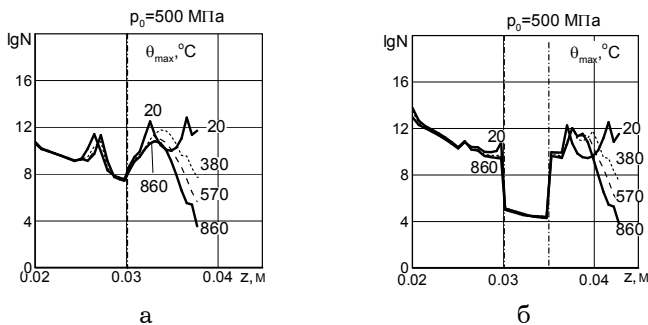


Рис. 2

Встановлено, що при підвищенні температури циклу слабкою ланкою є зовнішній шар, а при малих температурах (квазімеханічний цикл) – прошарок або основний метал. Розвинута методика дозволяє на основі чисельного моделювання надати технологам рекомендації по критерію довговічності щодо матеріалів шарів та технології наплавлення, виходячи з параметрів експлуатаційного навантаження.

1. Рязцев И.А., Сенченков И.К. Теория и практика наплавочных работ. – Киев: Экотехнология, 2013. – 400 с.
2. Radaaj D. Welding residual stresses and distortion. Calculation and measurement. – Dusseldorf: DVs Verlag GmbH, 2003. – 396 p.

AN EVALUATION OF ENDURANCE OF CYLINDRICAL BODIES UNDER MULTILAYER SURFACING AND THE FOLLOWING CYCLIC THERMOMECHANICAL LOADING

An approach of numerical estimation of thermomechanical cyclic endurance of surfaced cylindrical bodies is developed.

УДК 519.681.5

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ ЗАСОБІВ ВИКОНАННЯ ВИСОКОПРОДУКТИВНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГОРИТМІЧНО СКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Михайло Яджак

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Під алгоритмічно складними задачами (АСЗ) будемо розуміти за-

дачі, чисельні алгоритми розв'язання яких потребують значних часових затрат, що зумовлені як виконанням великої кількості арифметичних та обмінних операцій, так і пошуком та відбором вхідних даних. Такі задачі виникають унаслідок врахування якнайбільшої кількості параметрів для забезпечення належної точності математичного моделювання процесів та явищ, які досліджуються у різних галузях науки, зокрема, в механіці, матеріалознавстві, астрофізиці, геофізиці, економіці, соціології, кліматології, метеорології [2] тощо.

Для багатьох із АСЗ порівняно з актуальною проблемою зменшення часу їх чисельного розв'язання загалом, більш важливою є проблема розв'язання кожної з цих задач за наперед заданий час. Очевидно, що основним підходом до вирішення наведених проблем є розроблення паралельних алгоритмів, орієнтованих на реалізацію на відповідних високопродуктивних обчислювальних системах сучасної архітектури. У цьому випадку дослідження слід починати з виявлення потенційних можливостей розв'язуваної задачі стосовно розпаралелювання. Далі потрібно побудувати паралельний алгоритм, оптимальний за швидкістю [1, 4] у деякому заданому класі алгоритмів, а потім згаданим алгоритмом скористатися залежно від мети досліджень та наявних (доступних) обчислювальних засобів. Очевидно, що такий паралельний алгоритм повинен бути добре масштабованим, тобто без особливих затрат легко адаптовуватися для заданого обсягу (кількість ядер, обчислювальних вузлів та блоків пам'яті; загальний обсяг пам'яті системи, обсяг пам'яті окремого вузла) апаратних засобів.

У разі збільшення розмірності вхідних даних (що, зазвичай, дуже часто відбувається на практиці) можна, маючи достатні обчислювальні ресурси, сформувані оптимальну конфігурацію паралельної системи для забезпечення потрібного часу виконання обчислень.

Для розв'язання АСЗ найбільш поширеними та доступними зараз є багатоядерні комп'ютери, кожен з яких – це спрощений варіант паралельної обчислювальної системи зі спільною пам'яттю (SMP-системи) [2]. Процесор такого комп'ютера може містити 2, 4, 6, 8, 12, 16 ядер. У цих системах найпростіше організовано обмін інформацією між процесами, що виконуються на різних ядрах, а саме – через спільну пам'ять. Головним недоліком тут є порівняно невелика кількість ядер, тобто такі обчислювальні системи погано масштабуються.

Згаданий недолік легко усувається в кластерних системах, які є дешевим варіантом систем масового паралелізму (MPR-систем). Кластерні системи добре масштабуються, тому загальна кількість ядер у них може складати сотні і більше одиниць. У таких системах обмін інформацією між обчислювальними вузлами є доволі тривалою операцією, тому під час організації обчислень кількість цих обмінів потрібно мінімізувати. При цьому комунікаційна мережа, що з'єднує

обчислювальні вузли кластера, повинна забезпечувати достатню швидкість обміну.

Зараз в Україні, в багатьох науково-дослідних інститутах Національної Академії наук та ВУЗах, є кластерні системи різної продуктивності, які входять до національної грид-інфраструктури [3]. Найпотужніші із них розташовані в Києві (Інститут кібернетики НАН України, Інститут теоретичної фізики НАН України, Національний технічний університет «Київський політехнічний інститут»), Львові (Інститут фізики конденсованих систем НАН України), Харкові (Інститут сцинтиляційних матеріалів НАН України, Науково-технологічний комплекс «Інститут монокристалів» НАН України, Фізико-технічний інститут низьких температур НАН України). Очевидно, що установа, в якій створено грид-вузол, має можливість залучати для виконання високопродуктивних обчислень ресурси (інколи більш потужні за свої) інших установ – учасників гриду. Зауважимо, що грид-інфраструктура разом із обчислювальними ресурсами передбачає спільне використання прикладного програмного забезпечення, даних експериментів та вимірювань з різних галузей науки. З цієї метою грид залучає також сховища даних значного обсягу.

Отже, зараз в Україні є реальні можливості для широкого застосування сучасних обчислювальних засобів з метою розв'язання АСЗ у різних галузях наукових досліджень.

1. *Вальковский В.А.* Распараллеливание алгоритмов и программ. Структурный подход. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
2. *Параллельные вычисления.* [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.parallel.ru.
3. *Український національний грид.* [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.ung.in.ua.
4. *Яджак М.С., Тютюнник М.И.* Оптимальный алгоритм решения задачи цифровой фильтрации с использованием адаптивного сглаживания // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 142-151.

THE USE OF MODERN MEANS OF EXECUTION HIGH PERFORMANCE COMPUTATIONS FOR SOLVING ALGORITHMIC COMPLEX PROBLEMS

The modern computational means for solving of algorithmically complex problems in the work are analyzed.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ АРМИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ПО КРИТЕРИЮ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ РАСХОДЕ ФАЗОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Андрей Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090, Российская Федерация*

В декартовой системе координат x_i рассмотрим композитное тело объема V , армированное в произвольных направлениях K семействами волокон. Параметры армирования k -м семейством волокон определяются плотностью ω_k и направляющими косинусами касательной к траектории армирования $l_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, K}$). Используя идею структурной модели армированного тела с одномерным напряженным состоянием в волокнах [1], получим следующие выражения для осредненных напряжений в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \omega_0 \sigma_{ij} + \sum_{k=1}^K \sigma_k \omega_k l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

где

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{nn}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = \overline{1, 3}),$$

$$\sigma_k = E_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \quad k = \overline{1, K}; \quad (2)$$

$$l_i^{(k)} l_i^{(k)} = 1, \quad k = \overline{1, K}; \quad (3)$$

σ_{ij} – напряжения в изотропном связующем; ε_{ij} , u_i – деформации композита и перемещения в нем; σ_k , ε_k – продольные напряжение и деформация в арматуре k -го семейства; μ , λ – параметры Ламе материала связующего; E_k – модуль упругости в арматуре k -го семейства; δ_{ij} – символ Кронекера; ω_0 – некоторая постоянная величина ($0 < \omega_0 \leq 1$), определяющая вклад связующего в средние напряжения в композиции; по повторяющимся индексам i, j, n производится суммирование от 1 до 3.

Известно, что при фиксированной структуре армирования (за-

данных $\omega_k, l_i^{(k)}$) потенциальная энергия упругих деформаций на истинных перемещениях достигает минимального значения [2]. Согласно этому будем разыскивать такую структуру армирования, которая обеспечит минимальное значение потенциальной энергии композитного тела (такое условие иногда называют оптимизацией по критерию интегральной податливости [3]). При этом потребуем, чтобы расход арматуры каждого семейства был фиксирован:

$$\iiint_V \omega_k dV = \Omega_k = V_k / V = \text{const} > 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (4)$$

где V_k – объемное содержание арматуры k -го семейства.

С учетом соотношений (1)-(4) и всего выше изложенного будем разыскивать минимум функционала

$$\begin{aligned} J = & \Pi_0 + \sum_{k=1}^K \Pi_k - A + \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\iiint_V \omega_k dV - \Omega_k \right) + \\ & + \sum_{k=1}^K \iiint_V \mu_k \left(\varepsilon_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)} - \varepsilon_k \right) dV + \sum_{k=1}^K \iiint_V \psi_k \left(l_i^{(k)} l_i^{(k)} - 1 \right) dV, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_0 = & \iiint_V \frac{\omega_0}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad \Pi_k = \frac{E_k}{2} \iiint_V \omega_k \varepsilon_k^2 dV \quad (k = \overline{1, K}), \\ A = & \oint_S \sigma_{ij} n_j u_i dS = \oint_S p_i u_i dS; \end{aligned} \quad (6)$$

S – поверхность, ограничивающая объем V ; n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к S ; p_i – компоненты внешней поверхностной нагрузки (массовые нагрузки не учитываются, хотя это и не принципиально); λ_k, μ_k, ψ_k – неопределенные множители Лагранжа, причем $\lambda_k = \text{const}$.

Согласно принятому критерию оптимального проектирования первая вариация функционала J должна быть равна нулю. Варьирование этого функционала по u_i с учетом (2), (6) приводит к уравнениям равновесия и граничным условиям в перемещениях для композитного тела в рамках структурной модели (1)-(3) (не будем их здесь приводить). Варьирование же функционала (5) с учетом (6) по параметрам армирования приводит к дополнительным равенствам

$$\delta \omega_k : \quad \iiint_V \left(\frac{E_k}{2} \varepsilon_k^2 + \lambda_k \right) \delta \omega_k dV = 0,$$

$$\delta l_i^{(k)} : \iiint_V \left(\mu_k \varepsilon_{ij} l_j^{(k)} + 2\psi_k l_i^{(k)} \right) \delta l_i^{(k)} dV = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, K}.$$

В силу произвольности вариаций $\delta \omega_k$, $\delta l_i^{(k)}$ отсюда следует

$$\frac{E_k}{2} \varepsilon_k^2 = -\lambda_k = \text{const}, \quad \varepsilon_k = \text{const}, \quad \sigma_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, K}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ij} l_j^{(k)} - \bar{\psi}_k l_i^{(k)} = (\varepsilon_{ij} - \bar{\psi}_k \delta_{ij}) l_j^{(k)} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (8)$$

где $\bar{\psi}_k(\mathbf{x}) = -2\psi_k(\mathbf{x}) / \mu_k(\mathbf{x})$; $\mathbf{x}$ – вектор места.

Равенства (7) означают, что в оптимальном проекте арматура должна быть равнонапряжена, а из (8) следует [2], что оптимальные траектории армирования совпадают с траекториями главных деформаций в композитном теле, т.е. из (7), (8) получаем $\bar{\psi}_k = \varepsilon_k = \text{const}$, $k = \overline{1, K}$. А значит при таком оптимальном проектировании нецелесообразно использовать более трех семейств арматуры ($K \leq 3$).

Следует подчеркнуть, что полученные результаты справедливы лишь в случае, когда поперечные сечения волокон переменны вдоль траекторий армирования. Впервые аналогичные результаты для пластин при армировании и нагружении их в плоскости были получены в [4].

Если же учитывается естественное для традиционных технологий создания современных композитов условие постоянства поперечных сечений волокон $\left(\omega_k l_i^{(k)} \right)_{,i} = 0$ ($k = \overline{1, K}$), то в (5) необходимо добавить дополнительные слагаемые, соответствующие этим дифференциальным ограничениям. Варьирование соответствующего функционала J по ω_k в этом случае приведет к равенствам, отличным от (7), т.е. при постоянстве поперечных сечений арматуры условие равнонапряженности волокон не гарантирует оптимальности проекта армирования.

Отказ от условия фиксированного расхода арматуры в проектируемом композитном теле (см. (4)) также приводит к тому, что условие равнонапряженности арматуры не обеспечивает оптимальность получаемого проекта. Изучение этих вопросов выходит за рамки данного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-90400-Укр_а).

1. Немировский Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // Прикладная механика и техническая физика. – 1969. – № 6. –

- С. 81-89.
2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
 3. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 224 с.
 4. Бушманов С.Б., Немировский Ю.В. Оптимальное армирование пластин при плоском напряженном состоянии // Прикладная механика и техническая физика. – 1983. – № 5. – С. 158-165.

**OPTIMAL SPATIAL REINFORCEMENT OF COMPOSITE ELASTIC BODY BY
CRITERION OF INTEGRAL PLIABILITY AT FIXED EXPENSES OF PHASE
MATERIALS**

УДК 539.3

**ОПТИМІЗАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ
НАПРУЖЕНЬ У ЗАДАНОМУ ПЕРЕРІЗІ ПІВПРОСТОРУ, ЩО
ПЕРЕБУВАЄ В СТАНІ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ**

Анатолій Ясінський, Ольга Єрохова

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Надійність роботи елементів та вузлів теплонавантажених конструкцій істотно залежить від їх напружено-деформованого стану, оскільки перевищення напруженнями чи переміщеннями допустимого рівня може привести до погіршення або втрати міцнісних і функціональних властивостей та виходу з ладу конструкції в цілому.

В роботі сформульовано та досліджено задачу оптимального керування за допомогою внутрішніх теплових джерел розподілом нестационарних температурних напружень у заданому перерізі півпростору, паралельному до граничної поверхні.

Розглядається півпростір, через граничну поверхню якого здійснюється конвективний теплообмін за законом Ньютона із довкіллям і який перебуває за умов плоского деформованого стану. Вибравши за функцію керування потужність внутрішніх теплових джерел, зосереджених у заданому перерізі $x = x_0$ ($x_0 \geq 0$, $x_0 = \text{const}$), паралельному до граничної поверхні півпростору, потрібно знайти таке керування $u(y, \tau)$, яке у кожен момент часу забезпечуватиме мінімальне значення функціоналу

$$J(u) = \max_{y \in [0, \infty)} |\sigma(x_1, y, \tau; u) - \varphi_*(y, \tau)|, \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

де $\sigma(x_1, y, \tau; u) = \sigma_{xx}(x_1, y, \tau, u) + \sigma_{yy}(x_1, y, \tau, u)$ – сумарні температурні напруження у заданому перерізі $x = x_1$ півпростору; $\varphi_*(y, \tau)$ – заданий розподіл сумарних напружень; σ_{xx}, σ_{yy} – компоненти тензора напружень; x, y, τ – безрозмірні просторові координати і час.

Використавши співвідношення, які пов'язують сумарні напруження σ з кожною із компонент тензора напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ [1], показано, що керування сумарними напруженнями σ забезпечує опосередковано керування кожною з компонент тензора напружень. Зокрема, забезпечення нульового розподілу сумарних напружень σ у заданому перерізі півпростору $x = x_1$ забезпечує нульовий розподіл кожної з компонент у цьому перерізі.

Припустивши існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності (1), тобто виконання рівності $\sigma(x_1, y, \tau; u) = \varphi_*(y, \tau)$, та використавши операторну залежність сумарних напружень від температурного поля [1]

$$\sigma(x, y, \tau) = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} (-T(x, y, \tau) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s T(\eta, \xi, \tau) e^{-s(x+\eta)} \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta), \quad (2)$$

а також температурного поля від факторів теплового навантаження

$$T(x, y, \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau t(\xi, \theta) G_1(\eta, y, s, \xi, \tau - \theta) d\theta d\xi ds + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau u(\xi, \theta) G_2(\eta, y, s, x_0, \xi, \tau - \theta) d\theta d\xi ds, \quad (3)$$

вихідна задача оптимізації зводиться до оберненої задачі термопружності [1, 2], яка описується двовимірним інтегральним рівнянням першого роду. Тут ν, α_T – коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення; E – модуль Юнга; R – деяка характерна довжина; $T(x, y, \tau)$ – безрозмірне температурне поле півпростору; $t(y, \tau)$ – безрозмірна температура довкільля.

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є та апроксимуючи шукану функцію лінійним сплайном за часом, побудовано та числово досліджено розв'язок отриманого рівняння.

1. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. Кушнір Р.М., Попович В.С., Ясінський А.В. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. В 5-ти т. / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. – Т. 5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с.

OPTIMIZATION OF THE UNSTEADY TEMPERATURE STRESSES IN A GIVEN SECTION OF HALF-SPACE IN A PLANE STRAIN STATE

The paper considers the statement and the solution of the optimal control problem, with internal heat sources, the temperature stresses of boundary surfaces in the case of half plane strain condition. The original optimization problem is reduced to the inverse problem of thermoelasticity. The integral Fourier transform in spatial coordinates and linear spline approximation of desired function in time are used for the solution of the problem. The numerical analysis of the solution's optimization problem behaviour is provided.

УДК 531.8+62-50

CALCULATION OF DYNAMICAL CHARACTERISTICS OF HUMAN GAIT WITH BELOW-KNEE PROSTHESIS

Bohdan Lytwyn, Myroslav Demydyuk, Victor Berbyuk

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova Str., 3-B, Lviv, 79060, Ukraine;*

*Chalmers University of Technology,
SE-412 96, Gothenburg, Sweden*

The perspective way of upgrading human lower extremities rehabilitation technologies is the development of effective methods for prosthetics results prognostication which are based on using the modern methods of mathematical design and computer science achievements. To achieve the rehabilitation effect it is necessary to perform the human gait characteristics of quantitative analysis, based on adequate mathematical models of human gait with prosthetic limbs and information of the experimental measuring.

The mathematical modeling problem of human gait with below-knee prosthesis over horizontal surface is investigated. The kinematic,

dynamic and energetic characteristics of the gait, based on mathematical model of human locomotor apparatus and experimental data of human gait, are determined. The experimental data of joint angles in hip, knee and ankle and reaction forces are obtained by biomechanical investigation in a sequence consisting of nearly 20 steps. The perturbations in experimental data are rejected by means of nonlinear digital filtration methods. The sequence of N steps reduced to double stride period and mean square domains (ε -tubes) of variations of joint angles and reaction forces have been built. The stiffness characteristics of ankle and metatarsal joints of the prosthesis device are also given from experimental investigation.

The human locomotor apparatus is modeled by system of 9-th rigid bodies. The model comprises trunk and two four-link legs (thigh, shank and two-link foot). The system moves due to interaction of gravity forces, walking surface reaction forces and control stimuli in the joints. We consider system's motion on double stride period $[0, T]$. The torques in prosthesis ankle and metatarsal joints $p(\gamma)$, $w(\varepsilon)$ are generated by means of prosthesis structure elastic flexibility (γ , ε – angles in corresponding prosthesis joints). A set of kinematical and dynamical constraints of lower extremities anthropomorphic movement is imposed on a system's motion law. The motion's dynamics of the model in vertical (sagittal) plane is described by the system of 7-th nonlinear differential equation of 2-nd order and 4 kinetostatics balance condition for inertia-free feet. In addition, the set of rhythmic, kinematic and dynamic restrictions and conditions of torque dynamical balance in prosthesis ankle and metatarsal joints are imposed [1-3].

The optimization approach based on energetic optimal principle of human locomotion is used for gait characteristics calculating. The human gait with below-knee prosthesis modeling problem is formulated as a nonlinear optimal control problem with restrictions imposed both on the phase coordinates and controlling stimuli and nondifferentiable (by Frechet) energetic functional.

Consider the following problem. Assume that we are given the steps length and duration, and variation domains for hip, knee and ankle joints angles and vertical and horizontal components of reaction forces (in the form, like $\xi^0(t) \leq \xi(t) \leq \xi^1(t)$, $t \in [0, T]$). The step length, duration and constraint functions ξ^0 , ξ^1 are obtained from human gait experimental data processing. Prosthesis stiffness characteristics $p(\gamma)$, $w(\varepsilon)$ are given also. It is required to determine control torques and corresponding system movement under given restriction minimizes energetic cost functional. In opposite to [1-3], the experimental tensor-metric data of supporting surface reaction is taking into account.

The numerical algorithm for approximate solving of the formulated optimal control problem is developed. This algorithm is based on the parameterization of generalized coordinates of the mechanical system by cubic smoothing spline, inverse dynamics problem conception and numerical methods of nonlinear mathematical programming. Original optimal control problem is reduced to the corresponding nonlinear mathematical programming problem. The real-coded genetics algorithms (RCGA) modification is developed for solving this problem. The key point of proposed RCGA modification is the use of consecutive order seven different crossover operators and four mutation operators, under which replacing parent chromosomes by offspring chromosomes is performing only when suitability of individuals increases.

The proposed algorithm of solving the human modeling problems is realized in the software system (for Windows environment), that allows entering model input parameters in automated mode and tuning the numerical scheme parameters. Moreover it allows saving and printing output characteristics in a form suitable for analysis (graphs, kinograms, and array of numerical data). Effectiveness of the developed software is confirmed by solving a number of human gait dynamic applied problems.

1. *Berbyuk V., Bostrom A., Lytwyn B., Peterson Bo.* Energy-Optimal Control of Bipedal Locomotion Systems // *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. 74-89.
2. *Berbyuk V., Demydyuk M., Lytwyn B.* Energy-Optimal Control of Under-actuated Bipedal Locomotion Systems // *Equation Chapter 1 Section 1 Proc. MULTIBODY DYNAMICS 2005: ECCOMAS Thematic Conference*. – Madrid (Spain), 2005. – P. 1-15.
3. *Victor E. Berbyuk, Miroslav V. Demydyuk, Bogdan A. Lytvyn.* Mathematical Modeling and Optimization of Walking of Human Being with Prosthesis of Crus // *J. Automation and Information Sciences*. – 2005. – Vol. 37, No. 6. – P. 46-60.

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

УДК 539.3

РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ РОСТУ ТРІЩИН ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ В ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА НЕЙТРОННОГО ОПРОМІНЕННЯ

Олександр Андрейків, Володимир Кухар, Надія Яворська

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

В структурних елементах (особливо тонкостінних) легководних реакторів (реакторів тиску (PWR) та реакторів кипіння (BWR)) виникають радіаційно індуковані корозійні тріщини, ріст яких може привести до небезпечної аварії. В зв'язку з цим в даній роботі на основі попередньої роботи авторів [3] зроблена спроба побудувати математичну модель для визначення періоду докритичного росту в тонкостінних елементах конструкцій тріщин високотемпературної повзучості за нейтронного опромінення.

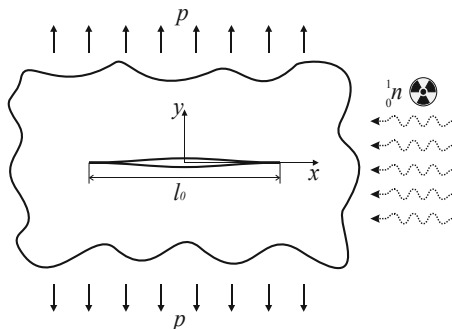


Рис. 1

Розглянемо пластину (рис. 1) з тріщиною довжини l_0 , що знаходиться під дією розтягуючого навантаження p , перпендикулярного до лінії тріщини, температурного та радіаційного полів.

Із балансу швидкостей зміни енергетичних складових процесу швидкість поширення тріщини запишеться так [3]:

$$dl / dt = \left[\partial W_p / \partial t \right]_{t=t_c} / (\gamma_c - \gamma_t), \quad l|_{t=0} = l_0, \quad l|_{t=t_*} = l_*, \quad (1)$$

де W_p – енергія пластичного деформування за час інкубаційного пе-

ріоду [1]; γ_t, γ_c – питомі енергії пластичного деформування та руйнування відповідно; l_*, t_* – критична довжина тріщини і період її докритичного росту.

Згідно досліджень [1, 4] залежність швидкості високотемпературної повзучості від нейтронного флюенса Φ можна подати як $\dot{\epsilon}(\Phi) = \dot{\epsilon}(0) + \beta \cdot \lambda_\Phi \Phi$, де величина $\lambda_\Phi \Phi$ визначає міру нейтронного пошкодження матеріалу. Записавши подібний вираз для швидкості розкриття вершини тріщини, а також розписавши всі компоненти рівняння (1), отримаємо наступне співвідношення:

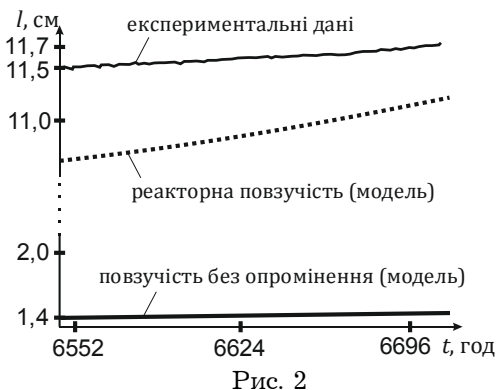
$$dl / dt = 2\alpha_0 \dot{\delta}_{It} (1 - \dot{\delta}_{It} / \dot{\delta}_c)^{-1} + 4\delta_c \alpha_\Phi \Phi_0, \quad l|_{t=0} = l_0, \quad l|_{t=t_*} = l_*, \quad (2)$$

яке з урахуванням макроскопічності тріщини можна записати як:

$$dl / dt = C_1 K_I^{2m} (K_C^2 - K_I^2)^{-1} + C_2 \Phi_0 K_I^2, \quad l|_{t=0} = l_0, \quad l|_{t=t_*} = l_*, \quad (3)$$

де C_1, C_2, m – константи.

Експериментальна перевірка моделі для сталі 316 проводилася на основі роботи [2], для зразків типу СТ на тестовому реакторі Halden (Норвегія). Як видно із результуючого графіка (рис. 2) модель (3) добре описала поведінку повзучої тріщини за нейтронного опромінення і підтвердила її коректність.



1. Gilbert E.R., Bates J.F. Dependence of irradiation creep on temperature and atom displacements in 20% cold worked type 316 stainless steel // Journal of Nuclear Materials – 1977 – Vol.65 – С.204–209.
2. Karlsen T.M., Bennett P., Hogberg N.W. In-Core Crack Growth Rate Studies on Irradiated Austenitic Stainless Steels in BWR and PWR Conditions in the Halden Reactor // Proceedings of the 12th International Conference on Environmental Degradation of Materials in Nuclear Power System: Water Reactors – 2005. – С.337–348.
3. Андрейків О.Є., Добровольська Л.Н., Яворська Н.В. Поширення в металевих матеріалах тріщин високотемпературної повзучості за дії водню // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2013.
4. Ибрагимов Ш.Ш., Курсанов В.В., Пятилетов Ю.С. Радиационные повреждения металлов и сплавов. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 131–133.

CALCULATION MODEL OF HIGH TEMPERATURE CREEP CRACK GROWTH IN THIN-WALLED STRUCTURAL ELEMENTS INFLUENCED BY HIGH TEMPERATURE NEUTRON IRRADIATION

Neutron irradiation and thermal creep influence on creep crack growth rate is considered. New calculation model based on energy rate approach for predicting creep crack growth dynamic in reactor structural materials subjected to in-core reactor operation is proposed. In-core components remaining life prediction is implemented. Good correlation between theoretical modeling and experimental data is obtained.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ЗАЦЕМЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО НЕЇ КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

Роман Андрійчук, Григорій Кіт

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Доповідь присвячена дослідженню термопружного стану півбезмежного тіла із жорстко зацмленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція, при тепловиділенні в паралельній до межі круговій області. З цією метою з використанням термопружного потенціалу переміщень і бігармонічної функції Лява розв'язано осесиметричну задачу термопружності для півпростору, що нагрівається стаціонарним точковим джерелом тепла.

В циліндричній системі координат з початком на межі півпростору і віссю Oz , перпендикулярною до неї, температурне поле записуємо у вигляді

$$T(r, z) = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1(r, z)} + \frac{(-1)^k}{R_2(r, z)} \right), \quad (1)$$

$$R_{1,2}(r, z) = \sqrt{r^2 + (z \mp h)^2}, \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, h – віддаль джерела тепла до межі, $k=1$ відповідає нульовій температурі межі тіла, а $k=2$ – її теплоізоляції.

Для заземленої межі граничні умови мають вигляд:

$$u_r(r, 0) = 0, \quad u_z(r, 0) = 0. \quad (3)$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r, z) = \bar{u}(r, z) + \bar{\bar{u}}(r, z), \quad \sigma(r, z) = \bar{\sigma}(r, z) + \bar{\bar{\sigma}}(r, z),$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно площини $z=0$ двома джерелами або джерелом і стоком тепла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі $z > 0$, які забезпечують виконання умов (3).

Переміщення і напруження у безмежному тілі визначаються через термопружний потенціал переміщень

$$\Phi(r, z) = -A \int_0^\infty \alpha^{-2} \left[e^{-\alpha|z-h|} (1 + \alpha|z-h|) + \right. \\ \left. + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|} (1 + \alpha|z+h|) \right] J_0(\alpha, r) d\alpha, \quad A = \frac{\alpha_t (1 + \nu)}{8\pi\lambda (1 - \nu)}, \quad (4)$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона, $J_0(\alpha, r)$ – функція Бесселя. Зокрема

$$\bar{u}_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{u}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (5)$$

Переміщення $\bar{\bar{u}}(r, z)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(r, z)$ визначаємо за допомогою функції Лява у півпросторі $z > 0$

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty (C(\alpha) + \alpha D(\alpha) z) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (6)$$

Тут $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ – шукані функції. Переміщення визначаються формулами

$$\bar{\bar{u}}_r = -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad \bar{\bar{u}}_z = \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \quad (7)$$

Задовольняючи граничну умову (3) з використанням виразів (4)

і (5) при $k = 1$ і (6), (7), для півпростору з нульовою температурою межі знаходимо

$$C(\alpha) = D(\alpha) = -\frac{2A(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{(3-4\nu)\alpha^2}.$$

Для півпростору з теплоізолюваною межею

$$C(\alpha) = -2(1-2\nu)D(\alpha), \quad D(\alpha) = -\frac{2A(1-2\nu)(1+\alpha h)e^{-\alpha h}}{(3-4\nu)\alpha^3}.$$

Після обчислення відповідних інтегралів наведено явні вирази для переміщень і напружень, які є функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні термопружного стану півпростору, зумовленого нагрівом джерелами тепла, розподіленими по певній області у ньому.

Якщо джерела тепла розподілені у паралельній до межі півпростору круговій області S , то напруження в декартовій системі координат $Oxyz$ з початком у центрі круга і осями Ox і Oy , розташованими в області S , визначаються за формулами

$$\sigma^*(x, y, z) = \iint_S w(\xi, \eta) \sigma(r, z, h) d\xi d\eta, \quad (8)$$

де $w(\xi, \eta)$ – густина джерел тепла, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. У зв'язку з перенесенням початку системи координат з межі півпростору у область S вирази (2) мають вигляд

$$R_1(r, z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad R_2(r, z) = \sqrt{r^2 + (z + 2h)^2}.$$

Наведено графіки напружень на межі півпростору в залежності від віддалі джерела до межі, а також напружень на осі Oz , порохованих при $w(\xi, \eta) = w_0$ за формулою (8) при $x = 0$, $y = 0$.

STRESS STATE OF THE HALF-SPACE WITH CLAMPED BOUNDARY WITH HEAT RELEASE ON A PARALLEL TO IT CIRCULAR DOMAIN

Using the potential of thermoelastic displacements and Love biharmonic function, temperature, displacements and stresses in the semi-infinite body due to the heat source are defined. Boundary of body is clamped at zero temperature on it or boundary is insulated. The results are applied in the process of investigation of the half-space thermoelastic state with heat release on parallel to boundary domain.

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО СКРУТ ДВОШАРОВОЇ ОСНОВИ З ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ МІЖ ШАРАМИ

Ніна Антоненко

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

Розглянемо пружний двошаровий пакет, зчеплений з пружним півпростором. Кожен шар характеризуємо товщиною h_k і модулем зсуву μ_k ($k = 1, 2$). Контакт між шарами пружний. З пакетом зчеплений штамп циліндричної форми радіуса R з плоскою підшоною. Штамп повертається на кут ψ відносно своєї осі. Необхідно визначити напруження та переміщення в шарах основи.

Нумерацію шарів проводитимемо зверху донизу, починаючи з одиниці. Всі величини, які відносяться до k -го шару будемо позначати нижнім індексом k . У кожному шарі введемо локальні циліндричні системи координат $O_k \rho_k z_k$ так, щоб осі $O_k z_k$ були спрямовані вглиб шарів.

Умови на верхній межі основи та умови спряження шарів:

$$u_{\phi,1}(\rho, 0) = \rho\psi, \quad \rho < R, \quad \tau_{\phi z,1}(\rho, 0) = 0, \quad \rho > R,$$

$$u_{\phi,k+1}(\rho, 0) = u_{\phi,k}(\rho, h_k) + m_k \tau_{\phi z,k}(\rho, h_k),$$

$$\tau_{\phi z,k+1}(\rho, 0) = \tau_{\phi z,k}(\rho, h_k).$$

де $m_k \geq 0$ – коефіцієнти пружних зв'язків, $k = 1, 2$.

Задача розв'язується з допомогою інтегрального перетворення Ханкеля першого порядку. Введено функцію $\tau(\rho) = \tau_{\phi z,1}(\rho, 0)$, $\rho < R$, відносно якої побудовано інтегральне рівняння задачі:

$$\int_0^R s \tau(s) \left(W_{11}^0(\rho, s) + K(\rho, s) \right) ds = -\mu_1 \rho \psi, \quad \rho < R,$$

де $W_{11}^0(\rho, s) = \int_0^\infty J_1(ps)J_1(pr)dp$ – інтеграл Вебера-Соніна,

$K(\rho, s) = \int_0^\infty a_1(p)J_1(ps)J_1(pr)dp$, $a_1(p)$ – відома обмежена гладка функція.

Контактні напруження шукали у вигляді $\tau(s) = f(s)/\sqrt{R^2 - s^2}$. Розв'язок інтегрального рівняння знайдено методом механічних квадратур, запропонованим для рівнянь такого типу в [1].

На рис. 1 наведено графіки функцій $f(\rho/R) = \tau_{\phi z,1}(\rho/R, 0)\sqrt{R^2 - \rho^2}/R\mu_1\psi$ для двошарової основи ($h_2/h_1 = 1$, $h_1/R = 1$). Номери графіків на рис. 1 вказують на значення коефіцієнтів пружних зв'язків, при яких проводились розрахунки (табл. 1).

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів пружних зв'язків

№ графіка	1	2	3	4	5	6	7
$m_1\mu_1/R$	0	0,1	1	10	0	0	0
$m_2\mu_1/R$	0	0	0	0	0,1	1	10

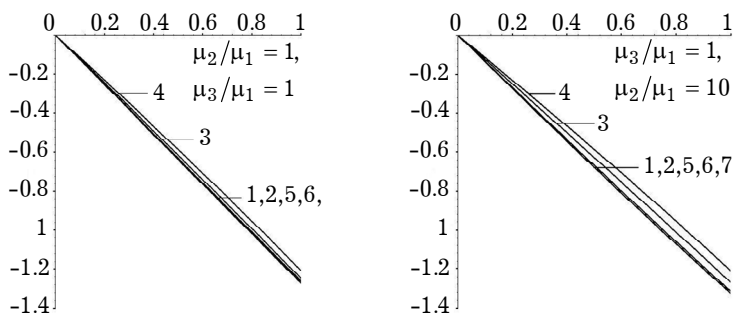


Рис. 1. Графіки функцій $f(\rho/R) = \tau_{\phi z,1}(\rho/R, 0)\sqrt{R^2 - \rho^2}/R\mu_1\psi$

Із аналізу графіків, наведених на рис. 1, можна зробити висновки: наявність пружних зв'язків між шарами призводить до

зменшення контактних напружень у порівнянні з повним контактом; пружні зв'язки на межі другого шару та півпростору менш суттєво впливають на розподіл контактних напружень у порівнянні з пружними зв'язками на межі шарів.

1. Величко И.Г., Стеганцев Е.В. Контактная задача кручения многослойного основания // Вісник Дніпропетровської державної університету. – 2004. – № 6: сер.: Механіка. – Вип. 8, Т. 1. – С. 146-154.

CONTACT PROBLEM OF TORSION OF A TWO-LAYER BASE WITH ELASTIC CONNECTIONS BETWEEN LAYERS

The contact problem of torsion of two-layer base with elastic connections between layers was considered. Solution of the problem was based on the integral Hankel transform. The integral equation with respect to the contact stresses, which contains an integral of Sonin and Weber, was built. The influence of elastic connections on the distribution of the contact stresses was investigated.

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ольга Афанасьева, Дмитрий Тарлаковский, Григорий Федотенков

*Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4,
г. Москва, 125993, А-80, ГСП -3, Российская Федерация;*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
(НИИ механики МГУ), Мичуринский проспект, 1,
г. Москва, 119192, В-192, Российская Федерация*

С позиции общей пространственной постановки рассматривается нестационарная контактная задача с подвижными границами для двух тонких упругих сферических оболочек. В начальный момент времени одна из оболочек (основание) покоится, а вторая (ударник) движется с некоторой начальной скоростью V_0 и входит в контакт с

первой. Предполагается, что вектор начальной скорости ударника не сонаправлен с осью, соединяющей центры тяжести оболочек. Предполагается, что контакт происходит без трения.

Движение оболочек описывается уравнениями модели С.П. Тимошенко в координатах (θ, ϑ) , связанных с линиями главных кривизн (здесь и далее всем заданным и искомым функциям, переменным и параметрам придана безразмерная форма):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \tau^2} = \mathbf{L} \mathbf{W} + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{W} = (u_\theta, u_\vartheta, w, \chi_\theta, \chi_\vartheta)^T, \quad \mathbf{P} = (0, 0, p, 0, 0)^T, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}. \quad (1)$$

Здесь u_θ, u_ϑ, w – физические компоненты вектора тангенциального перемещения и нормальное перемещение; $\chi_\theta, \chi_\vartheta$ – углы отклонения ортогонального к срединной поверхности до деформации материального волокна; p – нормальное давление, τ – безразмерное время. $\mathbf{L}$ – матрица дифференциальных операторов по пространственным переменным [1].

Граничные условия заключаются в условиях периодичности по окружной координате ϑ и ограниченности решения в полюсах оболочек.

Область контакта $\Omega(\tau)$ изменяется в процессе взаимодействия. Ее границы определяются из условия пересечения недеформированных срединных поверхностей оболочек. Для этого в постановку задачи включаются уравнения движения оболочек как абсолютно твердых тел.

Постановка задачи замыкается соответствующими начальными условиями.

Для построения системы разрешающих уравнений используется принцип суперпозиции [1], согласно которому

$$w(\theta, \vartheta, \tau) = \int_0^\tau \iint_{\Omega(t)} G(\theta, \xi, \vartheta, \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) \sin \xi d\zeta d\xi dt.$$

Здесь $G(\theta, \xi, \vartheta, \tau)$ – пространственная нестационарная функция влияния оболочки. Она представляет собой нормальные перемещения как решение задачи (1) при $p = \delta(\theta - \xi) \delta(\vartheta - \zeta) \delta(\tau)$, где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

С помощью принципа суперпозиции и условия равенства

нормальных перемещений ударника и основания в области контакта вытекает интегральное уравнение относительно неизвестного контактного давления. До замкнутой системы оно дополняется уравнениями движения оболочек как абсолютно твердых тел и кинематическими условиями для определения положения границы области контакта.

Функция влияния определяется с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени, разложений в ряды по сферическим функциям и рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра. Для этого предварительно уравнения (1) преобразуются с использованием следующих представлений

$$u_0 = \frac{\partial U}{\partial \theta} - \varphi \sin \theta, \quad u_9 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial 9},$$

$$\chi_0 = \frac{\partial X}{\partial \theta} - \psi \sin \theta, \quad \chi_9 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial X}{\partial 9},$$

что позволяет привести систему (1) к двум более простым подсистемам уравнений, одна из которых независимая, и использовать для построения решения разложения в ряды по сферическим функциям.

Для решения разрешающей системы уравнений используется численно-аналитический алгоритм на основе метода сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-08-01051) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. – 467 с.

SPATIAL TRANSIENT CONTACT PROBLEM FOR TWO SPHERICAL SHELLS

From a position of the general spatial statement the non-stationary contact problem with moving borders for two thin elastic spherical shells is considered. Spatial non-stationary function of influence of a spherical shell is constructed. The principle of superposition is used for obtaining a resolving system. Numerical and analytical algorithm based on a method of grids is developed and realized.

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Василь Бедрій

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

В роботі досліджена задача про двовісний згин ізотропної пластини з отвором та наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, береги якої зазнають гладкого контакту по області постійної ширини h_1 (рис. 1). В серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$, з початком координат в центрі отвору із осями координат, які паралельні і перпендикулярні до векторів розподіленого зовнішнього навантаження M_x^∞ і M_y^∞ . Вважаємо, що центр тріщини знаходиться на осі Ox і вона перпендикулярна до неї. Отвір вільний від зовнішнього навантаження. За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подаємо у вигляді двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину (з використанням класичної теорії).

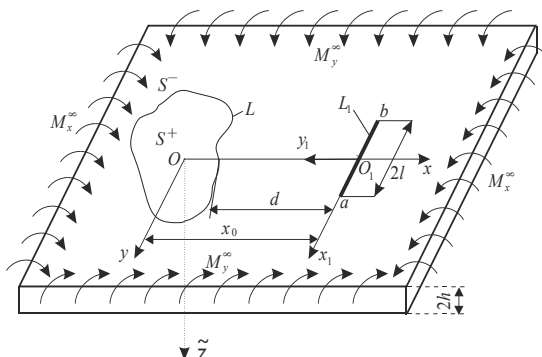


Рис. 1

Згідно постановки задачі будемо мати такі крайові умови:
на берегах тріщини

$$M_{y_1} = \beta h N, \quad \partial_{x_1} [v] + 0.5 \left\{ 1 + (1 - \gamma)^2 \right\} h [\partial_{x_1 y_1} w] = 0, \quad \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = -N/(2h),$$

$$\beta = (1 - \gamma/3), \quad \gamma = h_1/h,$$

$$\sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, \quad P^{\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{\pm} = M_{y_1}, \quad x_1 \in L_1,$$

на межі отвору

$$M_n = 0, \quad P_n = 0, \quad \sigma_n = 0, \quad \sigma_{n\tau} = 0, \quad t \in L,$$

де P_n – узагальнена у сенсі Кірхгофа поперечна сила; M_{y_1}, M_n – згинальні моменти, w – прогин пластини; $\sigma_{y_1 y_1}, \sigma_n$ і $\sigma_{x_1 y_1}, \sigma_{n\tau}$ – нормальні і дотичні напруження, а u, v – компоненти вектора переміщення на осях Ox і Oy у плоскій задачі; $[f] = f^+ - f^-$, тут значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$.

З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів для плоскої задачі та класичної теорії згину пластин розв'язок задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на отворі, так і на тріщині, яка розв'язана числово. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, контактного зусилля між берегами тріщини.

BIAXIAL BENDING OF ISOTROPIC PLATES WITH CURVED HOLE AND CONTINUOUS LINEAR CRACK GIVEN CONTACT ITS BANKS, WHICH IS PERPENDICULAR AND PARALLEL TO THE DIRECTION OF ITS FOREIGN DISTRIBUTED POINTS

Using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials for plane problems and the classical theory of plate bending solution of the problem is reduced to a system of singular integral equations as the hole and on the crack, which is solved numerically. A numerical analysis of the intensity factors forces and moments, the contact force between crack.

УДК 539.3

ВПЛИВ ПОШКОДЖЕННЯ КОНТУРА КВАДРАТНОГО ОТВОРУ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Ольга Бєлова, Анатолій Дзюба

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
пр-т К. Маркса 35, м. Дніпропетровськ, 49050, Україна*

Більшість оболонок, які широко застосовуються в аерокосмічній, суднобудівній, нафтогазовій, енергетичній та інших галузях, мають отвори різної форми, розмірів, розташування та призначення, наявність яких обумовлена експлуатаційними та технологічними вимогами. Наявність таких отворів значно знижує несучу здатність конструкції у зв'язку з концентрацією напружень в матеріалі оболонок в околі пошкоджень. Крім того, поява при цьому суттєвої неоднорідності напружено-деформованого стану та значних переміщень призводить до нелінійності відповідної математичної моделі і, як наслідок, до необхідності подолання досить серйозних математичних проблем прогнозування величини залишкової несучої здатності таких конструктивних елементів. Складність розв'язання цієї проблеми з використанням існуючих чисельних методів ще більше зростає у зв'язку з можливою появою тріщин чи інших пошкоджень контуру таких отворів в процесі експлуатації оболоноквих конструкцій.

У поданій роботі приведені результати експериментального дослідження поведінки та визначення критичних навантажень циліндричної оболонки з двома розташованими діаметрально в круговому напрямку та симетрично відносно середнього поперечного перерізу оболонки квадратними отворами різних розмірів (14 значень), кути яких мають пошкодження у вигляді прямолінійних розрізів (у напрямку діагоналей квадратного отвору) різної довжини (4 значення) під дією поздовжнього розтягу (втрати міцності) та поздовжнього тиску (втрати стійкості).

Випробувано 112 та 109 моделей, відповідно. Для виготовлення моделей оболонок використано спеціальний папір марки «В» ДСТ 597-73 з товщиною $\delta = 0,23 \cdot 10^{-3}$ м. Механічні характеристики цього матеріалу встановлені за результатами окремого

експерименту і були наступними: модулі пружності $E_x = 6,9 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E_y = 3,45 \cdot 10^9 \text{ Па}$, коефіцієнти Пуасона $\mu_x = 0,3$, $\mu_y = 0,15$ та межі міцності $\sigma_{x,y} = 4,5 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\sigma_{y,x} = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}$. Приведені дані порівняльного аналізу, пов'язаного з використанням інших матеріалів.

Для здійснення стискаючого навантаження була розроблена та спроектована спеціальна пневматична установка з електронним управлінням та можливістю передавати дані випробувань безпосередньо в пам'ять ПК. Навантаження моделей на розтяг здійснювалось за допомогою випробувального пресу МР-0,5-1.

За результатами експериментальних випробувань, з використанням спеціально розробленого алгоритму квадратичної дискретно-неперервної апроксимації, отримані апроксимуючі криві залежностей відносного критичного навантаження $\tilde{P}_{кр}(a)$ від розміру отвору a для різних довжин l тріщин (розрізів) в кутах контуру. Виявилось, що залежності критичного навантаження $\tilde{P}_{кр}(a)$ від розміру отвору a не є рівномірними. Відповідні залежності характеризувалися наявністю точки зламу в певному діапазоні розміру отвору, що пояснюється зміною форми втрати несучої здатності. В обох випадках значення відносного критичного навантаження $\tilde{P}_{кр}(a)$ різко знижується з появою навіть найменшого отвору, а зі збільшенням розміру отвору a його вплив на інтенсивність зниження критичного навантаження поступово зменшується.

Проаналізовано вплив розміру отворів та довжини прямолінійних розрізів l на форми втрати стійкості (у випадку поздовжнього стиску), картини втрати міцності (у випадку поздовжнього розтягу) та величини критичного навантаження.

У випадках як стиску, так і розтягу, отримані апроксимуючі криві якісно подібні між собою, що дозволяє їх використання для прогнозування несучої здатності оболонок за наявності отворів з пошкодженнями контуру.

INFLUENCE OF THE RECTANGULAR OPENINGS' BORDER'S DAMAGE ON THE CRITICAL LOAD VALUE OF CILINDRICAL SHELL

In the paper the results of experimental research on cylindrical shells weakened by two square openings, diametrically arranged and symmetrically related to the median cross section of the shell, which are tested on the effect of compressing and tensional axial forces. Openings of shells are damaged with straight slits, located in diagonal directions.

УДК 539.3

КРУЧЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО ЗРАЗКА З ОСЕСИМЕТРИЧНИМ U-ПОДІБНИМ ВИРІЗОМ

Васюта Ростислав

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Розв'яжемо осесиметричну задачу кручення скінченного циліндричного зразка з бічним U-подібним вирізом, віднесеного до циліндричної системи координат $(rz\varphi)$ з початком у центрі зразка (рис. 1). Для задачі кручення навантаження розподілені симетрично відносно осі кручення Oz і спрямовані перпендикулярно до площини $\varphi = \text{const}$, а відмінні від нуля компоненти напружень $\tau_{\varphi r}$, $\tau_{\varphi z}$ та переміщення v у тангенціальному напрямі не залежать від кутової координати. Рівняння рівноваги у переміщеннях має вигляд:

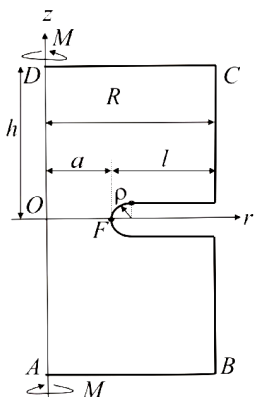


Рис. 1.

$$\frac{\partial^2 v(\zeta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(\zeta)}{\partial r} - \frac{v(\zeta)}{r^2} + \frac{\partial^2 v(\zeta)}{\partial z^2} = 0, \quad \zeta = r + iz.$$

Компоненти напружень знаходимо з виразів:

$$\tau_{\varphi r}(\zeta) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \quad \tau_{\varphi z}(\zeta) = G \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2)$$

де G – модуль зсуву.

На контурі осевого перерізу циліндра L задані напруження. На торцях – заданий крутний момент M , дію якого замінимо напруженнями:

$$\tau_{\varphi n}(s) = \begin{cases} 0, & t \in BFC \\ \frac{r}{R} \tau_0, & t \in AB \cup CD \end{cases} \quad s = s(t), \quad t = r + iz \in L. \quad (3)$$

Тут, $\tau_0 = 2M / (\pi a^3)$, де M – заданий крутний момент, s – дугова абсциса точки $t \in L$.

Задачу зведено до визначення невідомої функції $\Gamma(s) = \partial \{ \gamma(s)/r \} / \partial s$ із сингулярного інтегрального рівняння (СІР) [3]:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \Gamma(s') J(s', s) ds' = \tau(s), \quad (4)$$

відносно невідомої функції, ядро якого визначає співвідношення

$$\begin{aligned} J(s', s) &= J(r, z, r', z') = \\ &= \frac{\sqrt{r'/r}}{4k} \left\{ D_1 \frac{2r'}{r} \frac{dr}{ds} + D_2 \left\langle \frac{(z-z')}{r} \frac{dz}{ds} + \frac{(r+r')}{r} \frac{dr}{ds} \right\rangle \right\}; \quad (5) \\ D_1 &= (8 - 3k^2)K(k) + (7k^2 - 8)E(k)/(1 - k^2); \\ D_2 &= 8(k^2 - 2)K(k) + (k^4 - 16k^2 + 16)E(k)/(1 - k^2); \\ k &= 2\sqrt{rr' / ((z - z')^2 + (r + r')^2)}. \end{aligned}$$

Числовий розв'язок СІР (4) знайдено методом механічних квадратур. Розраховані коефіцієнти концентрації напруження (ККН) $k_t = \tau_{\phi s}(F) / \tau_0$ для U-подібного вирізу з малим відносним радіусом закруглення $\varepsilon = \rho/2R$ у вершині (рис. 2, суцільні лінії) для $h/R = 1$. Наведено криві ККН для контуру по параболі Нойбера [1, 2] (рис. 2, пунктирні лінії).

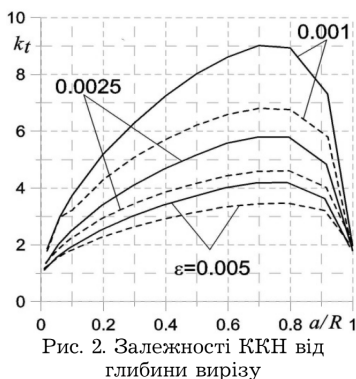


Рис. 2. Залежності ККН від глибини вирізу

Порівняння результатів показують, що не лише радіуси закруглення у вершинах вирізів, а й форми суттєво впливають на ККН. Якщо для $\varepsilon = 0.05$ відносні відхилення максимальних напружень становлять лише 4.2%, то для $\varepsilon = 0.001$ – 24.5%.

У граничному випадку, коли $\varepsilon \rightarrow 0$, використовуючи зв'язки між ККН та коефіцієнтами інтенсивності напружень, отримано відомі значення останніх для цилінд-

ричного зразка з крайовою тріщиною.

1. Neuber H. Kerbspannungslehre, 2nd Ed. – Springer-Verlag, 1958. – 225 с.
2. Pilkey W.D., Pilkey D.F. Peterson's stress concentration factors, 3rd Ed. – Wiley, 2007. – 512 с.
3. Кравець В.С., Васюта Р.В. Кручення пружного простору з осесиметричної вузькою порожниною // ФХММ. – 2012. – №6. – С. 102-109.

TORSION OF CYLINDRICAL SAMPLE WITH AXISYMMETRIC U-NOTCH

The torsion problem for cylindrical sample with axisymmetrical U-notch is solved. Numerical results of the stress concentration factor (SCF) of axisymmetric cylindrical sample with U-notch for small values of the radius of curvature are obtained. The comparison with known results of Neuber for parabolic notch was made. Influence of notch geometry on SCF increases with depth of notch.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ СПРЯЖЕННЯ В УТОЧНЕНОМУ АНАЛІЗІ ЗГИНУ ОРТОТРОПНОЇ БАЛКИ З ОБМЕЖЕНОЮ ПОВЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Олексій Гуртовий, Дмитро Жук

*Національний університет водного господарства та
природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна*

В уточненій постановці аналітично розв'язано задачу пружного згину рівномірно розподіленим навантаженням шарнірно опертої на краях балки довжиною $L = 2l$ ($-a \leq x \leq 2l - a$) та висотою h , у якій утворилась симетрична відносно середини прогину балки повздовжня наскрізна тріщина довжиною $2m$. Тріщина розміщена на віддалі βh ($0 < \beta < 1$) від верхньої поверхні. Внаслідок симетрії задачі розглядалась половина балки $-a < x < m$, яка ділилась на чотири області $j = \overline{1,4}$ ($j = \overline{1,2}$ – частини на ділянці без тріщини, утворені розділенням горизонтальною площиною, що відповідає умовному продовженню тріщини; $j = \overline{3,4}$ – частини над та під тріщиною).

Досліджувався вплив на НДС балки умов спряження даних областей в перерізі на краю тріщини (при $x = 0$) в задачах з розкриттям і без розкриття тріщини.

Для кожної з частин $j = 1, 4$ застосовано уточнену модель для горизонтальних переміщень u_j з врахуванням деформації поперечного зсуву γ_{zxj} у вигляді гіпотез:

$$\begin{aligned}\gamma_{zxj} &= -\phi_{1j}(z) \cdot \frac{d\chi_j}{dx} + \phi_{2j}(z) \cdot \gamma_{0j}, \\ u_j &= u_{0j}(x) - z \cdot \frac{dw_j}{dx} - \psi_{1j}(z) \cdot \frac{d\chi_j}{dx} + \psi_{2j}(z) \cdot \gamma_{0j},\end{aligned}\quad (1)$$

де $\gamma_{0j}(x)$, $\chi_j(x)$ – шукані функції поперечного зсуву; а $w_j(x)$, $u_{0j}(x)$ – відповідно, функції прогинів і горизонтальних переміщень на координатній поверхні у j -й області; гіпотетичну функції $\phi_{1j}(z)$ задано поліномом другого степеня від z , а $\phi_{2j}(z)$ – поліномом першого степеня від z .

Дотичні напруження на зовнішніх гранях балки і на поверхнях тріщини рівні нулю. Функція $\gamma_{0j}(x)$ забезпечує за гіпотез для областей 1 і 2 нерозривність дотичних напружень, на поверхні спряження цих областей. При цьому, на поверхні $z = 0$, що співпадає з площиною тріщини, $\gamma_{zxj} = \gamma_{0j}$. За граничної умови $\gamma_{0j} = 0$ при $x = 0$ досягається відсутність розривів в переміщеннях u_j і дотичних напруженнях τ_{zxj} між областями у всіх точках поперечного перерізу на краю тріщини, проте залишаються розриви у нормальних напруженнях σ_x , для яких граничні умови можна задовольнити лише інтегрально.

Аналітично розв'язано систему диференціальних рівнянь за граничних умов на торцевих поверхнях частин балки $x = -a$, $x = 0$ та $x = t$, яку отримано варіаційним методом із функціоналу Лагранжа для окремого випадку розташування тріщини посередині висоти балки. Отримано вирази для НДС.

Проведено порівняння з результатами розрахунку ортотропною балки [1], отриманих методом скінченних елементів з моделюванням сингулярності поля напруг і переміщень в вершині тріщини. Зокрема, при $L=6\text{м}$, $q=18,62\text{кН/м}$, $h \times b = 600 \times 140\text{мм}$, $E=11000\text{МПа}$, $G_{zx}=500\text{МПа}$ (дерев'яна балка) отримано наступні результати (таблиця):

Таблиця

Довжина тріщини m , мм	Прогини		Напруги				
	$w^{\max} / w_0$		$\tau_{zx}^{\max}$, МПа		$\sigma_x^{\max}$, МПа		ψ , %
	За (1)	МСЕ [1]	За (1)	МСЕ [1]	За (1)	МСЕ [1]	
600	1,0000	1,00013	0,9566	0,9975	10,127	10,236	-1,1
1800	1,0002	1,00763	0,9563		10,401	10,534	-1,3
3000	1,0242	1,04661	0,9536		10,947	11,146	-1,8
4800	1,1940	1,23905	0,9169		12,267	12,576	-2,5

В залежності від відносної довжини балки і тріщини, відносна різниця в максимальних дотичних напруженнях $\tau_{zx}^{\max}$ на опорі коливається в межах 0,7% - 8%, в відношеннях максимальних прогинів до відповідних прогинів у суцільній балці $w^{\max} / w_0$ - 0% - 3,8%, в максимальних нормальних напруженнях $\sigma_x^{\max}$ - 0% - 4,1%. При цьому різниця в дотичних напруженнях зростає зі збільшенням відносної довжини тріщини m/l , а в максимальних прогинах і нормальних напруженнях - при зменшенні m/l . В нормальних напруженнях σ_x , отриманих за (1), в області поблизу краю тріщини спостерігається відхилення від фізично обґрунтованого характеру. У дещо віддалених від краю тріщини перерізах вплив цих особливостей на НДС зникає.

Розглянуто також варіант розрахунку з умовним розділенням половини балки лише на три області, для кожної з яких в гіпотезах (1) приймалось $\gamma_{0j} = 0$. Це призвело до розривів в розв'язках для горизонтальних переміщень, нормальних і дотичних напружень в поперечному перерізі на краю тріщини, де з'єднано області.

1. Чорнолоз В.С., Іванюк А.М. Несуча здатність дерев'яних балок з пошкодженнями у вигляді наскрізних тріщин: Монографія - Рівне: НУВГП, 2013 - 149 с.

INVESTIGATION OF CONJUGATION CONDITIONS IN REFINED ANALYSIS OF ORTHOTROPIC BEAM WITH LIMITED LONGITUDINAL CRACK BENDING

The results of the analytical investigation of conjugation conditions in refined analysis of orthotropic beam with limited longitudinal crack bending are presented. Was done comparison of the results and analysis of influence of conjugation conditions on the stress-strain state of the beam.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ РОЗШАРУВАНЬ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛИТ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Олексій Гуртовий, Сергій Тинчук

Національний університет водного господарства та
природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна

В розрахунках міцності та деформативності однорідних і багатошарових плоских покриттів на відносно жорстких конструкціях актуальною є оцінка впливу на НДС плити покриття суцільних чи локальних розшарувань, а також місцевого відшарування від основи внаслідок порушення у покритті умов жорсткого контакту.

В лінійно-пружній уточненій постановці розглядається деформування поперечним навантаженням прямокутних багатошарових плит, які опираються на абсолютно жорстку основу. Застосовано структурно-континуальну модель симетричного НДС, що враховує поперечне обтиснення та поперечні зсуви з високим ступенем ітераційного наближення [1]. Шари плити – ізотропні та трансверсально-ізотропні, довільної, але сталої товщини, з жорстким міжшаровим контактом. Розшарування чи проковзування між шарами моделюється тонкими шарами низької жорсткості. Пропонується розглядати розрахункову схему як плити подвійної товщини, що утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде в цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а НДС – симетричним, беззгиновим.

Чисельно за допомогою варіаційно-різницевого методу досліджено вплив на НДС плити змішаних умов жорсткого та ковзкого контакту з основою. При цьому жорсткий контакт змодельований введенням додаткового тонкого «абсолютно жорсткого» прошарку h_0 (рис. 1), інакше контакт основи з плитою моделює проковзування [1]. Зокрема, розглянуто ізотропну плиту з харак-

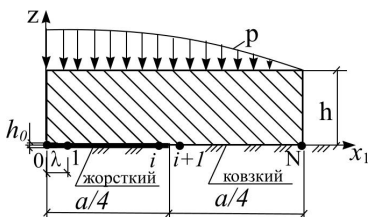


Рис. 1. Розрахункова схема плити при змішаному контакті з основою

теристиками пружності E ; $\nu=0,25$ та $a/h=4$. Жорсткий контакт моделювався додатковим тонким ізотропним шаром товщиною $h_0=h/100$ з $E_0=10^5 E$, $\nu_0=0$ (рис. 1).

На межі зміни контакту (в точках i та $i+1$ сітки ВРМ) застосовано додаткові умови спряження переміщень окремих точок в поперечному перерізі з використанням невизначених множників Лагранжа.

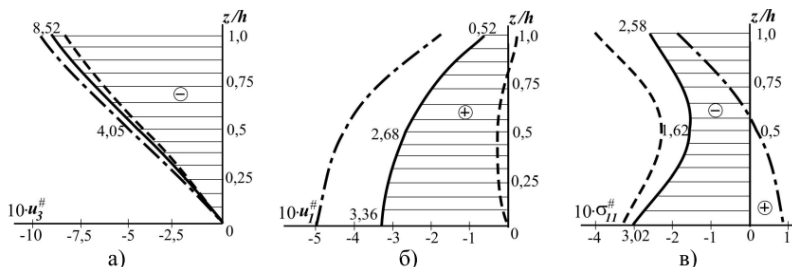


Рис. 2. Характер зміни переміщень та напружень в плиті за різних умов контакту з основою: — змішаному; --- жорсткому; -.- ковзкому контактах

Характер і відносна величина поперечних переміщень $u_3^{\#}$ в ізотропній плиті змінюється не суттєво при різних умовах контакту плити з основою (рис. 2, а), тоді як величина і характер переміщень $u_1^{\#}$ (рис. 2, б) та напружень $\sigma_{11}^{\#}$ (рис. 2, в) суттєво залежать від умов контакту ($u_{\alpha}^{\#} = u_{\alpha} E / (p_0 h)$; $\sigma_{11}^{\#} = \sigma_{11} / p_0$).

Досліджено вплив на НДС плити дискретних плоских включень в плиті, або часткових розшарувань. Зокрема, розглянуто плоску деформацію ізотопної плити (E ; $\nu=0,25$; $a/h=4$) з включенням

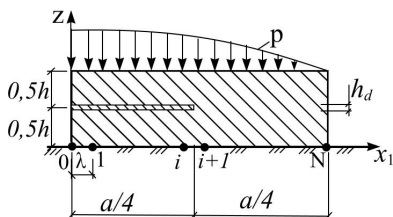


Рис. 3. Розрахункова схема плити з плоским включенням

0,9675, у порівнянні з однорідною плитою, а переміщення в площині

(рис. 3) у вигляді тонкого шару товщиною $h_d=h/200$, довжиною $a/2$ з ізотропного матеріалу ($\nu=0,25$ та $E_d=E/10$) при ковзкому контакті плити з основою. Наявність такого плоского включення в плиті дещо збільшує максимальні відносні поперечні переміщення $u_3^{\#}$ із 0,9305 до

плити $u_1^\#$ – із 0,4987 до 0,5031. Проте напружений стан якісно змінюється, а максимальні напруження в плиті зростають на 30%.

Досліджено також НДС багат шарових плит за різних комбінацій суцільних та обмежених включень та умов контакту з основою.

1. Гуртовий А.Г., Тынчук С.А. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 643-654.

RESEARCH OF INFLUENCE OF BUNDLES ON THE STRESS-STRAIN STATE OF PLATES ON A RIGID FOUNDATION

Optimization of known model of calculation of multilayered plates on a rigid foundation is offered. Problems with different, including discrete variables, contact conditions between the plate and the foundation and between the plate's layers is resolved.

УДК 539.375

ВПЛИВ ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ НА УМОВИ ЗРУШЕННЯ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Юлія Діхтяренко, Валерій Дякон

*Уманський державний педагогічний університет
вул. Садова 2, Черкаська обл., м. Умань, Україна;*

*Уманський відокремлений підрозділ Європейського університету
вул. Шевченка 15а, Черкаська обл., м. Умань, Україна*

Теоретичні і експериментальні дослідження показують, що пластична зона, яка виникає біля гострокінцевих концентраторів напружень в пружно-пластичному матеріалі, має складну структуру і містить досить розвинуту пластичну область, в якій переважають зсувні деформації, та прилеглу до вершини концентратора значно меншу за розмірами зону передруйнування з високим рівнем як зсувних, так і відірвних деформацій. В даній роботі виконано розрахунок маломасштабної пластичної зони у кутовій точці межі поділу двох різних пружно-пластичних матеріалів, з якої виходить

тріщина нормального відриву. З урахуванням умов симетрії задачі для її опису використовується модель "тризубець" [1], згідно з якою розвиток зони відбувається у два етапи. На першому етапі з вершини тріщини під певним кутом до її початкового напрямку симетрично поширюються дві вузькі пластичні смуги, що моделюються відрізками розриву дотичного переміщення. Оскільки їх поява не знімає концентрацію напружень в околі вершини, то на наступному етапі відбувається утворення на продовженні тріщини зони передруйнування, що моделюється відрізком розриву нормального переміщення. Розв'язок задачі виконано методом Вінера-Хопфа у поєднанні з інтегральним перетворенням Мелліна та деякими положеннями теорії функцій комплексної змінної. Отримано аналітичні вирази для довжини пластичних смуг та визначено їх орієнтацію з умови максимуму швидкості дисипації енергії в зоні. Використовуючи зворотне перетворення Мелліна, досліджено поле напружень в околі кутової точки після утворення початкових пластичних смуг та виявлено збереження концентрації напружень біля вершини тріщини. На другому етапі розв'язку задачі виконано розрахунок довжини вторинної зони передруйнування на продовженні тріщини. Встановлено, що її поява усуває концентрацію напружень у кутовій точці. На основі числових розрахунків проаналізовані залежності параметрів зони від кута зламу межі поділу та пружних характеристик матеріалів. Знайдено розкриття тріщини внаслідок утворення пластичних смуг і зони передруйнування. Досліджено вплив утворення пластичної зони на умови зрушення тріщини.

1. Каминский А.А., Кипнис Л.А., Колмакова В.А. Расчет пластической зоны в конце трещины в рамках модели "тризубец" // Прикл. механика. – 1997. – 33, № 5. – С. 70-76.

INFLUENCE OF MATERIAL PLASTICITY ON THE CONDITIONS OF START OF A MODE I CRACK AT AN ANGULAR POINT OF THE INTERFACE OF TWO MATERIALS

The calculation of a small scale plastic zone within the framework of "trident" model for the plain strain conditions at the corner point of the interface of two dissimilar elasto-plastic materials from which the mode I crack goes out is executed by the Wiener-Hopf method. This zone is modeled by two symmetric side lines of tangential displacement rupture and by the line of normal displacement rupture on prolongation of the crack. The analytic expressions for the definition of zone dimensions and crack opening are obtained. The dependences of zone parameters on the interface spread angle and elastic material characteristics are analyzed on the basis of numerical calculations.

УДК 539.375

КОНТАКТ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ ЗА НАЯВНОСТІ БІЧНОЇ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ

Михайло Дудик, Леонід Кіпніс

*Уманський державний педагогічний університет,
вул. Садова, 2, м. Умань, Черкаська обл., 20300, Україна,*

Згідно з сучасними теоретичними уявленнями, що базуються на моделі М. Комніноу, біля вершин міжфазних тріщин має місце контакт берегів. Як показали численні дослідження, розміри області контакту не залежать від модуля зовнішнього навантаження, але суттєво залежать від його конфігурації. Врахування контактної зони усуває притаманну класичній моделі відкритої тріщини осцилюючу особливість напружень, зберігаючи концентрацію напружень степеневого характеру. Це приводить до утворення біля вершини тріщини зони передруйнування, яка в свою чергу змінює напружено-деформований стан в околі вершини, здійснюючи тим самим зворотний вплив на розміри контактної зони.

В даній роботі в умовах плоскої деформації побудовано комплексну модель міжфазної тріщини на прямолінійній межі поділу двох однорідних ізотропних пружних матеріалів, яка передбачає одночасне існування в околі її вершини маломасштабної області контакту берегів, взаємодіючих за законом сухого тертя, та більш розвиненої бічної зони передруйнування, представленої в рамках моделі Леонова-Панасюка лінією розриву нормального переміщення. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача про визначення параметрів контактної зони зведена до розв'язання функціонального рівняння, з розв'язку якого, отриманого за методом Вінера-Хопфа, виведені рівняння для визначення довжини контактної зони і показника сингулярності напружень біля вершини тріщини та знайдено вираз для контактного напруження. Проведено числовий аналіз параметрів контактної зони, який виявив залежність розмірів зони від зовнішнього навантаження, тертя і пружних характеристик з'єднаних матеріалів. Встановлено, що довжина контактної зони суттєво зростає при збільшенні величини навантаження, особливо його дотичної складової, а також при зближенні модулів пружності з'єднаних матеріалів, тоді як її залежність від коефіцієнта тертя є незначною. Виявлено зростання концентрації напружень біля

вершини тріщини при одночасній появі бічної зони передруйнування та контакту берегів, яке може бути усунено внаслідок утворення зони деструкції матеріалу у прилеглій до вершини тріщини частині зони передруйнування.

**CONTACT OF INTERPHASE CRACK FACES IN THE PRESENCE OF THE
LATERAL ZONE OF PREFRACTURE EMERGES**

УДК 539.375

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БІЛЯ
КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ,
З ЯКОЇ ВИХОДИТЬ МІЖФАЗНА ТРІЩИНА**

Михайло Дудик, Володимир Феньків, Геннадій Хазін

*Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,
вул. Садова, 2, м. Умань, Черкаська обл., 20300, Україна,*

В умовах плоскої деформації розглянуто задачу про напружено-деформований стан кусково-однорідного тіла біля вершини півнескінченої міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних ізотропних пружних середовищ. Частина берегів тріщини навантажена заданими дотичним і відривним нормальним напруженнями. На межі поділу передбачається ідеальне з'єднання. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна сформульовану крайову задачу теорії пружності зведено до системи рівнянь, які визначають трансформанти напружень і переміщень в околі вершини тріщини. За допомогою зворотного перетворення Мелліна знайдених трансформант виведено формули для асимптотичного поля напружень і переміщень біля вершини тріщини у вигляді розвинень по степеням відстані до вершини. Ці степені є коренями деякого трансцендентного рівняння, отриманого в ході розв'язання задачі. Числовий аналіз коренів даного рівняння для окремих пружних параметрів з'єднаних матеріалів і кутів зламу межі поділу показав наявність серед них значень з від'ємною дійсною частиною, що свідчить про концентрацію напружень біля вершини тріщини. Встановлено, що сингулярна поведінка напружень в околі вершини відрізняється від кореневої. На степеневу особливість напружень у деякому інтервалі кутів зламу межі поділу, що залежить

від пружних параметрів з'єднаних матеріалів, накладаються фізично некоректні просторові осциляції, які обумовлені наявністю уявної частини у показнику степеня сингулярності. Передбачається, що такій ситуації відповідає утворення області контакту берегів тріщини. Знайдено вираз для розкриття тріщини біля її вершини та на його основі здійснена оцінка розмірів області можливого контакту берегів і сформульована умова коректності отриманого розв'язку задачі.

Шляхом порівняння отриманих розвинень напружень з розв'язком аналогічної канонічної задачі виведено аналітичні формули для коефіцієнтів інтенсивності. Обґрунтовано необхідність введення двох коефіцієнтів інтенсивності через відсутність симетрії у будові кусково-однорідного тіла з ламаною межею поділу. Отримані формули застосовано у частинних випадках дії на берегах тріщини сталих напружень або зосереджених сил.

**STRESSED-STRAINED STATE NEAR AN ANGULAR POINT OF MATERIAL
INTERFACE WHERE FROM AN INTERPHASE CRACK EMERGES**

УДК 539.431

**ВПЛИВ ВКЛЮЧЕНЬ НА ВТОМНУ МІЦНІСТЬ СТРУКТУРНО
НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Наталія Івантишин, Андрій Ліснічук

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Як відомо на механічні та експлуатаційні властивості структурно неоднорідних матеріалів вагомий вплив мають неметалеві включення, які завжди є у їх структурі. Ступінь такого впливу визначається природою та розподілом включень в тілі, їх розміром, формою та кількістю. Втомна міцність конструкційного матеріалу, відповідно до сучасних концепцій механіки руйнування, визначається не опором зародженню мікрodefектів (вони є завжди), а можливістю їхнього росту в процесі циклічного навантаження.

Виходячи з таких позицій розглянемо втомну поведінку металічного полікристалічного матеріалу в околі одного з неметалічних

включень, що містяться в його структурі. Ефектом взаємовпливу включень на даному етапі досліджень знехтуємо. В рамках плоскої задачі розглянемо нескінченне пружне тіло з включенням у вигляді еліпса з півосями a і b ($a > b$). Вздовж поверхні розділу матеріалів існує ідеальний механічний контакт. Біля включення в результаті дії осевих циклічних навантажень з амплітудою σ_a утворилася мікротріщина, фронт якої заблоковано границею зерна t_0 (надалі вважатимемо їх домінантними бар'єрами на шляху поширення мікротріщин). Отже значення границі втоми матеріалу повинне відповідати мінімальній інтенсивності зовнішніх навантажень за яких стає можливим подолання тріщиною цих бар'єрів.

Виходячи з таких позицій після розв'язання відповідної крайової задачі теорії пружності для тріщин в околі включення, що взаємодіє з мікроструктурним бар'єром, отримане співвідношення для визначення втомної міцності матеріалу.

$$\sigma_R^e = \frac{4}{\pi} \sigma_e^* \sqrt{\frac{t_0}{2(d+a)}} \left(1 + \frac{4(1-v^2)\omega\beta_1}{\xi} \arcsin \alpha \right) \times \left(1 - \frac{2\omega}{\pi\xi} \arcsin \alpha \right)^{-1}$$

тут $\xi = \pi + 4(1-v^2)\omega\lambda \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{a^2}{(a+d)^2}}$, $\alpha = \frac{a}{a+d+t_0}$, d – розмір зерна;

σ_e^* – границя міцності межі зерна; $\beta = \frac{a}{b}$; $\eta = \frac{E_e}{E}$, E_e , E – модулі

Юнга включення і матриці відповідно.

1. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями – К.: Наук. думка, 1986. – 214 с.
2. Куслицкий А.Б. Неметаллические включения и усталость стали. –К.: Техника, 1976. – 126 с.
3. Navarro A., E. R. de los Rios Short and long fatigue crack growth: a unified model // Phil. May. – 1988. –57. – P. 37-42.
4. Navarro A., E. R. de los Rios Fatigue crack growth modeling by successive blocking of dislocations // Proc. R. Soc. London. – 1992. – A437. – P. 375-390.
5. Vallellano C., Navarro A., Dominguez J. Fatigue crack growth threshold conditions at notches. Part I: Theory // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. – 2000. – 23. – P. 113-121.

INFLUENCE OF INCLUSIONS ON FATIGUE STRENGTH STRUCTURAL INHOMOGENEOUS MATERIALS

A model of fatigue of polycrystalline material with inclusions was obtained. The engineering formula for calculation of the fatigue strength of metals which contain inclusion of different physical nature was obtained.

УДК 539.3

ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ТІЛА З ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО ЙОГО МЕЖІ СТРІЧКОВІЙ ОБЛАСТІ

Наталія Івасько, Григорій Кіт

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

З використанням логарифмічного потенціалу простого шару, термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Ері розв'язані двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності при плоскій деформації півбезмежного тіла за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області L ширини $2l$ (на якій задані температура або тепловий потік). На межі тіла підтримується нульова температура.

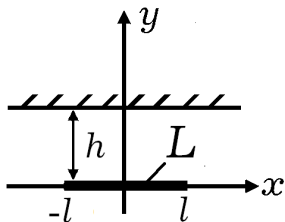


Рис. 1.

В декартовій системі координат xOy (рис. 1) граничні умови в області L і на межі тіла мають вигляд:

$$T(x, 0) = T(x), \quad q(x, \pm 0) = -\lambda \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = \pm \frac{w(x)}{2}, \quad x \in L,$$

$$T(x, h) = 0, \quad \sigma_{xx}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = 0.$$

Стаціонарне температурне поле, зумовлене тепловиділенням, подаємо через логарифмічний потенціал простого шару з густиною $w(\xi)$:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-l}^l w(\xi) \ln \frac{r_2}{r_1} d\xi,$$

де $r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - 2h)^2}$, λ – коефіцієнт тепло-

провідності. Якщо в області L задана температура $T(x)$, то для визначення потужності теплових джерел $w(\xi)$ маємо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l w(\xi) \ln \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + 4h^2}}{|x-\xi|} d\xi = \lambda T(x), \quad x \in L.$$

Для визначення напружено-деформованого стану тіла використовуємо термопружний потенціал переміщень

$$\Phi(x, y) = \frac{m}{8\pi\lambda} \int_{-l}^l w(\xi) \left[r_1^2 \ln r_1 - r_2^2 \ln r_2 - 2yh + 4h^2 \right] d\xi, \quad m = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

На межі тіла при $y = h$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, h) = 0, \quad \bar{\sigma}_{xy}(x, h) = \frac{Gm}{\pi\lambda} h \int_{-l}^l \frac{w(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + h^2} d\xi.$$

Для зняття дотичних напружень на межі тіла використовуємо функцію напружень Ері

$$F(x, y) = \frac{mG}{\pi\lambda} h(y-h) \int_{-l}^l \ln r_2 d\xi.$$

За відповідними формулами знаходимо нормальні і дотичні напруження, зокрема в області L

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -mG \left[T(x, 0) + \frac{h^2}{\pi\lambda} \int_{-l}^l w(\xi) \frac{(x-\xi)^2 + 12h^2}{\left[(x-\xi)^2 + 4h^2 \right]^2} d\xi \right],$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \frac{4mGh^3}{\pi\lambda} \int_{-l}^l \frac{w(\xi)(x-\xi)}{\left[(x-\xi)^2 + 4h^2 \right]^2} d\xi.$$

Розглянуто приклади, коли в області тепловиділення L задані сталі температура або тепловий потік.

**PLANE DEFORMATION OF SEMI-INFINITY BODY WITH HEAT RELEASE ON A
PARALLEL TO ITS BOUNDARY RIBBON-LIKE DOMAIN**

Using a logarithmic potential of a simple layer, thermoelastic displacement potential and Airy stress function, the two-dimensional problems of stationary heat conduction and thermoelasticity have been solved for plane deformation of semi-infinity body with heat release on a parallel to its boundary ribbon-like domain (where temperature or heat flow are given). The body boundary is maintained at zero temperature. The problems are reduced to integral equations with logarithmic kernel.

УДК 539.375

**ПРО КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КІНЦІВ ТРІЩИНИ
У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ**

**Анатолій Камінський, Леонід Кіпніс, Тетяна Поліщук,
Геннадій Хазін**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Несторова, 3, г. Київ, 03057, Україна;*

*Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,
вул. Садова, 2, м. Умань, Черкаська обл., 20300, Україна*

Розглянуто плоску статичну симетричну задачу теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить тріщину скінченної довжини, що виходить з кутової точки. На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі для тріщини, що породжується єдиним на інтервалі $]-1;0[$ коренем λ її характеристичного рівняння. Довільна стала, яка входить в указаний розв'язок, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля і повинна визначатись з розв'язку зовнішньої задачі.

З використанням апарату інтегрального перетворення Мелліна [3] задача зводиться до функціонального рівняння Вінера – Хопфа [2] виду

$$\Phi^+(p) + \frac{c}{p + \lambda + 1} = G(p) \Phi^-(p)$$

($\Phi^\pm(p)$ – невідомі функції) у смузі комплексної площини, що містить уявну вісь. Будується точний розв'язок функціонального рів-

няння, який виражається через інтеграли типу Коші і гамма-функції. При цьому факторизація коефіцієнта рівняння на уявній осі здійснюється шляхом його розщеплення на функцію, що факторизується за допомогою гамма-функцій, і функцію, що факторизується за формулою Гахова [1]. На основі розв'язку рівняння Вінера-Хопфа виводиться формула для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці тріщини.

Дослідження поведінки напружень біля кутової точки крайової задачі теорії пружності. Показано, що ця точка є концентратором напружень з степеневою особливістю. Показник степеня сингулярності напружень залежить від кута, відношення модулів Юнга та від коефіцієнтів Пуассона. Цей показник є найменшим на інтервалі $]-1; 0[$ коренем певного трансцендентного рівняння.

Якщо відношення e_0 модуля Юнга матеріалу з тріщиною до модуля Юнга матеріалу без тріщини менше за 1 (вважається, що коефіцієнти Пуассона дорівнюють 0,3), то при зростанні кута між тріщиною і межею поділу середовищ концентрація напружень біля кутової точки спочатку послаблюється, а потім посилюється. При цьому значення кута, для якого концентрація напружень буде найменшою, належить інтервалу від 80° до 90° і збільшується зі збільшенням e_0 .

Якщо $e_0 > 1$, то при зростанні кута концентрація напружень біля кутової точки спочатку посилюється, а потім послаблюється. При цьому значення кута, для якого концентрація напружень буде найбільшою, належить інтервалу від 90° до 110° і збільшується зі збільшенням e_0 .

Якщо кут прямує до нуля чи 180° , то показник степеня сингулярності напружень прямує до $-0,5$. Зі збільшенням e_0 концентрація напружень біля кутової точки посилюється.

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
2. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л. : Наука, 1967. – 402 с.

ON THE STRESS CONCENTRATION NEAR THE TIPS ON THE CRACK AT THE CORNER POINT OF THE INTERFACE OF MEDIA

The plain plastic symmetric problem of the theory of elasticity fore crack at the corner point of the interface of two isotropic media is considered. The solution of the problem is constructed by the Wiener-Hopf method. The stress behaviour near the tip on the crack is investigated.

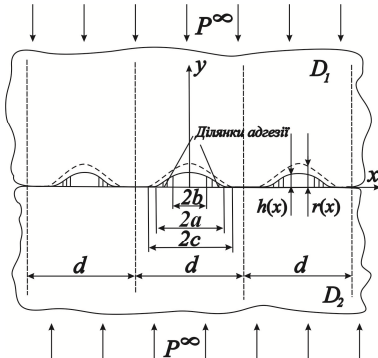
УДК 539.3

КОНТАКТ ТЕКСТУРОВАНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ РІЗНИХ ВИДІВ АДГЕЗІЙНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОВЕРХОНЬ МІЖКОНТАКТНИХ ЗАЗОРІВ

Олег Козачок, Костянтин Чумак, Богдан Слободян

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянемо безфрикційну контактну взаємодію двох пружних ізотропних півнескінченних тіл D_1 і D_2 із різних матеріалів за умов плоскої деформації. Поверхня одного з них має регулярний рельєф, сформований системою періодично розташованих виїмок малої висоти завдовжки $2c$ кожна. Форма виїмки описується деякою парною неперервно-диференційованою функцією $r(x)$ ($r(x) \ll c$, $r(\pm c) = 0$, $r'(\pm c) = 0$). Тіла вступають у контакт під дією рівномірно розподілених на нескінченості стискальних зусиль P^∞ . Внаслідок того, що поверхня одного з тіл є текстурованою, інтерфейс між ними складається з періодичної системи ділянок контакту та періодичної системи зазорів (рис.). Вважаємо, що між поверхнями кожного зазору діють сили адгезії, які зумовлені силами притягання між молекулами поверхонь півпросторів (суха адгезія) або наявністю в області зазорів рідинних містків (капілярна адгезія). Для кількісного опису явища сухої адгезії використано модель міжмолекулярної взаємодії Можіса-Дагдейла [1]. Відповідно до цієї моделі, на тих ділянках зазорів, де їх висота не перевищує деяке критичне значення h_0 , діють сили адгезії сталої інтенсивності σ_0 , а на тих, де їх висота перевищує це критичне значення, поверхні вільні від напружень. У випадку капілярної адгезії вважається, що рідина нестислива, перебуває на краях зазорів і повністю змочує поверхні тіл. На межі менісків $x = \pm b$ діє



адгезії вважається, що рідина нестислива, перебуває на краях зазорів і повністю змочує поверхні тіл. На межі менісків $x = \pm b$ діє

поверхневий натяг σ_0 , тому тиск в рідині описується формулою Лапласа: $P_{liquid} = -2\sigma_0 / h_0$, де $h_0 = h(\pm b)$ – висота меніска [2].

Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [1, 2], задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно функції $h'(x)$:

$$\int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = \frac{Kd}{2} (P^\infty - P(x)) + \int_{-c}^c r'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \quad |x| < a;$$

де $P(x) = \begin{cases} 0, & |x| < b, \\ S_0, & b < |x| < a, \end{cases}$ $S_0 = \sigma_0$ у разі сухої адгезії та

$S_0 = -2\sigma_0 / h_0$ у разі капілярної адгезії;

$K = 2(1 - \nu_1) / G_1 + 2(1 - \nu_2) / G_2$; G_n , ν_n – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла D_n ($n = 1, 2$).

Внаслідок гладкості виїмок береги зазорів плавно зникаються. Тому похідна від висоти зазору в точках змикання повинна задовольняти умову $h'(-b) = h'(b) = 0$, яка забезпечує обмеженість контактних напружень. З використанням відповідної заміни змінних СІР з ядром Гільберта трансформовано в СІР з ядром Коші, розв'язок якого побудовано аналітично.

Довжини зазорів та ділянок адгезії знайдено з системи двох трансцендентних рівнянь, одне з яких отримано з умови існування обмеженого розв'язку СІР, а інше – з умови $h(b) = h_0$ у випадку сухої адгезії або з умови збереження кількості рідини в зазорах з урахуванням її нестисливості у випадку капілярної адгезії. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання цієї системи рівнянь та досліджено вплив двох видів адгезії на контактні параметри розглянутої структури.

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (проект Ф 54.1/042).

1. Chumak K., Chizhik S., Martynyak R. Adhesion of two elastic conforming solids with a single interface gap // J. Adhes. Sci. Technol. – 2014. – 28, №16. – P. 1568-1578.
2. Козачок О.П., Слободян Б.С., Мартыняк Р.М. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // Теоретическая и прикладная механика – 2014. – Вып. 7 (53). – С. 45-52.

CONTACT OF TEXTURED BODIES TAKING INTO ACCOUNT VARIOUS TYPES OF ADHESIVE INTERACTION BETWEEN SURFACES OF INTERCONTACT GAPS

The adhesive interaction between two elastic solids, one of which has textured surface, is investigated. Two types of adhesion, namely dry adhesion and capillary adhesion, are taken into account. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation with Hilbert kernel for a height of the gaps, which is solved analytically, and a system of two transcendental equations for a length of the gaps and a length of the adhesion zones, which is solved numerically. The effect of dry and capillary adhesion on contact parameters of the contact pair considered is analyzed.

УДК 539.3

**ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ
ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ У ДВОВИМІРНОМУ ТІЛІ З
КРИВОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ІМПУЛЬСНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

Володимир Кравець, Ярема Осів

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Розв'язано плоску динамічну задачу теорії пружності (плоска деформація) для нескінченного ізотропного тіла з гладкою криволінійною тріщиною різної форми за імпульсного самозрівноваженого навантаження на її берегах. Застосований підхід базується на поєднанні модифікованого методу скінченних різниць за часом [2] і методу сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь за просторовими змінними [1, 3].

Для плоскої динамічної задачі лінійної теорії пружності компоненти переміщень у декартовій системі координат Oxy виражаються через два хвильові потенціали $\Phi_1(z, t), \Phi_2(z, t)$, $(z = x + iy)$: $u(z, t) = \partial\Phi_1/\partial x + \partial\Phi_2/\partial y$, $v(z, t) = \partial\Phi_1/\partial y - \partial\Phi_2/\partial x$. Динамічні рівняння руху тіла (області S) у переміщеннях можна записати у вигляді

$$\nabla^2 \Phi_m(z, t) - \left\{ \partial^2 \Phi_m(z, t) / \partial t^2 \right\} / c_m^2 = 0; z \in S; m = 1, 2, \quad (1)$$

де $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ – швидкості поширення поздовжніх та поперечних пружних хвиль у тілі з густиною ρ , λ, μ – сталі Ламе, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – двовимірний оператор Лапласа.

На берегах тріщини L задані динамічні нормальні та дотичні самозрівноважені напруження:

$$\{N(\zeta, t) + iT(\zeta, t)\}^\pm = f(\zeta, t); \quad \zeta \in L, \quad (2)$$

які відповідним чином виражаються через граничні значення хвильових потенціалів $\Phi_1(\zeta, t), \Phi_2(\zeta, t)$ [1]. На переміщення та напруження у тілі накладено нульові початкові умови, які через хвильові потенціали подано у вигляді

$$\Phi_m(z, t)|_{t=0} = 0; \quad \partial \Phi_m(z, t) / \partial t|_{t=0} = 0; \quad z = x + iy \in S; \quad m = 1, 2. \quad (3)$$

Для розв'язування граничної задачі (1)–(3) використано модифікований метод скінченних різниць за часом [2]. Загальні розв'язки рівнянь (1) у кожний дискретний момент часу

$$t_j = \sum_{v=1}^j \Delta t_v, \Delta t_v = t_v - t_{v-1}, t_0 = 0 \text{ шукаємо у вигляді сум}$$

$$\Phi_m^j = \sum_{v=1}^j \omega_{jv} \hat{\Phi}_m^v(x, y), \text{ де } \omega_{jv} = \omega_{jv}(\Delta t_j) - \text{відомі коефіцієнти [2],}$$

$m = 1, 2; j = 1, 2, 3, \dots$ За початкових умов (3) задачу зведено до розв'язування двох ($m = 1, 2$) систем однорідних диференційних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}_m^j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_m^j}{\partial y^2} - \chi_{mj}^2 \hat{\Phi}_m^j = 0; \quad \chi_{mj} = 1 / (c_m \Delta t_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

з новими крайовими умовами на контурі тріщини ($\zeta \in L$) [1]

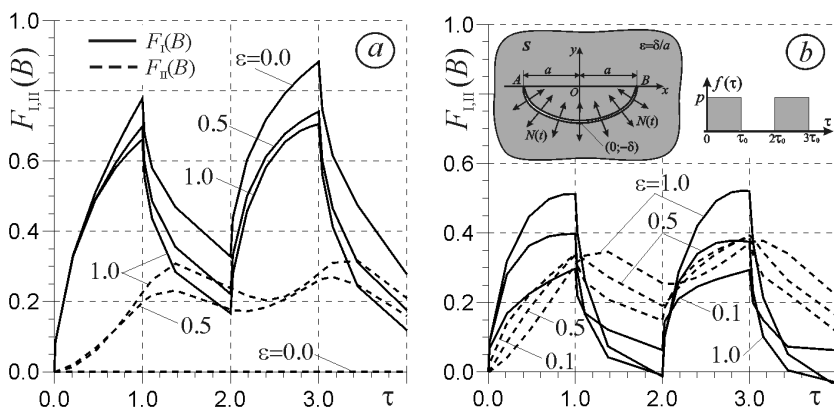
$$\hat{N}^j(\zeta) + i\hat{T}^j(\zeta) = \hat{f}^j(\zeta) \equiv f^j(\zeta) - \sum_{v=1}^{j-1} \omega_{jv} \hat{f}^v(\zeta); \quad j = 2, 3, \dots; \quad f^j(\zeta) = f(\zeta, t_j). \quad (5)$$

Використовуючи фундаментальний розв'язок рівнянь Гельмгольца (4) знайдено інтегральні зображення хвильових потенціалів $\hat{\Phi}_m^j$ через функцію стрибка переміщень на контурі тріщини та її похідну [3]. Задовольнивши за їх допомогою крайові умови (5), задачу зведено до розв'язування послідовного набору (у кожний момент часу $t = t_j$) комплексних сингулярних інтегро-

диференційних рівнянь. Ядра цих рівнянь залежать від геометрії контурів тріщин, механічних параметрів тіла і крім регулярних складових містять логарифмічні особливості та особливості типу Коші [1,3].

Розв'язки отриманих інтегро-диференційних рівнянь знайдено методом механічних квадратур для ударних [3] та імпульсних навантажень на берегах гладкої криволінійної тріщини різної форми. Проведено розрахунки часових залежностей відносних динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень $F_{I,II}(\tau) = K_{I,II}(\tau) / p\sqrt{\pi a}$; $\tau = c_2 t / a$ у вершинах параболічної (рис. а) та півеліптичної (рис. б) тріщин (для різних їх центральних прогинів $\varepsilon = \delta / a$) за дії рівномірно розподілених вздовж берегів тріщин імпульсних нормальних напружень (2)

$$f(\zeta, \tau) = \{p, \tau \in (0, \tau_0] \cup (2\tau_0, 3\tau_0]; 0, \tau \in (\tau_0, 2\tau_0] \cup (3\tau_0, \infty)\}, \tau_0 = 1.$$



1. Кравець В.С. Метод сингулярних інтегро-диференційних рівнянь у плоских динамічних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – №2. – С. 95–110.
2. Саврук М.П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – №4. – С. 7–11.
3. Саврук М.П., Кравець В.С. Розрахунки динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у пружних двовимірних тілах з криволінійними тріщинами // Вісник ТНТУ – 2013. – №4 (72). – С. 16–28.

DETERMINATION OF THE DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTORS IN TWO-DIMENSIONAL BODY WITH CURVILINEAR CRACKS UNDER PULSE LOADING

A solution method for plane dynamic problems of elasticity theory is based

on the combination of the modified finite-difference method at time and singular integral equations method for space variables. The boundary value problem is reduced to the systems of singular integral-differential equations at the time nodes. A time dependent stress intensity factors are obtained for an infinite elastic body (plane deformation) with parabolic or half-elliptical crack under impulse normal and tangential loading.

УДК 539.375

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ СКІНЧЕНОЇ ШИРИНИ ЗА УМОВ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ

Надія Крива, Андрій Бойко

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя
вул. Руська, 56, м. Тернопіль, 46001, Україна

Задачі дослідження напружено деформованого стану (НДС) тіл з включеннями за умови недосконалого механічного контакту із середовищем залишаються сьогодні актуальними та практично важливими. Безперечний інтерес представляють дослідження пластичного відшаровування (розвитку пластичних шарів на межі включення середовище) за наявності міжфазних тріщин.

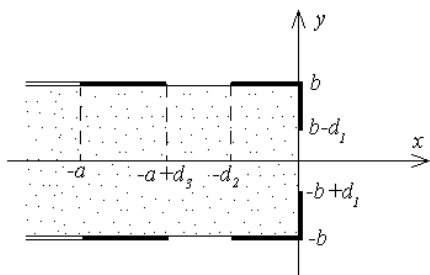


Рис. 1. – Поперечний переріз тіла.
Потовщені лінії – смуги пластичного
відшаровування.

Нижче дослідимо пластичне відшаровування жорсткого тонкого прямокутного включення за наявності однакових міжфазних тріщин на його більших гранях (рис. 1), розташованими на деякій однаковій від його вершин відстані.

Вважатимемо також, що поверхні тріщин є вільними і не контактують з включенням. Деформування спричинено квазістатично зростаючим зсувним навантаженням, паралельним довшим граням

включення, прикладеним на великій віддалі від включення. Вершини включення та вершини міжфазних тріщин є концентраторами напружень, починаючи від яких вздовж поверхні включення поширюватимуться смуги пластичного відшаровування, розвиток яких належить дослідити. Матеріал тіла вважатимемо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості рівною k .

Довжину включення і тріщин вважатимемо настільки великою проти товщини включення, що для аналізу розвитку пластичних смуг довжину включення можна приймати нескінченною $-\infty < x \leq 0$. У поперечному перерізі тіла включення займає область $-\infty < x \leq 0, -b \leq y \leq b$, b – півтовщина включення. Міжфазним тріщинам у площині поперечного перерізу відповідають промені $-\infty < x \leq a, y = \pm b$. У початковому стані контакт включення із середовищем був втраченим вздовж його горизонтальних граней за винятком ділянок довжиною a , що безпосередньо примикають до вершин включення. Довжини вертикальних та горизонтальних пластичних шарів, що розвиваються від вершин включення, відповідно рівні d_1 і d_2 , а довжина шару на продовженні міжфазних тріщин – d_3 .

Поза включенням тіло перебуває у пружному стані, а складена із компонент напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ є аналітичною у області $D = \{x > 0, y > 0\} \cup \{x \leq 0, y > b\}$ та задовольняє на її межі таким умовам:

$$\operatorname{Re} \tau(\zeta) = 0, (\zeta = x + ib, -\infty < x < -a);$$

$$|\tau_1(\zeta)| = k, (\zeta = x + ib, -a < x < -a + d_3);$$

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, (\zeta = x + ib, -a + d_3 < x < -d_2);$$

$$|\tau_1(\zeta)| = k, (\zeta = x + ib, -d_2 < x < 0);$$

$$|\tau_1(\zeta)| = k, (\zeta = iy, b - d_1 \leq y \leq b);$$

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, (\zeta = iy, 0 \leq y \leq b - d_1);$$

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, (\zeta = x, 0 < x < +\infty);$$

$$\tau(\zeta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi\zeta}} + o\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right), \zeta \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Розв'язок задачі (1) отриманий методом конформних відображень:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t), \quad (t \in H = \{\operatorname{Im} t > 0\}), \quad (2)$$

де

$$\zeta(t) = ib + \frac{2b}{\pi(1-t_K)} \left(\sqrt{(t-1)(t-t_K)} + \ln \left(\sqrt{1-t} - \sqrt{t_K-t} \right) \right),$$

$$\tau(t) = k \sqrt{\frac{1-t_E}{(t_E-t_C)(t_E-t_D)}} \frac{\sqrt{(t-t_B)(t-t_E)} - \sqrt{(t-t_C)(t-t_D)}}{\sqrt{t-1}},$$

t_B – розв'язок рівняння:

$$\sqrt{(t_B-1)(t_B-t_K)} + \ln \left(\sqrt{1-t_B} - \sqrt{t_K-t_B} \right) = \frac{\pi a}{2b}.$$

Параметри t_E , t_C і t_D визначаються співвідношеннями:

$$t_C = f \left(-\frac{\tau_0}{\tau_1} \frac{k^2 - \tau_1^2}{k^2 - \tau_0^2} \right), \quad t_D = f \left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \frac{k^2 - \tau_1^2}{k^2 - \tau_0^2} \right),$$

у яких

$$f(u) = \frac{2(u-u_0)}{(u+1)(1-u_0)},$$

$$u_0 = \frac{\tau_0}{\tau_1} \sqrt{\frac{(k^4 + \tau_1^4)(t_B t_E - t_C t_D) - 2k^2 \tau_1^2 (t_B t_E + t_C t_D)}{(k^4 + \tau_0^4)(t_B t_E - t_C t_D) - 2k^2 \tau_0^2 (t_B t_E + t_C t_D)}},$$

$$\tau_1 = \min_{[-a+d_3; -d_2]} \tau(x, b), \quad \tau_0 = \min_{[0, +\infty)} \tau(x, 0),$$

та задовольняють рівності:

$$t_E t_B - t_C t_D = t_E + t_B - t_C - t_D.$$

Виконано числові експерименти, в результаті яких досліджено закономірності й особливості пластичного відшаровування тонкого жорсткого включення за умови його неповного контакту з середовищем.

1. Сullym Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.
2. Kryven V.A., Sulym G.T., Yavorska M.I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // JTAM. – V.44. – No. 4. – 2006. – P. 837-848.

3. Kryven' V.A., Yavors'ka M.I., Kaplun A.V., Valiashek V. B. Plastic exfoliation of a rigid rectangular inclusion under the action concentrated forces. Journal of Mathematical Sciences // Vol. 198, No. 2. – 2014. – P. 119-131.

PLASTIC EXFOLIATION OF SEMI-INFINITY INCLUSION OF FINITE WIDTH UNDER NONIDEAL CONTACT

The quasi-static plastic exfoliation of rigid tunnel inclusion bounded on each side by two cylindrical surfaces was studied. Deformation due to shear load applied at infinity. The analytical solution of the problem was obtained, the stress-strain state was defined, the development of plastic bands exfoliation was investigated.

УДК 539

ПРО ОДИН КРИТЕРІЙ РУЙНУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО - ІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ МІЖФАЗНИМИ ДЕФЕКТАМИ

Олександр Кривий

*Одеська національна морська академія,
вул. Дідріхсона, 8, м. Одеса, 65029, Україна*

Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально - ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область Ω . До включення прикладене довільне навантаження, дію якого прирівнювали до дії рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Розташування граней включення після деформації описують функції

$$\begin{aligned}\zeta_k^\pm &= \zeta_k^0 + \mathfrak{g}_0^\pm(x, y), \quad \zeta_k^\pm = \zeta_k^0, \quad k = 4, 5; \quad (x, y) \in \Omega, \\ \zeta_4^0 &= \delta_x - \phi_z y, \quad \zeta_5^0 = \delta_y + \phi_z x, \quad \zeta_6^0 = \delta_z + \phi_y x + \phi_x y, \\ \zeta_k^\pm &= \gamma_k(x, y, \pm 0), \quad \vec{\gamma} = \{\gamma_k\}_{k=\overline{1,6}} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\},\end{aligned}$$

де $\mathfrak{g}_0^\pm(x, y)$ - товщина включення, при $z = \pm 0$; $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ - поступальні переміщення та кути повороту включення навколо

відповідних осей. В залежності від типу контактної взаємодії включення із півпросторами відомими будуть шість із дванадцяти функцій $\zeta_k^\pm$, $k = \overline{1,6}$. Відносно інших функцій, за допомогою двовимірних сингулярних інтегральних співвідношень для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [1, 2], отримані системи двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Для кругових включень запропоновано метод розв'язання вказаних систем [3-5], що дозволило отримати в явному вигляді вирази для напружень і переміщень в околі включень. Величини $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ визначали із шести рівнянь рівноваги:

$$\iint_{\Omega} \chi_k^-(x, y) dx dy = P_k, \quad k = \overline{1,3}, \quad (\chi_k^- = \gamma_k(x, y, +0) - \gamma_k(x, y, -0))$$

$$\iint_{\Omega} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \chi_1^-(x, y) dx dy = \begin{pmatrix} M_2 \\ M_1 \end{pmatrix}, \quad \iint_{\Omega} (x \chi_2^-(x, y) - y \chi_3^-(x, y)) dx dy = M_3.$$

В результаті подані вирази для поступальних і кругових переміщень включення через компоненти векторів **P** і **M**. Зокрема, для відшарованого тонкого включення радіуса a вказані вирази мають вигляд

$$\delta_z = -c_z \frac{P_3}{a} - c_z^0 a P_3^0, \quad \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} = -\frac{c_{xy}}{a} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + c_{xy}^0 a \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix} + \frac{c_{xy}^m}{a^2} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_z = s_z \frac{M_3}{a^3}, \quad \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \frac{s_{xy}}{a^2} \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \end{pmatrix} - s_{xy}^0 \begin{pmatrix} P_2^0 \\ P_1^0 \end{pmatrix} - \frac{s_{xy}^m}{a^3} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти впливу $c_z, c_z^0, c_{xy}, c_{xy}^0, c_{xy}^m, s_z, s_{xy}, s_{xy}^0, s_{xy}^m$ подані через пружні сталі півпросторів, $\mathbf{P}^0 = \{P_j^0\}^3$ – рівнодійна сили, прикладеної до нижнього ($z = -0$) півпростору, відшарованого від включення.

Вказані залежності отримані для різного типу контактної взаємодії включення із півпросторами і дозволяють визначити навантаження за якого деформації середовища в околі включення набудуть деяких критичних значень.

1. *Кривий О.Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 23-35.

2. Kryvyi O. The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 387-398.
3. Кривий О.Ф. Кругова міжфазна тріщина в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **46**, № 6. – С. 47-57.
4. Кривий О.Ф. Міжфазні кругові включення в кусково-однорідному трансферсально-ізотропному просторі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 173-183.
5. Кривий О.Ф. Міжфазні кругові включення при змішаних умовах в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 2. – С. 89-102.

ON A FRACTURE CRITERION PIECEWISE-HOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC BODIES WITH INTERFACE DEFECTS

With the help of the derivation of an analytic solutions of interface problems non axisymmetric circular inclusions in a piecewise-homogeneous transversely isotropic space, dependence translational and circular movements the components of the inclusions of the resultant force, and the main moment. Specified dependences were obtained for different types of contact interaction inclusions with the halfspace turn and allow to determine the load at which the deformation of the medium in the neighborhood of the inclusion will reach of some critical values.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО РОЗТАШОВАНИМИ РОЗРІЗАМИ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ ТА РОЗВАНТАЖЕННЯ

Ігор Кузь, Ольга Кузь, Назарій Пиз

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна;*

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна*

Розвинуто застосування варіаційно-різницевого методу [1] розв'язування задач теорії малих пружно-пластичних деформацій [2] до лінійно зміцнюваних пластин із розрізами [3] з урахуванням

їхнього розвантаження та здійснено підбір ітераційних параметрів [4] методів розв'язування отриманих після дискретизації систем лінійних та нелінійних алгебричних рівнянь [5].

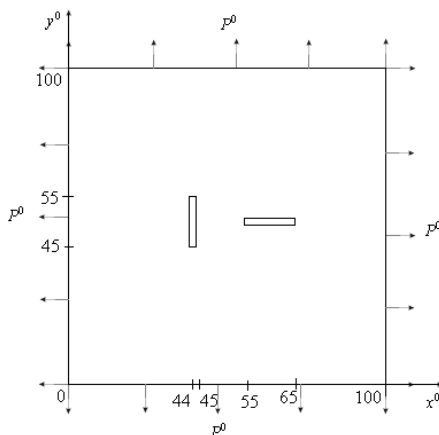


Рис. 1. Пластина з двома перпендикулярно розташованими розрізами та крайовими умовами на зовнішній межі

За допомогою розвинутого варіаційно-різницевого методу отримано числовий розв'язок двох задач: задачі про двовісний розтяг пружно-пластичної пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу (рис. 1) та такої ж задачі при зближенні розрізів (за умови, що відстань між розрізами становить лише менший розмір розрізу). На рис. 1 подано геометрію пластини з розрізами для першої задачі та крайові умови на зовнішній межі. Тут введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$). До усіх країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

Побудовано зони еволюції пластичних деформацій в пластинах за покрокового збільшення навантаження та діаграми розподілу інтенсивності тензора залишкових деформацій після їхнього повного розвантаження.

З'ясовані напруження, за яких досягаються межі течіння та міцності [6] в пластинах з двома перпендикулярно розташованими розрізами.

На основі числового аналізу виявлено такі основні закономірності: при ближчому взаємному розташуванні розрізів пластичні

деформації виникають за напруження P^0 на 33% меншого, ніж у пластині з такими ж розрізами при їхньому дальшому розташуванні; проте утримувальна здатність пластин в обидвох розглядуваних випадках втрачається практично за однакового напруження P^0 .

1. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
2. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории – М.: Изд-во АН СССР, 1963 – 272 с.
3. Кузь І., Тімар І. Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 148-154.
4. Шешенин С.В., Кузь І.С. О прикладных итерационных методах // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – М. – 1990. – Вып. 1. – С. 63-74.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений – М.: Наука, 1978. – 592 с.
6. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності – Львів: Світ, Т. 1. – 1999. – 532 с., Т. 2. – 1999. – 419 с.

STRESS-STRAIN STATE OF ELASTIC-PLASTIC PLATES WITH PERPENDICULAR PLACING CUTS TAKING INTO ACCOUNT STRENGTHENING AND UNLOADING

A variety of problems concerning two-axis stretching of elastic-plastic plates with perpendicular placing cuts is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed, the remaining deformations after unloading and the limit loads are obtained.

УДК 620.192.46:004.94:661.665.3

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРІЩИН В КЕРАМІЦІ НА ОСНОВІ КАРБІДУ БОРУ

Олександр Лещук, Іван Євдокимов

*Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України,
вул. Автозаводська, 2, Київ, 04074, Україна*

Тріщиностійкість є однією з найважливіших характеристик

керамічного матеріалу. Для її визначення запропоновано метод чисельного моделювання зростання тріщини крізь мікроструктуру матеріалу.

Розрахунки проводили для керамічних матеріалів B_4C , B_4C+TiB_2 (15 % по масі), $B_4C+Al_2O_3$ (5 % по масі)+Al (<1 % по масі). Фазові складові мікроструктури розглядаються як ізотропні та бездефектні. Їх механічні властивості взяті з літературних джерел [1–5]. На жаль, практично неможливо отримати механічні характеристики міжкристалітного шару. Його властивості прийняті як для найслабкішої фази мікроструктури. Двовимірний зразок мікроструктури навантажується розтягуючим зусиллям. Критерії виникнення та росту тріщини – області дії максимальних головного напруження та енергії руйнування. Пластичну течію у гирлі тріщини не розглядали. Розрахунки проводили розширеним скінченно-елементним методом (XFEM) за допомогою програми Simulia Abaqus.

Моделювання показало змішаний транс-інтеркристалітний характер росту тріщини. Отримані результати можна використовувати для оцінки впливу домішок на напрямок росту тріщини в різнофазному керамічному матеріалі та умову зупинки її росту. Визначено, що в різнофазних керамічних матеріалах на основі карбіду бору тріщина проходить мікроструктурну область однакового розміру різним шляхом, а отже з різним значенням витраченої енергії. Отримані енергетичні показники використані для визначення коефіцієнта тріщиностійкості за формулами механіки руйнування [6].

Проведені розрахунки показали якісно вірні результати: найбільші значення енергії росту тріщини мають місце в мікроструктурі кераміки B_4C+TiB_2 ; найменші показники енергії росту тріщини має однофазна кераміка B_4C . Абсолютні значення тріщиностійкості декілька розбігаються з експериментальними. Для доведення результату до задовільного рівня потрібно враховувати дефекти мікроструктури, а також залишкові температурні напруження, що мають місце після спікання матеріалу.

1. Deng J., Zhou J., Feng Y., Ding Z. Microstructure and mechanical properties of hot-pressed $B_4C/(W,Ti)C$ ceramic composites // *Ceram. Int.* – 2002. – **28**, No. 4. – P. 425-430.
2. Deng J., Sun J. Microstructure and mechanical properties of hot-pressed $B_4C/TiC/Mo$ ceramic composites // *Ibid.* – 2009. – **35**, No. 2. – P. 771-778.
3. Івженко В.В., Кайдаш О.Н., Сарнавская Г.Ф. и др. Особенности формирования структуры и свойств материалов из порошковой системы B_4C-TiH_2 при реакционном спекании под давлением // – *Сверхтв. материалы.* – 2011. – № 1. – С. 46-58.
4. Ткаченко Ю.Г., Юрченко Д.З., Сульженко В.К. и др. Влияние темпера-

- туры на изменение прочности при изгибе горячепрессованных материалов на основе карбида бора // Порошк. металлургия. – 2007. – № 5/6. – С. 60-68.
5. Domnich V., Reynaud S., Haber R.A., Chhowalla M. Boron carbide: structure, properties and stability under stress // J. Am. Ceram. Soc. – 2011. – **94**. – P. 3605-3628.
6. Anderson T.L. Fracture Mechanics – fundamentals and applications: 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press LLC, 1995. – 680 p.

NUMERICAL SIMULATION OF CRACK GROWTH IN BORON CARBIDE-BASED CERAMICS

A finite element analysis of crack growth in 2D microstructure was done for ceramic materials based on boron carbide. XFEM, maximal principal stress and fracture energy are components of simulation method for defining parameters of crack growth. Resulting fracture energies for B_4C , B_4C+TiB_2 , $B_4C+Al_2O_3+Al$ show good qualitative results. To receive more accurate results the microstructure defects should be included in simulation method.

УДК 539.3

ПРО ЗГИН ПЛАСТИНИ З ЧАСТКОВО ЗАЛІКОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Микола Маковійчук

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

Досліджується згин безмежної пластини, що розміщена на пружній основі Вінклера і послаблена наскрізною частково залікованою тріщиною, здатною до закриття. Вважається, що на деякій ділянці (або кількох ділянках) тріщини відновлена суцільність пластини із збереженням пружних властивостей тіла, причому питома поверхнева енергія роз'єднання поверхонь на залікованій ділянці є інша, ніж у суцільному тілі (зазвичай менша). У результаті, маємо контактну задачу механіки тріщини у однорідній за пружними властивостями та неоднорідній за тріщиностійкістю пластині [1].

Дослідження проведено для випадку рівномірно розподіленого згинального навантаження на прямолінійній тріщині з урахуванням контакту її берегів [2], для двох варіантів заліковування: поблизу

вершин та посередині симетрично відносно центра дефекту. Для побудови розв'язків задач скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь та числовим методом квадратур. За знайденими стрибками переміщень та кутів повороту нормалі підраховано коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефекту. Граничне навантаження, при якому розпочинається поширення тріщини визначалося із енергетичного критерію руйнування при комбінованому розтязі та згині. Досліджено вплив якості та кількісної міри відновлення суцільності на ефективність заліковування дефектного об'єкта на пружній основі.

1. Шацький І.П. Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною // Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2014. – № 1. – С. 91-93.
2. Шацький І.П., Маковійчук М.В. Контактна взаємодія берегів тріщини під час згину пластини на пружній основі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 3. – С. 59-62.

ABOUT BENDING OF PLATE WITH THE PARTIALLY HEALED CRACK ON ELASTIC FOUNDATION

The problem of bending of the plate with partially healed crack on the elastic foundation has been considered in two-dimensional statement. The crack closure effect under bending is taken into account. On the recovered area of crack continuity takes place while surface energy differs from that in undamaged body. The influence of quality and quantitative measure of healing on healing efficiency of damaged object has been investigated.

УДК 539.3

НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ СИСТЕМИ КРАЙОВИХ ТРІЩИН У АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ОТВОРОМ

Олеся Максимович, Віктор Божидарнік

*Луцький національний технічний університет,
вул. Львівська, 75, м. Луцьк, 43018, Україна*

Методам розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для крайових тріщин у анізотропних пластинках із отворами присвячено відносно невелика кількість робіт. Огляд виконаних у даному напрямку досліджень для ізотропних пластинок наведено в

[2]. При розгляді крайових тріщин виникають певні труднощі при задоволенні умов однозначності переміщень. В даній роботі запропоновано підхід до розрахунку напруженого стану пластинок з крайовими тріщинами біля отвору в анізотропних пластинках на основі модифікованих інтегральних рівнянь.

Розглядається нескінченна пластинка з отвором, яка послаблена системою крайових тріщин, що розміщені вздовж кривих $L_j, j = 1, \dots, J$. Прийmemo, що пластинка навантажена на нескінченності й зосередженими силами та зусиллями

$$-\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{d}(\tau_1 - z_1) + \frac{\pi}{d}(\bar{\tau}_1 - \tau_1 + z_1)\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{d}(\tau_1 - z_1)\right)g_1'(\tau_1)d\tau_1,$$

прикладеними до берегів тріщин.

При розгляді поставленої задачі у випадку внутрішніх тріщин виходять із інтегрального зображення у вигляді [1]

$$\Phi(z_1) = \int_L [\Phi_1(z_1, \xi, \eta)g_1'(s) + \Phi_2(z_1, \xi, \eta)g_2'(s)]ds + \Phi_D(z_1),$$

$$\Psi(z_2) = \int_L [\Psi_1(z_2, \xi, \eta)g_1'(s) + \Psi_2(z_2, \xi, \eta)g_2'(s)]ds + \Psi_D(z_2), \quad (1)$$

де потенціали $\Phi_j(z_1, \xi, \eta)$, $\Psi_j(z_1, \xi, \eta)$, ($j=1, 2$) мають наступні особливості

$$\Phi_j(z_1) \sim \frac{A_j}{z_1 - z_{j0}}, \quad \Psi_j(z_2) \sim \frac{B_j}{z_2 - z_{j0}} \quad (2)$$

та є розв'язком задачі теорії пружності для області, яку займає пластинка поза отвором (область D) із вільною від навантаження межею, $z_j = x + s_j y$, $z_{j0} = \xi + s_j \eta$, $L = L_1 + \dots + L_J$, $(\xi, \eta) \in L$, A_j, B_j – відомі сталі, s_j – корені характеристичного рівняння [1], s – дугова координата, a_{11} – пружна стала, $g_j' = dg_j / ds$, g_j – невідомі функції, які рівні стрибкам переміщень u і v на берегах тріщини. Тут $\Phi_D(z_1)$, $\Psi_D(z_2)$ – потенціали, які відповідають навантаженню, прикладеному до пластинки з отвором (без тріщини).

При записі інтегрального зображення для випадку крайової тріщини необхідно врахувати, що у вершині тріщини (c_0, d_0), яка виходить із межі отвору, вектор переміщень має ненульовий стрибок, який позначимо через (H_1, H_2) . Тому, на відміну від внутрішніх тріщин, в яких стрибки переміщень у вершинах рівні нулю, їх диференціювання необхідно проводити в сенсі узагальнених

функцій. Тоді з (1) для випадку однієї крайової тріщини отримаємо інтегральне зображення розв'язку

$$\begin{aligned}\Phi(z_1) = & \int_L [\Phi_1(z_1, \xi, \eta) g_1'(s) + \Phi_2(z_1, \xi, \eta) g_2'(s)] ds + \\ & + H_1 \Phi_1(z_1, c_0, d_0) + H_2 \Phi_2(z_1, c_0, d_0) + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) = & \int_L [\Psi_1(z_2, \xi, \eta) g_1'(s) + \Psi_2(z_2, \xi, \eta) g_2'(s)] ds + \\ & + H_1 \Psi_1(z_2, c_0, d_0) + H_2 \Psi_2(z_2, c_0, d_0) + \Psi_D(z_2),\end{aligned}\quad (3)$$

причому тут під інтегралами похідні $g_{1,2}'$ розглядаються в класичному сенсі. Очевидно, що мають місце рівності

$$H_j = - \int_L g_j'(s) ds, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

які можна розглядати як умови однозначності переміщень.

Підставивши зображення (3) в формули для визначення вектора напружень на тріщині та використавши формули Сохоцького, отримано систему інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень берегів тріщин. Розв'язування інтегральних рівнянь проведено методом механічних квадратур. Зображення (3) справедливі й для випадку системи крайових тріщин, якщо прийняти $L = L_1 + \dots + L_J$.

Розрахунки виконано для анізотропної пластинки з еліптичним отвором із півсями a , b , що послаблена системою крайових, перпендикулярних до межі тріщин. На основі виконаних розрахунків встановлено: при збільшенні кількості тріщин значення КІН зменшуються за величиною; КІН для тріщин, що паралельні армованим елементам близькі до значень КІН у ізотропній пластинці; КІН для цих матеріалів максимальні для крайніх тріщин і мінімальні – для центральної тріщини. Звідси випливає, що із системи тріщин підростатимуть крайні тріщини, якщо напрямок з більшою жорсткістю паралельний тріщинам та центральна тріщина – якщо тріщина перпендикулярна до цього напрямку.

1. *Божидарнік В.В., Максимович О.В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. *Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук І.В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.

TENSION NEAR THE SYSTEM OF REGIONAL CRACKS IS IN AN ANISOTROPIC PLATE WITH OPENING

The algorithm of determination of the tense state of anisotropic plates with regional cracks, which go out on the limit of the elliptic opening, is offered. For untieing of task the modified integral equalizations for which terms on verge of opening are executed identically are built. The examples of calculation of coefficients of intensity of tensions are resulted, cases are set, when anisotropy little or substantially influences on tension near cracks.

УДК 539.3

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШТАМПІВ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ З ПРУЖИМ ПІВПРОСТОРОМ ІЗ УРАХУВАННЯМ ЗНОШУВАННЯ МАТЕРІАЛУ

Олександр Максимук, Юрій Сачук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки,
пр-т Волі, 13, м. Луцьк, 79060, Україна*

Статистичний аналіз виходу з ладу контактних пар машин і механізмів показує, що основною причиною є не їх поломка, а зношування поверхонь. До основних параметрів, які характеризують процес зношування відносяться: величина зношування – зміна форми, що визначається в одиницях довжини, об'єму або маси; швидкість зношування – величина зношування за одиницю часу.

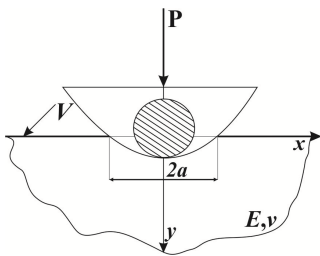


Рис. 1

На основі цих двох показників можна в інженерних розробках здійснювати прогнозування часу роботи основних вузлів при заданих умовах експлуатації.

В роботі розглядається контактна задача про вдавлювання з проковзуванням жорсткого штампа (циліндричної, еліптичної або гіпер-

болічної форми [1]) в пружну півплощину (рис. 1.) із урахуванням зношування матеріалу (плоска задача).

Нехай сила тертя, яка є пов'язана із контактним тиском функцією F , вважається відомою, область контакту $2a$ є величина стала, k_1 – коефіцієнт пропорційності між роботою сил тертя та величиною зношення, $p(x, t)$ – контактний тиск. Тоді величина зношування визначається за формулою [2]:

$$v_* = k_1 V \int_0^t F[p(x, t)] dt, |x| < a. \quad (1)$$

В умовах лінійної моделі зношування та з урахуванням пружного контакту тіл, інтегральне рівняння для визначення контактного тиску матиме вигляд [2]:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a}^a p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} + k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt = -\frac{df(x)}{dx}, \quad (2)$$

$f(x)$ – описує профілі різних штампів, k_2 – коефіцієнт тертя.

Розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді:

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t}. \quad (3)$$

Після підстановки (3) у (2) дістаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\int_{-1}^1 P(\tau, 0) \frac{d\tau}{\tau - x} = \frac{df(x)}{dx}, \quad (4)$$

$$\alpha_{2k} \int_{-1}^1 \phi_{2k}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - x} - \frac{d\phi_{2k}(x)}{dx} = 0, |x| < 1. \quad (5)$$

Однорідна система (5) була зведена до вирішення узагальненої задачі на власні значення та вектори. Для цього було побудовано програмні модулі в системі Matlab R2013a, за допомогою якого отримано власні значення і відповідні їм власні вектори [3].

Для однозначного визначення власних векторів використано неоднорідне рівняння (4) та представлення функцій $\phi_{2k}(x)$ за поліномами Чебишева другого роду. Задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Отриманий числовий розв'язок дає змогу визначити швидкість

зношування контактних поверхонь і тим самим прогнозувати зносостійкість контактної пари.

1. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики» 21-25 травня 2013 р. – Львів, 2013. – 72-73 с.
2. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук Л.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел сопокритиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
3. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 240 с.

CONTACT INTERACTION STAMPS CANONICAL FORM OF AN ELASTIC HALF-SPACE, TAKING INTO ACCOUNT THE WEAR MATERIAL

УДК 539.3

**ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ
ПІД ДІЄЮ ЗМІННОГО В ЧАСІ НАВАНТАЖЕННЯ ДО СИСТЕМИ
СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Мирон Николишин, Микола Махоркін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

З огляду на необхідність прогнозування надійності оболонкових структур різної конфігурації особливу увагу викликає вивчення напружено-деформованого стану оболонок в околі концентраторів напружень, за дії змінного в часі навантаження.

Вивчається напружено-деформований стан замкнутої безмежної циліндричної оболонки з наскрізним поздовжнім розрізом, довжиною $2l$, до берегів якого прикладене навантаження, що змінюється за експоненціальним законом. Дану задачу зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь, ґрунтуючись на методиці поданій в [1] для статичного навантаження.

Відтак вирази для поля вільних від напружень деформацій вздовж розрізу, за вказаних умов, подано у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [v(\alpha, \tau)] \delta(\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [u(\alpha, \tau)] \delta(\alpha), \\ \kappa_{\beta\beta}^0 &= \kappa_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-1} \left\{ [\theta_\beta(\alpha, \tau)] \delta(\beta) - R^{-2} [w(\alpha, \tau)] \partial_\beta \delta(\beta) \right\}, \\ \kappa_{\alpha\beta}^0 &= \kappa_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-2} \partial_\alpha [w(\alpha, \tau)] \delta(\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 = \kappa_{\alpha\alpha}^0 = 0,\end{aligned}\quad (1)$$

де ε_{ij}^* , κ_{ij}^* ($i, j = \alpha, \beta$) – не залежать від часу; $[u(\alpha)]$, $[v(\alpha)]$, $[w(\alpha)]$, $[\theta_\beta(\alpha)]$ – стрибки переміщень та кутів повороту [1]; τ – час; γ – деякий сталий коефіцієнт розмірності $[c^{-1}]$, а систему рівнянь рівноваги в переміщеннях згідно з [1, 3] отримано –

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_\tau^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

де L_{km} ($m = 1, 2, 3$) – оператори, вигляд яких подано у [2]; $g_1 = u$; $g_2 = v$; $g_3 = w$; q_i^{0*} – праві частини рівнянь, котрі обчислюють за виразами поданими [2]; $c_\tau^2 = E\rho^{-1}(1 - \nu^2)^2$.

Згідно міркувань аналогічних поданим у [1] розв'язок (2) подано так:

$$f(\alpha, \tau) = f^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 \left(L_{jf}^* \varphi_j + P_{jf}^* \psi_j \right) e^{\gamma\tau} \quad (f = \{u, v, w\}). \quad (3)$$

Тут $L_{kl}^* = L_{kl} + L_{kl}^{**}$, $P_{kl}^* = P_{kl} + P_{kl}^{**}$ ($l = u, v, w$), де L_{kl} , P_{kl} – оператори тотожні поданим у [1], а L_{kl}^{**} , P_{kl}^{**} – оператори які враховують залежність навантаження від часу подані у [2].

Ключові функції φ_j , ψ_j описуються виразами аналогічними поданим у [1], де в нашому випадку, фундаментальний розв'язок має такий вигляд

$$\begin{aligned}\Phi_n(z) &= \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn} (a_{jn}^2 + b_{jn}^2)} \times \\ &\times \left[(b_{jn} C_{in} - a_{jn} B_{jn}) \cos b_{jn} z + (a_{jn} C_{in} - b_{jn} B_{jn}) \sin b_{jn} |z| \right]\end{aligned}\quad (4)$$

Тут, на відміну від статичного випадку [1], характеристичне рівняння, через корені якого записано фундаментальний розв'язок (4), не має кратних коренів при $n = 0$ та $n = 1$, проте можливі дійсні та чисто уявні корені, що змушує вносити корективи у вигляд фундаментального розв'язку при згаданих значеннях n .

Виконавши дії аналогічні здійсненим у [1], отримано, систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від стрибків функцій переміщень та кутів повороту. Їх загальний вигляд аналогічний до поданих у [1], а ядра мають вигляд [2]

$$K_{ij} = K_{ij}^0 + K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$$

де K_{ij}^0 – сингулярна частина, $K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$ – регулярна частина, у якій складова K_{ij}^{**} враховує залежність навантаження від часу [2]; K_{ij}^0 , K_{ij}^* описуються виразами аналогічними до поданих у [1]. Використовуючи отримані рівняння здійснено числові дослідження.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 318 с.
2. Николишин М.М., Махоркін М.І. Гранична рівновага замкнутої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за змінного в часі навантаження // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. – 2013р. – № 2. – С. 56-63.
3. Подстригач Я.С., Швець Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.

REDUCTION OF THE PROBLEM ON THE STRESSED STATE OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A LONGITUDINAL CRACK UNDER TIME-VARYING LOAD TO A SYSTEM OF SINGULAR INTEGRAL EQUATION

An elastic cylindrical isotropic shell with a longitudinal crack under surface loading, in time according to exponential law, has been considered. A system of singular integral equations has been constructed. The solutions of these equations enable the study of the stress state near the crack tips.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З МІЖФАЗНОЮ НЕНАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН

Мирон Николишин, Віктор Опанасович, Леся Куротчин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Розглянуто задачу про двохвісний розтяг зусиллями на безмежності q , P_i кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з наскрізною тріщиною завглибшки $h + h_1$ і завдовжки $2l$, на прямолінійній межі поділу матеріалів. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Біля вершин тріщини та у перемичці ($h_1 \leq \tilde{z} \leq h$, $-l \leq x \leq l$) наявні пластичні зони (рис. 1). За рахунок перемички розв'язування задачі подано у вигляді суперпозиції двох взаємозв'язаних задач: розтягу і згину (класична теорія).

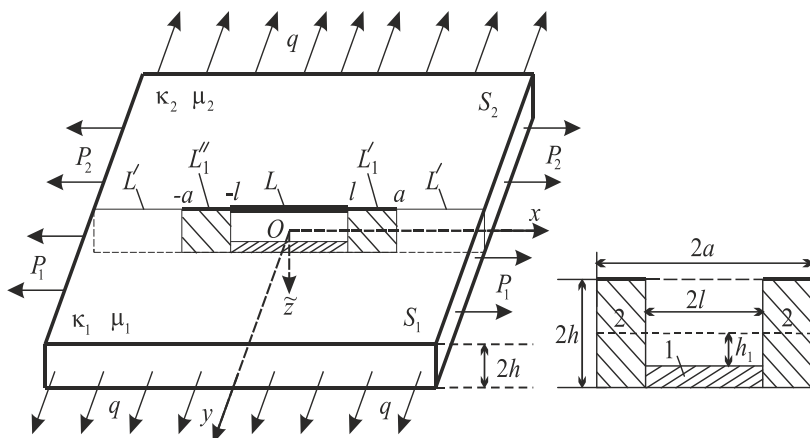


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови:
для плоскої задачі

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L',$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_T b_1, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L; \sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = \tau_0 \text{ на } L'_1,$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = -\tau_0 \text{ на } L''_1,$$

для задачі згину

$$M_y^+ = M_y^-, H_{xy}^+ = H_{xy}^-, N_y^+ = N_y^-, w^+ = w^-, \partial_y w^+ = \partial_y w^- \text{ на } L',$$

$$M_y^\pm = \sigma_T b_2, H_{xy}^\pm = 0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L,$$

$$M_y^\pm = M_0, H_{xy}^\pm = H_0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L'_1,$$

$$M_y^\pm = M_0, H_{xy}^\pm = -H_0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L''_1,$$

де u, v – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі Ox і Oy відповідно; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень;

σ_0, τ_0 – невідоме нормальне і дотичне напруження у пластичних зонах 2; w – прогин серединної поверхні пластини; M_y, H_{xy}, N_y – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила; M_0, H_0 – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичних зонах 2; $b_1 = (h - h_1)/(2h)$, $b_2 = (h^2 - h_1^2)/2$; $\sigma_Y = \min(\sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)})$, $\sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)}$ – гра-
ниці текучості першого та другого матеріалів.

За допомогою методу теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язування задач зведено до задач лінійного спряження та побудовано їх розв'язок в класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. В роботі визначено довжину пластичної зони $a - l$ за умов пластичності Мізеса та Треска та досліджено вплив на неї розтягуючих зусиль на безмежності q/σ_Y , P_1/σ_Y та відносної глибини тріщини h_1/h . Визначено напружений стан на верхній і нижній основі пластини на межі поділу матеріалів.

STRESS-STRAIN STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLATE WITH INTERFACIAL NON-THROUGH CRACK AT PRESENCE OF PLASTIC ZONES

The problem on limit equilibrium of piecewise homogeneous elastic-plastic plate with non-through crack by the method of theory function of a complex variable and complex potentials is reduced to the problem of linear conjugation. Its solution is constructed in the class of functions bounded near crack. The influence of loading, geometric and mechanical parameters on the crack front opening displacement and size of plastic zones near crack are investigated.

УДК 539.3

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ ЖОРСТКЕ ТІЛО В ПРУЖНУ ПІВПЛОЩИНУ

Володимир Онишкевич, Георгій Сулим

*Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, м. Львів, 79057, Україна;*

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Математичне моделювання контактної взаємодії тіл з урахуванням перерозподілу теплових полів є актуальною науково-технічною проблемою. В інженерній практиці неоднорідність матеріалу є поширеним явищем [3], тому необхідність урахування впливу різноманітних механічних і теплофізичних чинників [2] при дослідженні теплового режиму контактної пари є очевидною і з огляду на розвиток технологій та підвищення вимог до забезпечення заданого експлуатаційного ресурсу при мінімальних затратах щораз актуальнішою. Вперше плоска контактна задача термопружності розглядалася в [1]. Розв'язок і детальний аналіз плоскої задачі термопружності про тиск жорсткого штампа на пружну півплощину міститься у [4], де для випадку тепловіддачі від штампа в півплощину виявлено втрату контакту на краях штампа, а при зміні напрямку теплового потоку втрата контакту спостерігалася всередині деякої ділянки зони контакту. В запропонованій роботі розглядається випадок подачі теплового потоку в півплощину через жорсткий штамп і, на відміну від [4], розв'язується додаткова задача теплопровідності для штампа.

Розглядається плоский штамп заввишки H , який втискується силою P у пружну півплощину. Використовується рівняння плоскої деформації. Між бічними поверхнями штампа і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну γ_a . На верхній межі штампа відбувається конвективне нагрівання зовнішнім середовищем з температурою t_c при коефіцієнті теплообміну γ_0 . Через незавантажену поверхню півплощини із зовнішнім середовищем нульової температури здійснюється конвективний теплообмін з коефіцієнтом теплообміну γ_H . Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний з коефіцієнтом теплопроникності контакту h .

Розв'язок задачі термопружності для півплощини побудовано за

допомогою інтегрального перетворення Фур'є, задачу теплопровідності для штампа розв'язано за допомогою методу прямих. Отримано систему парних інтегральних рівнянь, яку за допомогою методу поточної колокації зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь і запропоновано розрахункові формули для температурних полів, теплових потоків та контактних напружень.

При числових розрахунках прикладів отримано розподіли контактних напружень, які за певних значень параметрів задачі дають якісно різні випадки контактної взаємодії. Для розрахунку за схемою поступового уточнення зони безпосередньої контактної взаємодії застосовано ітераційну схему. При цьому вважається, що на тих ділянках, де за виконання умови нульових вертикальних переміщень нормальні напруження дорівнюють нулю, існує дотиковий контакт, а втратою контакту є ситуація, за якої поверхня штампа перебуває на певній відстані від поверхні здеформованої півплощини, на якій нормальні напруження нульові. У разі отримання у розрахунках на певних ділянках основи штампа строго додатних значень напружень робиться висновок про існування у цьому місці зон відриву штампа від півплощини і, як наслідок, зміну у таких зонах відставання крайових умов теплового та ідеального механічного контакту на умови відсутності контакту. При цьому на ділянках з повним (зокрема і дотиковим) контактом і в зонах відриву штампа теплообмін здійснюється з різними коефіцієнтами термopрoникності.

1. Бородачев Н.М. О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – №5. – С. 86-90.
2. Онишкевич В.М., Левицький В.П. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, №1. – С. 82-86.
3. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термopрyжної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Comninou M., Barber J.R., Dundurs J. Heat conduction through flat punch // J. appl. Mech. – 1981. – **48**. – P. 871-874.

HEAT TRANSFER THROUGH THE RIGID BODY INTO AN ELASTIC HALF-PLANE

The plane contact problem of a pressure of rigid punch into an elastic half-plane is considered. The upper boundary of the punch is subjected to convective heating, the thermal contact between the punch and the half-plane is taken as a non-ideal. Outside the region of contact heat exchange occurs with the external medium with zero temperature according to Newton's law. The solution of the thermo-elastic problem for the half-plane is constructed using Fourier transformation, and the problem of heat conductivity for the punch is solved by the method of straight lines. Possibility of the existence of the half-plane separation zones from the punch is determined. The thermal fields, heat flows and contact stresses in the interacting bodies have been obtained.

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПРУЖНОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор Опанасович, Іван Звізло, Микола Слободян

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Розв'язана задача про двовісний згин нескінченної кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R , в який впаяна пружна шайба того ж самого радіуса, а ззовні шайби наявна довільно розташована наскрізна прямолінійна тріщина (рис. 1). Береги тріщини під дією розподілених згинальних моментів на нескінченності M_x^∞ і M_y^∞ приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини. Параметрам, пов'язаним із шайбою, будемо приписувати індекс "1", а з матрицею – індекс "2".

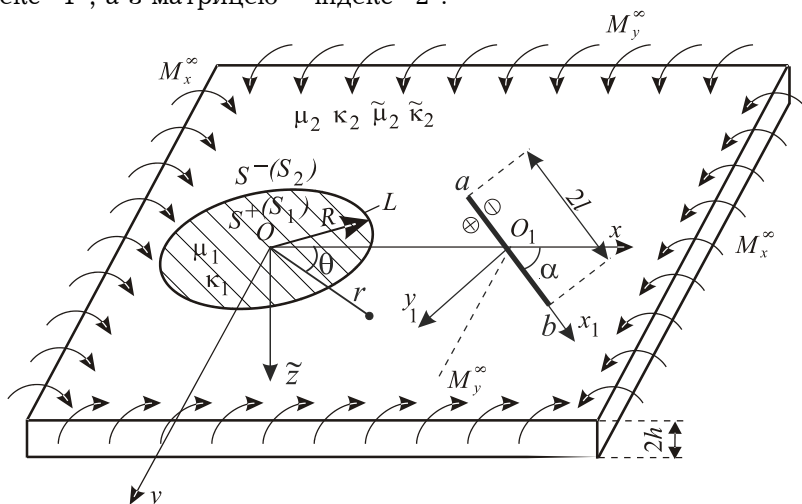


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Враховуючи контакт берегів тріщини, розв'язування задачі подано у вигляді суперпозиції двох розв'язків: задачі згину (класична

теорія) та плоскої задачі за таких крайових умов

$$\sigma_{yy}^{(\pm)} = -N/(2h), \quad \sigma_{xy}^{(\pm)} = 0, \quad P^{(\pm)} = 0, \quad M_y^{(\pm)} = M_y, \quad \text{на } L_1,$$

$$M_y = \beta N, \quad \partial_x [u_{yP}^{(2)}] + \alpha \partial_{xy}^2 [w^{(2)}] = 0, \quad \text{на } L_1,$$

$$P_r^{(1)} = P_r^{(2)}, \quad M_r^{(1)} = M_r^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \partial_r w^{(2)} = \partial_r w^{(2)}, \quad \text{на } L,$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)}, \quad u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)}, \quad \text{на } L,$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини, $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}$ і $u_{\alpha P}^{(j)}$ – компоненти тензора напружень і вектора переміщення точки у плоскій задачі; $P_\alpha^{(j)}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила, а $M_\alpha^{(j)}$ – згинальний момент, $w^{(j)}$ – прогин пластини; $[f] = f^+ - f^-$, значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$; константи α і β мають вигляд [1]

$$\alpha = 0.5 \left\{ 1 + (1 - \gamma)^2 \right\} h, \quad \beta = (1 - \gamma/3) h, \quad \gamma = h_1/h.$$

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі і класичної теорії згину пластини розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, які аналітично розв'язано, та отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно похідної від стрибка переміщень та кутів повороту на берегах тріщини, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. Проведений числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності моментів та зусиль, контактного зусилля між берегами тріщини та критичного навантаження, яке може бути прикладене до пластини.

1. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наукові нотатки Луцького технічного університету: міжвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка"). – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123-127.

BIAXIAL BENDING OF ELASTIC CIRCULAR PLATE WASHER AND ARBITRARILY LOCATED CRACK CONSIDERING THE WIDTH OF THE CONTACT AREA OF THE COAST

The problem of bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and an arbitrarily located crack with a taking into account the contact crack is investigated. Using the method of complex variable theory, the solution was reduced to the construction of solutions of singular integral equations on the crack, which is solved numerically. The conditions of ideal mechanical contact on a circular boundary materials could satisfy analytically.

УДК 539.3

ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ СПІВВІСНИМИ НАСКРІЗНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ ТА ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇХ ВЕРШИНАХ

Віктор Опанасович, Микола Слободян

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

У роботі досліджена задача про двовісний згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ з двома рівними співвісними наскрізними тріщинами завдовжки $2l$ розподіленими згинальними моментами на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до тріщин. Припускається, що під дією згинального навантаження на безмежності береги тріщини зазнають гладкого контакту по області постійної ширини h_1 [2] вздовж тріщин, а у їх вершинах утворились пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [1]. За рахунок контакту берегів тріщин розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину з використанням класичної теорії згину пластин. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{y}$ з початком посередині між центрами тріщин, направивши вісь Ox вздовж тріщин (рис. 1).

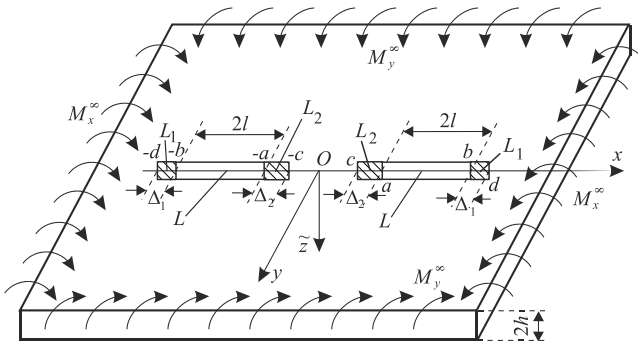


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Лінії дійсної осі, де розміщені тріщини позначимо через L , внутрішні пластичні зони – через L_2 , зовнішні – через L_1 , довжини внутрішніх пластичних зон – через Δ_2 , зовнішніх – через Δ_1 , $LL = L_1 \cup L_2$, $\tilde{L} = LL \cup L$.

Згідно постановки задачі будемо мати такі крайові умови

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0, \quad M_y^{\pm} = M_0, \quad x \in LL;$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -0,5N/h, \quad M_y^{\pm} = \beta hN, \quad [v] + \alpha h[\partial w / \partial y] = 0, \quad x \in L;$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad P^{\pm} = 0, \quad x \in \tilde{L};$$

де σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення на осі Ox і Oy у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – шукані величини, відповідно нормальне напруження і згинальний момент у пластичних зонах; N – контактне зусилля ($N > 0$); w – прогин пластини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$, квадратна дужка означає стрибок відповідної величини на берегах тріщини, тобто $[f] = f^+ - f^-$; константи α і β мають вигляд [2]

$$\alpha = 0.5 \left\{ 1 + (1 - \gamma)^2 \right\}, \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h.$$

На основі методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та класичної теорії згину пластин розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких шукається в класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. Знайдено аналітичні вирази для σ_0 і M_0 у пластичних зонах та записано систему рівнянь для знаходження довжини пластичних зон Δ_1 і Δ_2 , а також визначено розходження берегів тріщини у її вершинах. Проведено числовий аналіз задачі.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 320 с.
2. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наукові нотатки Луцького технічного університету: міжвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка"). – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123-127.

BENDING ISOTROPIC PLATE WITH TWO EQUAL COAXIAL THE THROUGH CRACKS BASED ON THE WIDTH OF THE CONTACT AREA OF THE COAST AND IN THE PRESENCE OF PLASTIC ZONES AT THE TOPS OF THEIR

Investigated biaxial bending isotropic plate with two coaxial with the through cracks taking into account contact their banks and considering plastic zones at the crack tip.

УДК 539.3

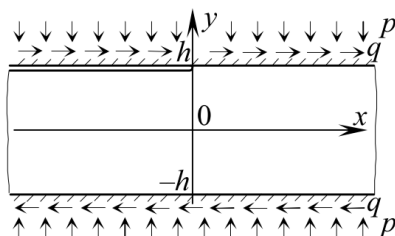
ЗАКРИТА ПІВНЕСКІНЧЕННА ТРІЩИНА НА МЕЖІ ПРУЖНОЇ СМУГИ І ЖОРСТКОЇ СТІНКИ

Володимир Острик

*Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64, м. Київ, 01033, Україна*

Пружна смуга $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ затиснута між двома нескінченними жорсткими стінками, до яких прикладені рівномірно розподілені стискальні p і зсувні q навантаження (рис. 1). Нижня грань $y = -h$ і частина $(0 \leq x < \infty)$ верхньої грані $y = h$ смуги скріплені зі стінками, а інша частина $(-\infty < x < 0)$ грані $y = h$ не закріплена і контактує зі стінкою. Тобто на межі між стінкою та смугою утворена півнескінченна тріщина $-\infty < x < 0$, $y = h$, береги якої знаходяться у контакті.

При врахуванні сил тертя в області контакту маємо змішану крайову задачу для пружної смуги з крайовими умовами



$$u_y|_{y=h} = -\delta_1, \quad -\infty < x < 0;$$

$$u_x|_{y=h} = \delta_2, \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$\tau_{yx}|_{y=h} = -\mu_0 \sigma_y|_{y=h},$$

$$-\infty < x < 0;$$

Рис. 1

$$u_x|_{y=-h} = 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

де δ_1 , δ_2 – тангенціальне та нормальне відносні зміщення стінок, μ_0 – коефіцієнт тертя. Третя крайова умова (1) вказує на проковзування точок нижнього берега тріщини уздовж усієї тріщини у напрямку від її вершини, що є справедливим при значному зсуві, коли $q \geq \mu_0 p$ (випадок А).

У випадку Б незначного зсуву з виконанням умови $q < \mu_0 p$ зона проковзування $-l < x < 0$ стає скінченною невідомого заздалегідь розміру l і протилежним у порівнянні з випадком А напрямком проковзування, а на іншій частині тріщини ($-\infty < x \leq -l$) її береги зчіплюються. Отже, у випадку Б замість третьої крайової умови (1) маємо дві наступні умови:

$$u_x|_{y=h} = \delta_2, \quad -\infty < x \leq -l; \quad \tau_{yx}|_{y=h} = \mu_0 \sigma_y|_{y=h}, \quad -l < x < 0. \quad (2)$$

Інші крайові умови (1) задачі А переносяться на задачу Б без змін.

Відносні зміщення стінок δ_1 , δ_2 виражаються через інтенсивності навантаження p , q із умов на нескінченності ($x \rightarrow \pm\infty$):

$$\frac{\delta_1}{2h} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{p}{2G}; \quad \frac{\delta_2}{2h} = \frac{2q-\mu_0 p}{G} \quad (\text{А}), \quad \frac{\delta_2}{2h} = \frac{q}{G} \quad (\text{Б}), \quad (3)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву.

Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є за координатою x задача А зведена до інтегрального рівняння з різницею ядром на півнескінченному інтервалі $0 < \xi < \infty$, а задача Б – на системі інтервалів $-\infty < \xi < -a$, $0 < \xi < \infty$ ($\xi = x/(2h)$, $a = l/(2h)$). Методом Вінера – Гопфа знайдено точний аналітичний розв'язок інтегрального рівняння задачі А, а інтегральне рівняння задачі Б зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь з експоненціально спадаючими коефіцієнтами. Розв'язок останньої знайдено у рядах за степенями малого параметра $\lambda = e^{-\pi l/(4h)}$ ($0 < \lambda < 1$).

Обчислено нормальні та дотичні напруження на лінії тріщини та на її продовженні, коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень. Виявлено, що при перевищенні відношення q/p певного граничного значення (рівного 3.26 при $\nu = 1/3$, $\mu_0 = 0.25$) спостерігається порушення контакту незакріпленої частини межі смуги зі стінкою на деякій відстані $d \approx 1.8h$ від вершини тріщини.

**CLOSAL SEMI-INFINITE CRACK ON BOUNDARY
OF ELASTIC STRIP AND RIGID WALL**

The compression and shear of elastic strip with semi-infinite crack is studied. Friction forces are taken into account in the contact domain of crack faces. A contact domain is division into adhesion and slipping zones. With use of Wiener–Hopf method a system of integral equations is reduced to infinite system of algebraic equations. The results of calculations of normal and tangential stresses on the crack line and hear continuation stress intensity tangential factors are presented.

УДК 519.6:539.3

**ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТУ
ПРУЖНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВИХ
ВІНКЛЕРІВСЬКИХ ШАРІВ ТА КУЛОНІВСЬКОГО ТЕРТЯ**

Ігор Прокопишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянуто задачу про контакт кількох пружних тіл скінченних розмірів за наявності поверхневих вінклерівських шарів та кулонівського тертя. На основі праць [2, 5] здійснено слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння в гільбертовому просторі.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано на континуальному рівні низку паралельних ітераційних методів декомпозиції області (МДО), які зводять розв'язування задачі у всій області до розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних задач в окремих тілах. Ці МДО є узагальненням методів декомпозиції області, запропонованих у працях [1–7] для задач про контакт пружних тіл без урахування тертя чи поверхневих шарів.

Здійснено програмну реалізацію отриманих МДО для плоских контактних задач з використанням скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах.

Числову ефективність розроблених методів досліджено для задачі про контактну взаємодію двох пружних тіл, одне з яких має періодичний рельєф у вигляді виїмок, а інше – покриття, що з'єднане з основною частиною тіла через вінклерівський прошарок. Вивчено вплив геометричних та пружних параметрів тіл, покриття і прошарку, а також коефіцієнта тертя на розподіл контактних, міжфазних та об'ємних напружень і переміщень.

1. Дияк І. І., Прокопишин І. І. Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 78–89.
2. Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 43–56.
3. Прокопишин І. І. Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
4. Прокопишин І. І. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2010. – 163 с.
5. Прокопишин І. І., Прокопишин І. А. Методи декомпозиції області для задач про контакт пружних тіл з фрикційним проковзуванням // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу": тези доповідей – Івано-Франківськ: Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2013. – С. 58.
6. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity // Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. of ENUMATH 2009, Uppsala, July 2009. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – P. 297–305.
7. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // arxiv.org. – 2012. – 32 p. – [Електронний ресурс: <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>].

NUMERICAL ANALYSIS OF A CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC BODIES WITH WINKLER SURFACE LAYERS AND COULOMB FRICTION

Parallel iterative domain decomposition methods for problems of contact between several elastic bodies with Winkler surface layers and Coulomb friction are investigated. The numerical analysis of these methods is performed for plane problem of contact between two isotropic bodies, one of which has a periodic texture, and the other has a thin cover, connected with the rest part of the body through a Winkler surface layer. The influence of elastic and geometric parameters of the bodies and the cover on contact and volume stresses is studied.

УДК 539.3

ТРІЩИНА В НЕРОЗРІЗНІЙ СМУГОВИДНІЙ ПЛАСТИНІ

Віктор Реут, Станіслав Роговський

*Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, м. Одеса, 65082, Україна*

Розглядається задача про напружений стан нерозрізної смуговидної пластинки, яка шарнірно оперта по краях ($x = a$, $x = b$).

Уздовж прямих $x = a_n \left(a_n = a + kl, l = \frac{(b-a)}{n}, k = \overline{1, n-1}; a < 0 \right)$

пластинка також спирається на $n-1$ нерухому опору. На інтервалі $x = 0, y \in (-1, 1)$ між m -ою та $m+1$ -ою опорами пластинка має тріщину, що паралельна краям пластинки. До берегів тріщини прикладені згинальний момент інтенсивності $M(y)$ та узагальнена перерізуюча сила інтенсивності $q(y)$.

Особливістю такої задачі є наявність двох невідомих стрибків при переході через тріщину – стрибка кута повороту $\gamma(y) = \langle w \rangle$ і

стрибка кута повороту $\chi(y) = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle$.

Двовимірну функцію Гріна для нерозрізної смуговидної пластинки можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за змінною y та застосування для вирішення отриманої крайової задачі методу трьох моментів. Зокрема, при $a_m < x < a_{m+1}$ маємо

$$G^*(x, y, \xi, \eta) = G(x, y, \xi, \eta) - \mu_m(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, y, a_m, \eta) + \\ + \mu_{m+1}(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, y, a_{m+1}, \eta)$$

де $G(x, y, \xi, \eta)$ – функція Гріна для шарнірно-опертої смуговидної пластинки ($a_m < x < a_{m+1}, |y| < \infty$), а $\mu_m(\xi)$ і $\mu_{m+1}(\xi)$ – моменти, що компенсують вплив решти пластинки та припускають точні

подання. За допомогою двовимірної функції Гріна прогин пластинки припускає зображення

$$w(x, y) = \int_{-1}^1 \left\{ \chi(\eta) \left[M_{\xi} G^*(x, y, \xi, \eta) \right] \Big|_{\xi=0} - \gamma(\eta) \left[V_{\xi} G^*(x, y, \xi, \eta) \right] \Big|_{\xi=0} \right\} d\eta.$$

Вимагаючи виконання умов на тріщині, задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь щодо невідомих стрибків $\chi(\eta)$ і $\gamma(\eta)$ на проміжку $(-1, 1)$

$$\kappa \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \chi(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta + \int_{-1}^1 [\chi(\eta) K_{11}(y, \eta) + \gamma(\eta) K_{12}(y, \eta)] d\eta = M(y)$$

$$\kappa \frac{d^4}{dy^4} \int_{-1}^1 \gamma(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta + \int_{-1}^1 [\chi(\eta) K_{21}(y, \eta) + \gamma(\eta) K_{22}(y, \eta)] d\eta = q(y)$$

де $\kappa = \frac{(3+v)(1-v)}{4\pi}$, $K_{ij}(y, \eta)$ – нескінченно диференційовані функції.

Тоді, слідуючи за схемою методу ортогональних многочленів, враховуючи особливості розв'язків за методом Вільямса, розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь можна шукати у вигляді

$$\gamma(y) = (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k P_k^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}(y); \quad \chi(y) = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k P_k^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(y).$$

При цьому задача зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу Пуанкаре-Коха другого роду

$$\sigma_n^{(1)} \chi_k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{nk}^{(1,1)} \chi_k + A_{nk}^{(1,2)} \gamma_k \right) = f_n, \quad n = \overline{0, \infty},$$

$$\sigma_n^{(2)} \gamma_k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{nk}^{(2,1)} \chi_k + A_{nk}^{(2,2)} \gamma_k \right) = q_n, \quad n = \overline{0, \infty},$$

для якої $A_{nk}^{(i,j)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{2a\lambda}}{\lambda^{i+j}} F_{ij}(\lambda) J_{n+1}(\lambda) J_{k+j}(\lambda) d\lambda, \quad a < 0, F_{ij}(\lambda)$ –

алгебраїчні функції, що не мають особливості при $\lambda = 0$ і зростаючі на ∞ не більше ніж λ^{i+j} . Причому $A_{nk}^{(i,j)}$ зменшуються при $n + k$, які прямують до ∞ як експоненти, що дозволяє застосовувати метод редукції.

Таким чином, поставлена задача зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду типу Пуанкаре-Коха. Коефіцієнти системи при цьому визначаються за допомогою однієї квадратури.

A CRACK IN AN NOT CUTTING STRIP PLATE

The new method for the solving of elasticity problem for a continuous strip plate, that contain the crack, is proposed. The problem is reduced to a system of the singular integral equations relatively to the unknown jumps of the rotation angles. The resulting system is solved approximately by the method of orthogonal polynomials.

УДК 539.43

КІНЕТИКА РОСТУ ПОВЕРХНЕВОЇ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ В КІЛЬЦІ БУКСОВОГО ПІДШИПНИКА

Денис Рудавський, Віктор Бас

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна;*

*ПрАТ “Львівський локомотиво-ремонтний завод”,
вул. Залізнична, 1А, м. Львів, Україна*

Висока концентрація та циклічна зміна механічних напружень на доріжках буксового підшипника нерідко призводить до зародження та розвитку поверхневих втомних тріщин, близьких по формі до півеліптичної.

Розглянемо задачу про ріст такої втомної тріщини, розташованої на внутрішній поверхні зовнішнього кільця буксового підшипника електровозу.

В процесі роботи підшипника під час перекочування роликів через ділянку розташування тріщини, в напрямку осі Oy перпендикулярної до її площини (рис. 1а) виникатимуть циклічно змінні напруження стиску σ_{yy} [3].

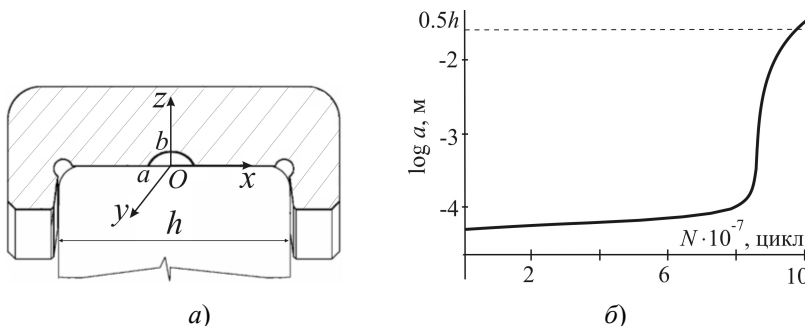


Рис. 1. Схема буксового підшипника із півеліптичною тріщиною на ділянці контакту кільця з роликом (а) та діаграма росту півосі a втомної тріщини (б).

Розподіл цих напружень достатньо добре досліджено в літературі із розв'язку відповідних контактних задач механіки для циліндричних тіл [3].

У процесі виготовлення підшипника, під час шліфування кілець відбувається нагрів їх поверхонь до достатньо високих температур, що призводить до появи залишкових напружень розтягу у приповерхневих шарах цих кілець. Рівень таких залишкових напружень може сягати величин $\sigma_{\text{зал}} = 100 \dots 400$ МПа [4]. Тоді розподіл контактних напружень стиску σ_{yy} в сумі із цими залишковими напруженнями розтягу буде створювати в поперечному перерізі кільця підшипника (рис. 1а) циклічний напружено-деформований стан із відповідною асиметрією циклу R , що змінюється вздовж осі Oz .

Вважаємо, що контур втомної тріщини під час її поширення залишається близьким до півеліптичного. Тоді залежність довжин півосей a та b цього контуру від кількості циклів навантаження N визначатиме кінетику росту тріщини. Ці залежності можна отримати із розв'язку системи двох звичайних диференціальних рівнянь [1]

$$da/dN = V \left(K_{I \max}(a, b) \right), \quad db/dN = V \left(K_{I \max}(a, b) \right) \quad (1)$$

із відповідними крайовими умовами:

$$a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0; \quad a(N_0) = h/2. \quad (2)$$

Функцію швидкості V росту точок контуру втомної тріщини (3) було знайдено на основі результатів отриманих в роботі [2] із використанням енергетичного підходу механіки руйнування.

$$V(a, b) = 0,03\sigma_0^{-2} (1 - R)^4 K_{I \max}^4(a, b) (\alpha \cdot K_{Ic}^2 - K_{I \max}^2(a, b))^{-1}, \quad (3)$$

де α – коефіцієнт Морроу [2], σ_0 – модельне значення границі текучості [2].

Вираз коефіцієнта інтенсивності напружень K_I для тріщини в нашому випадку отриманий методом граничної інтерполяції у праці [1].

Для визначення механічних констант досліджуваного матеріалу, що входять у кінетичне рівняння (3) було проведено відповідні експериментальні дослідження, зокрема, випробування зразка сталі ШХ15 кільця підшипника для побудови кінетичної діаграми втомного росту тріщини. Експериментально отримані дані були зіставлені із рівнянням (3). Тоді, невідомі константи α , σ_0 та K_{Ic} було визначено методом найменших квадратів.

Систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (1) розв'язували числовим методом Рунге-Кутта. Розрахунок проводили за наступних вихідних даних: радіус ролика $R_1 = 0,017$ м, радіус зовнішнього кільця $R_2 = 0,142$ м; товщина зовнішнього кільця $t = 0,018$ м; кількість роликів у підшипнику $n = 18$; початкові розміри півеліптичної тріщини $a_0 = 0,05 \cdot 10^{-3}$ м, $b_0 = 0,19 \cdot 10^{-3}$ м; матеріал підшипника – сталь ШХ15; величина залишкових напружень розтягу в приповерхневих шарах кільця $\sigma_{\text{зал}} = 150$ МПа. На основі цих даних побудовано відповідну діаграму кінетики розвитку втомної тріщини (рис. 16), яка може бути використана для оцінювання залишкової довговічності буксового підшипника з втомною тріщиною.

1. Андрейкив А.Е., Дарчук А.И. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 183 с.
2. Андрейкив О.Є., Рудавський Д.В., Гембара О.В. Розрахункова модель поширення втомних тріщин у наводнених зварних з'єднаннях // Фіз.-хім механіка матеріалів. – 2002. – №6. – С. 18 – 24.
3. Иосилевич Г.Б. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.
4. Спришевский А. И. Подшипники качения. – М.: Машиностроение, 1969. – 632 с.

THE KINETICS OF SURFACE FATIGUE CRACK GROWTH AT AXLE BEARING RACE

The problem of surface fatigue crack growth located at the axle bearing race of electric locomotive is considered at the paper. Crack growth kinetic equation is based on energetic approach of fatigue fracture mechanics. The bearing material unknown characteristics were found by least-squares method using experimental data.

УДК 539.3

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА КРИВОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН В КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ

Михайло Саврук, Андрій Чорненко

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

До квазіортотропних відносять ортотропні матеріали, для яких характеристичні рівняння мають кратні уявні корені [4].

Розглянемо крайову задачу для нескінченної квазіортотропної площини з криволінійними розрізами. Вважатимемо, що на нескінченності напруження зникають, а на берегах розрізів задані самозрівноважені напруження (перша основна задача)

$$N^+ + iT^+ = N^- + iT^- = p(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

де N і T – нормальна і дотична компоненти вектора напружень, L – сукупність контурів тріщин, верхні індекси «+» і «-» вказують на граничне значення відповідних величин, коли точка $z = x + iy \rightarrow t \in L$ відповідно зліва (+) або справа (-) щодо вибраного додатного напрямку обходу контуру L .

Цю крайову задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння для визначення невідомої функції $g_1'(t_1)$ [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \left[K_1(\tau_1, t_1) g_1'(\tau_1) d\tau_1 + L_1(\tau_1, t_1) \overline{g_1'(\tau_1)} d\bar{\tau}_1 \right] = \tilde{P}_1(t_1), \quad t_1 \in L_1, \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} K_1(\tau_1, t_1) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right]; \\ L_1(\tau_1, t_1) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} - \frac{\tau_1 - t_1}{(\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right], \\ \tilde{P}_1(t_1) &= \frac{1}{2\gamma} \left[(1 + \gamma)p(t) - (1 - \gamma)\overline{p(t)} \frac{dt}{dt_1} \right] \frac{dt}{dt_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $t_1 = x + i\gamma y \in L_1$; $\gamma = \sqrt[4]{E_1/E_2}$ – пружний параметр ортотропії матеріалу, E_1, E_2 – його модулі пружності; контур L_1 у площині $z_1 = x + i\gamma y$ відповідає контуру L у площині z . Інтегральне рівняння (2) має єдиний розв’язок за додаткових умов однозначності переміщень за обходу кожного контуру тріщини. Для однієї тріщини з контуром L ця умова має вигляд

$$\int_{L_1} g'_1(t_1) dt_1 = 0. \quad (4)$$

Через функцію $g'_1(t_1)$ виражаються комплексні потенціали напружень

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{g'_1(t_1) dt_1}{t_1 - z_1}; \quad \Psi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{g'_1(t_1)} d\bar{t}_1}{t_1 - z_1} - \frac{\bar{t}_1 g'_1(t_1) dt_1}{(t_1 - z_1)^2} \right], \quad (5)$$

за допомогою яких можна знайти напруження у всій площині. Отримано також формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах криволінійної тріщини у квазіортотропній області [2, 3]. З аналізу співвідношень (1)–(5) можна зробити висновок: комплексні потенціали напружень та сингулярні інтегральні рівняння для системи криволінійних тріщин у квазіортотропній площині, записані у комплексній площині z_1 , є аналогічними до відповідних співвідношень для ізотропної області, записаних у площині z . На цій підставі отримуємо комплексні потенціали

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \frac{1}{2d} \int_{L_1} g'_1(\tau_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau_1 - z_1) d\tau_1, \\ \Psi_1(z_1) &= \frac{1}{2d} \int_L \overline{g'_1(\tau_1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau_1 - z_1) d\bar{\tau}_1 - \\ &- \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau_1 - z_1) + \frac{\pi}{d} (\bar{\tau}_1 - \tau_1 + z_1) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{d} (\tau_1 - z_1) \right) g'_1(\tau_1) d\tau_1 \end{aligned} \quad (6)$$

та інтегральні рівняння (2), ядра якого мають вигляд

$$K_1(\tau_1, t_1) = \frac{\pi}{2d} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\tau_1 - t_1) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1) \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right];$$

$$L_1(\tau_1, t_1) = \frac{\pi}{2d} \left[\left(1 - \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1) - \frac{\pi}{d} (\tau_1 - t_1 - \bar{\tau}_1 + \bar{t}_1) \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{d} (\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1) \right], \quad (7)$$

для періодичної системи тріщин (вздовж осі x з періодом d), на берегах яких задано однакове навантаження (1). Вирази (6) і (7) без індексів «1» відповідають періодичній системі тріщин в ізотропній площині [1].

Отримано числові результати для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах прямолінійних та криволінійних тріщин різної форми та орієнтації. Проаналізовано вплив на їх величину параметра ортотропії та віддалі між сусідніми тріщинами. Зроблено порівняння з відповідними результатами для ізотропної площини.

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Саврук М.П., Казберук А. Криволінійні тріщини в анізотропній площині та граничний перехід до виродженого матеріалу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – № 2. – С. 32-40.
3. Саврук М.П., Чорненко А.Б. Напружено-деформований стан квазіортотропної площини з криволінійними тріщинами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – Львів: ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАНУ, 2014. – С. 409-414.
4. Hasebe N., Sato M. Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – 50. – P. 235-248.

PERIODIC SYSTEM OF CURVILINEAR CRACKS IN QUASI-ORTHOTROPIC PLANE

The numerical results for the stress intensity factors at the tips of rectilinear and curvilinear cracks are obtained. Effect of orthotropy parameter and the distance between adjacent cracks on the value of stress intensity factors is analyzed. The comparisons with the corresponding results for isotropic plane were made.

УДК 539.3

ЕФЕКТИВНИЙ МІЖФАЗНИЙ ТЕРМООПІР БІМАТЕРІАЛУ З РЕГУЛЯРНОЮ СИСТЕМОЮ ТРІЩИН НА ПОВЕРХНІ РОЗМЕЖУВАННЯ

Христина Середницька, Ростислав Мартиняк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Наявність у вузлах і з'єднаннях дефектів, розташованих на поверхнях розмежування компонент, зумовлює виникнення міжфазного термоопору. За теплопередачі через контактні поверхні міжфазний термоопір може спричинити значне підвищення температури і теплових напружень. Тому моделювання термоопору з'єднань з урахуванням інтерфейсних недосконалостей є актуальним для багатьох галузей техніки. Нижче досліджено ефективний термічний опір міжфазної лінії біматеріалу з періодичною системою тріщин з урахуванням термічного впливу їх заповнювача.

Розглянемо біматеріальне тіло, складене з півплощин D_1 і D_2 , які мають однакові механічні і різні термічні властивості. На лінії з'єднання компонент біматеріалу з періодом d розташовані міжфазні тріщини однакової довжини $2a$ ($2a < d$) (рис. 1). На безмежності на біматеріал діють перпендикулярні до міжфазної лінії розтягувальні зусилля p і стаціонарний однорідний тепловий потік q , що зумовлюють розкриття тріщин $h(x)$.

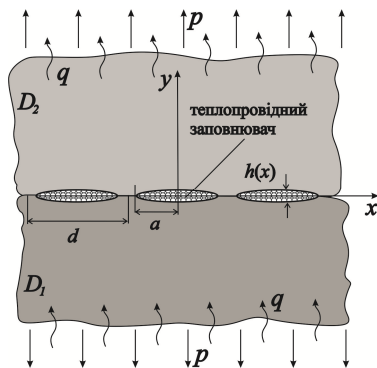


Рис. 1.

Порожнини тріщин заповнені теплопровідним середовищем, яке не чинить опору деформуванню тіла і характеризується коефіцієнтом теплопровідності λ_c . Вплив заповнювача тріщин на теплопередачу між їх поверхнями враховуватимемо термоопором $r(x) = h(x)/\lambda_c$. На міжфазних ділянках поза тріщинами виконуються умови ідеального теплового та ме-

ханічного контакту півплощин D_1 і D_2 .

Сумарна дія тріщин зумовлює додатковий перепад температур γ_{ef} між півплощинами на великій відстані від інтерфейсу, який визначається усередненим міжфазним стрибком температури:

$$\gamma_{ef} = \frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma(x) dx ,$$

де $\gamma(x)$ – стрибок температури між берегами тріщин.

Використовуючи метод комплексних потенціалів, сформульовану задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно розкриття тріщин $h(x)$ і стрибка температури між їхніми берегами $\gamma(x)$. Для розв'язування цієї системи застосовано аналітично-числовий метод, запропонований у праці [1].

На основі проведених числових розрахунків виявлено, що у разі різних термічних дистортивностей матеріалів функції $\gamma(x)$ і $h(x)$ є взаємозв'язані і нелінійно залежать від теплового потоку q , внаслідок чого ефективний стрибок температури γ_{ef} теж нелінійно залежить від q .

Ефективний термоопір R_{ef} , що є функцією теплового потоку q , визначається як похідна від ефективного стрибка температури γ_{ef} :

$$R_{ef}(q) = d\gamma_{ef}(q)/dq .$$

Проаналізовано вплив теплового потоку q на ефективний термоопір R_{ef} для різних значень теплопровідності заповнювача. Виявлено ефект напрямленості, який полягає у залежності ефективного термоопору від того, чи потік скерований до матеріалу з більшою термічною дистортивністю, чи до матеріалу з меншою термічною дистортивністю. Показано, що ефективний термоопір завжди більший у випадку, коли тепловий потік скерований до матеріалу з більшою термічною дистортивністю. Зі збільшенням теплопровідності заповнювача ефективний термоопір спадає незалежно від напрямку теплового потоку.

1. Мартыняк Р.М., Середницкая Х.И. Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 91-98.

**EFFECTIVE INTERFACIAL THERMAL RESISTANCE OF BIMATERIAL WITH
REGULAR SYSTEM OF CRACKS ON THE INTERFACE**

Thermal stresses state of bimaterial with periodic system of cracks filled with conductive substance is investigated. The influence of the heat flow direction and thermal conductivity of cracks filler on effective interfacial thermal resistance is analyzed.

УДК 517.9:539.3

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ
ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ З
ТЕПЛОПРОНИКНИМИ ТРІЩИНАМИ**

Юрій Сибіль

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Нехай $\Omega_+ \subset R^3$ деяка обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ . $\bar{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. S – розімкнута двостороння ліпшицева поверхня, з допомогою якої ми будемо моделювати деяку теплопроникну тріщину в тілі, обмеженому поверхнею Σ . Вважаємо, що $\bar{S} \subset \Omega_+$, де $\bar{S} = S \cup \Gamma$, Γ – межа S . Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \bar{S}$, $[\gamma_{i,S}] = \gamma_{i,S}^+ - \gamma_{i,S}^-$, $i = 0, 1$, де $\gamma_{0,S}^\pm$ – оператор сліду з різних сторін S , а $\gamma_{1,S}^\pm$ – оператор сліду нормальної похідної.

Розглянемо наступну задачу в області Ω (задача R) :
знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L) = \{u \in H^1(\Omega) : Lu \in L_2(\Omega)\}$ таку, що

$$Lu = -\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$[\gamma_{1,S}]u = 0, \quad \lambda[\gamma_{0,S}u] + \gamma_{1,S}^+u = f, \quad \lambda \in C(\bar{S}), \quad f \in H^{-1/2}(S),$$

$$\gamma_{0,\Sigma}^+u = g, \quad g \in H^{1/2}(\Sigma).$$

Із задачею R пов'язана наступна варіаційна задача (задача VR) :

знайти функцію $u \in \tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_{0,\Sigma}^+ u = 0\}$ таку, що для довільної функції $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$ виконується рівність:

$$a(u, v) = l(v),$$

де

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} + (\lambda[\gamma_{0,S} u], [\gamma_{0,S} v])_{L_2(S)},$$

$l(v) = \langle f, [\gamma_{0,S} v] \rangle$, $f \in H^{-1/2}(S)$. Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – відношення двоїстості між $H_{00}^{1/2}(S)$ та $H^{-1/2}(S)$.

Теорема 1. Задачі VR та задача R з умовою $\gamma_{0,\Sigma}^+ u = 0$ еквівалентні.

Лема 2. Якщо $\lambda \in C(\bar{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \bar{S}$, то білінійна форма $a(u, v) : \tilde{H}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow R$ є неперервною та $\tilde{H}^1(\Omega)$ -еліптичною.

Теорема 3. Якщо $\lambda \in C(\bar{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \bar{S}$, то задача VR має єдиний розв'язок для довільної $f \in H^{-1/2}(S)$.

Наслідок 4. Якщо $\lambda \in C(\bar{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \bar{S}$, то задача R має єдиний розв'язок для довільних $f \in H^{-1/2}(S)$ та $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Позначимо $Q(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|}$. Для функції $u \in H^1(\Omega, L)$ з

умовами $Lu = 0$ та $[\gamma_{1,S}]u = 0$ в Ω вірне наступне інтегральне подання:

$$u(x) = W\tau(x) + V_\Sigma \mu(x), \quad (1)$$

де $\tau = [\gamma_{0,S}]u$ та $\mu = [\gamma_{1,\Sigma}]u$,

$$W\tau(x) = \int_S \frac{\partial Q(x, y)}{\partial n_y} \tau(y) ds_y, \quad V_\Sigma \mu(x) = \int_\Sigma Q(x, y) \mu(y) ds_y.$$

Використавши граничні умови задачі R , для знаходження невідомих τ та μ отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda\tau + H\tau + \gamma_{1,S}^+ V_{\Sigma}\mu = f, \\ \gamma_{0,\Sigma}^+ W\tau + K_{\Sigma}\mu = g, \end{cases} \quad (2)$$

де $H\tau = \gamma_{1,S}^+ W\tau$ – інтегро-диференціальний оператор із сингулярною особливістю, визначений на S , а $K_{\Sigma}\mu = \gamma_{0,\Sigma}^+ V_{\Sigma}\mu$ – інтегральний оператор із слабкою особливістю, визначений на Σ .

Теорема 5. Задача R є еквівалентною системі (2), тобто розв'язок задачі R має вигляд (1), де τ та μ є розв'язками системи (2), і навпаки, функція $u(x)$, що задана виразом (1), де τ та μ – розв'язки системи (2), є розв'язком задачі R .

Наслідок 6. Якщо $\lambda \in C(\bar{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \bar{S}$, то система (2) має єдиний розв'язок для довільних $f \in H^{-1/2}(S)$ та $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

NUMERICAL MODELING OF THE STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN THREE-DIMENSIONAL BODIES WITH HEAT RESISTANCE CRACKS

We consider the boundary value problem for the three-dimensional Laplace equation in unregular domain with boundary conditions of mixed type given on both sides of an open Lipschitz surface. This problem is a mathematical model of the stationary temperature field in a domain with a crack possessing heat resistance. It was shown the equivalence of the original boundary value problem and corresponding variational problem. As a consequence we obtain existence and uniqueness of solutions of the initial boundary value problem and the system of the boundary integral equations as well in appropriate functional spaces.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ЗАРОДЖЕННЯ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ У МАТЕРІАЛІ В ОКОЛІ ВКЛЮЧЕННЯ

Віктор Силованюк, Роман Юхим, Андрій Ліснічук

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Під час циклічної втоми матеріалів знакозмінна пластична

деформація в локальних об'ємах матеріалу призводить до генерації та росту мікро- та макродефектів. В роботі запропонована модель зародження втомної тріщини біля вклучення в пружно-пластичному матеріалі, що перебуває в умовах циклічних одноосних навантажень розтягом-стиском (рис. 1).

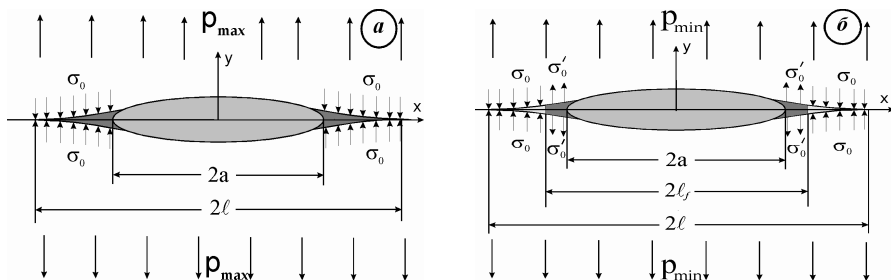


Рис. 1. Вклучення з пластичними зонами у півциклі навантаження (а) та розвантаження (б).

За основу покладено деформаційний критерій втоми матеріалу

$$\Delta \varepsilon \left(\frac{N_f^{1-mk} - 1}{1 - mk} \right) + \varepsilon_e = \varepsilon_c, \quad (1)$$

Тут $\Delta \varepsilon$ – розмах непружної деформації в першому циклі навантаження, N_f – число циклів до руйнування; k – параметр, що характеризує здатність матеріалу до циклічного зміцнення або знеміцнення; m – характеристика матеріалу, аналог параметра в рівнянні Кофіна-Менсона за умов жорсткого навантаження; ε_c – гранична деформація матеріалу; ε_e – пружна складова деформації в циклі навантаження.

Розмах пластичної деформації $\Delta \varepsilon$ визначали на основі співвідношення

$$\Delta \varepsilon(a) = 2(u_{\max}^*(a) - u_{\min}^*(a)) / \rho, \quad (2)$$

де ρ – радіус кривини вершини вклучення, $u_{\max}^*$, $u_{\min}^*$ – переміщення берегів розрізів, до яких зведена проблема розтягу-стиску тіла з вклученням. Отримані розв'язки крайових задач зображених на рис. 1, що дало можливість встановити розмах пластичної деформації в циклі навантаження у явному вигляді. Кількість циклів до зародження втомної тріщини на осові (1), (2) обчислюємо за формулою

$$N_f = \left(\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_e)^m}{\Delta \varepsilon^m} (1 - mk) + 1 \right)^{1/(1 - mk)} \quad (3)$$



Рис. 2. Розподіл деформацій в околі включення

$$d_f = R_f \frac{\varepsilon_T^{1+n}}{\varepsilon_{\min}^{1+n}} \quad (4)$$

де $R_f = l_f - a$, $\varepsilon_{\min} = u^*_{\min}(a)/\rho$.

Розмір втомної тріщини (рис. 2) становить лише частину циклічної пластичної зони і визначається залежністю

Висновки. Запропоновано підхід для обчислення періоду зародження тріщини в околі пружних включень. Основними чинники, які впливають на інтенсивність втоми матеріалу в околі включення є амплітуда та асиметрія навантаження, геометрія поверхні включення, його відносна жорсткість, модуль Юнга, границя текучості матеріалу матриці, параметри циклічного зміцнення або знеміцнення матеріалу, його гранична деформація. Встановлено, що розмір тріщини, що виникає біля включення, становить частину циклічної пластичної зони і визначається співвідношенням деформацій на межі текучості і у півциклі розвантаження.

MODEL OF FATIGUE CRACK INITIATION IN THE BODIES NEAR INCLUSIONS

The model of fatigue crack initiation near the elastic thin inclusion in an elastic-plastic material, subjected to the conditions of cyclic uniaxial loading by tension-compression. On the basis of strain criterion of strength the period of crack initiation at the elastic inclusion is calculated. The factors that determine the intensity of material fatigue near defects were evaluated.

УДК 620.179.17

ЗНАХОДЖЕННЯ КООРДИНАТ ДЖЕРЕЛА АКУСТИЧНОЇ ЕМІСІЇ НА ПОВЕРХНІ ТОНКОСТІННОЇ СФЕРИ

**Валентин Скальський, Євген Почапський,
Богдан Клим, Олександр Сімакович**

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Мета дослідження: розв'язати задачу визначення координат джерел акустичної емісії (АЕ), що виникають в об'єктах сферичної форми та на цій основі побудувати методики їх технічного діагностування.

Умови задачі: об'єкт має малу товщину стінки порівняно з його радіусом; перетворювачі АЕ (ПАЕ) можуть бути розміщені тільки на поверхні сфери.

Результати дослідження складаються з двох частин. В першій розглянуто теоретичні основи задачі про знаходження координат дефекту, що генерує сигнали АЕ. Друга частина містить аналіз результатів отриманих аналітичних залежностей.

Теоретичні засади знаходження координат дефекту на об'єкті сферичної форми. Для тонкостінної сфери залежність, за якою визначають відстань від джерела АЕ до ПАЕ, можна подати як

$$\text{dist}(\vec{r}, \vec{r}_i) = R \arccos(\vec{r} \cdot \vec{r}_i / R^2), \quad (1)$$

де R – радіус сфери, а $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i$ – радіус-вектори джерела АЕ й i -го ПАЕ відповідно.

Тоді систему рівнянь для визначення відстаней до джерела від трьох ПАЕ можна записати у вигляді (не зменшуючи загальності вважаємо, що сфера промасштабована до одиничної):

$$\begin{cases} \text{dist}(\vec{r}, \vec{r}_1) = c \cdot t_1, & \arccos(\vec{r} \cdot \vec{r}_1) = c \cdot t_1, \\ \text{dist}(\vec{r}, \vec{r}_2) = c \cdot t_2, \text{ або} & \arccos(\vec{r} \cdot \vec{r}_2) = c \cdot t_2, \\ \text{dist}(\vec{r}, \vec{r}_3) = c \cdot t_3, & \arccos(\vec{r} \cdot \vec{r}_3) = c \cdot t_3, \end{cases} \quad (2)$$

де c – швидкість поширення пружної хвилі в масштабованій сфері, t_i – час її поширення від джерела до i -того ПАЕ ($t_1 \leq t_2 \leq t_3$).

Така система має чотири розв'язки які визначаються наступним

виразом:

$$x_{1.4} = \pm \sqrt{x_{41} \pm x_{42}} / x_{43}, \quad (3)$$

$$\text{де } x_{41} = -2x_{30}x_{32} + x_{33}^2; \quad x_{42} = x_{33}\sqrt{x_{33}^2 - 4x_{30}x_{32} - 4x_{30}^2};$$

$$x_{43} = \sqrt{(x_{32}^2 + x_{33}^2) / 2}; \quad x_{32} = 1 + x_{1y}^2 - s_{1y}^2 + x_{2z}^2 - s_{1z}^2; \quad x_{30} = s_{1y}^2 + s_{2z}^2 - 1;$$

$$x_{33} = -2x_{1y}s_{1y} - 2x_{2z}s_{2z}; \quad x_{1y} = (c_{11} - x_{11}) / y_{11}, \quad s_{1y} = s_{11} / y_{11};$$

$$s_{2z} = s_{21} / z_{21}; \quad x_{2z} = (c_{21} - x_{21}) / z_{21};$$

$$x_{11} = x_1; \quad y_{11} = y_1; \quad c_{11} = c_1; \quad s_{11} = s_1; \quad z_{21} = z_2; \quad x_{21} = x_2 - y_2x_1 / y_1;$$

$$c_{21} = c_2 - c_1y_2 / y_1; \quad \cos(c(t_i - t_1)) = c_i; \quad \sin(c(t_i - t_1)) = s_i.$$

Невідомі компоненти y , z радіус-вектора джерела $\vec{r} = (x, y, z)$ знаходимо за допомогою виразів

$$y = x_{1y}x - s_{1y}\sqrt{1 - x^2}; \quad z = x_{2z}x - s_{2z}\sqrt{1 - x^2}. \quad (4)$$

Аналіз результатів. Отримана група розв'язків складається з двох підгруп: перша підгрупа розв'язків лежить на поверхні одиничної сфери з центром в початку координат, а інша на ще одній сфері, що також побудована для заданих ПАЕ. Для того, щоб визначити, які розв'язки належать заданій сфері, використовуємо умову

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (5)$$

Для визначення коректного розв'язку з тих, що задовільняють співвідношення (5), необхідний хоча б один додатковий ПАЕ. Тоді для коректного розв'язку сума квадратів різниць розрахункових та фактичних різниць часів приходу до додаткових ПАЕ є меншою

$$\sum_{i=4}^N \left(\text{dist}(\vec{r}, \vec{r}_i) / c - \text{dist}(\vec{r}, \vec{r}_1) / c - (t_i - t_1) \right)^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

де N – кількість ПАЕ.

1. *Asty M.* Acoustic emission source location on a spherical or plane surface // NDT Intern. – 1978. – vol. II, No. 5. – P. 223-226.
2. *Kappatos V., Lympertos E. and Dermatas E.* Estimation of the best sensors position for the minimum error location of acoustic emission sources on spherical surfaces // 3rd International Conference on Non-Destructive Testing of the Hellenic Society for NDT. – 2003. – P. 123-128.
3. *Назарчук З.Т., Скальський В.Р.* Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій: наук.-техн. посіб.: у 3 т. – К. : Наукова думка, 2009. – Т. 2. – 263 с.

LOCATION OF COORDINATES OF AE SOURCES ON A THIN SPHERICAL SHELL

A mathematical method is developed for location of sources of acoustic emission on a thin spherical shell in Cartesian coordinates using differences in time of arrival of three sensors. Defined technique and minimum number of sensors for a unique determination of an acoustic emission point source location. Obtained solution was tested by computer modelling and by experiment on a real sphere object. Absolute and relative errors were calculated.

УДК 539.37

РЕАКЦІЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ШАРУ, ЗЧЕПЛЕНОГО З ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ, НА ДІЮ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Ігор Скородинський, Олександр Максимук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Для інженерно-будівельної практики велике значення мають задачі про передачу нормальних навантажень на основи та покриття, що описуються різними фізико-механічними моделями, зокрема двопараметричними (пружними та в'язкопружними).

Дана доповідь присвячена дослідженню механічної поведінки нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі під дією нормального розподіленого, сталого навантаження в рамках узагальненої двопараметричної моделі [1]. Матеріал шару описується моделлю Кельвіна-Фойгта. Для вивчення запізнення реакції в'язкопружного шару на зовнішнє навантаження побудовано графіки величини

$$\Delta(t) = |(v(0, t) - v(0, \infty)) / v(0, \infty)|,$$

де $v(x, t)$ – вертикальне переміщення навантаженої поверхні за плоскої деформації, x – координата, t – час для різних товщин та матеріалів шару в рамках узагальненої двопараметричної моделі та моделі Вінклера. Встановлено, що величина $\Delta(t)$ слабо залежить від товщини шару, і тому відповідні криві є близькими до експоненціально спадної кривої, що відповідає моделі Вінклера, яка для вели-

чини $\Delta(t)$ є граничним випадком, коли товщина шару прямує до нуля. При малих товщинах шару криві, побудовані в рамках двопараметричної моделі, практично співпадають з вінклерівською експоненціальною кривою. Вплив матеріалу шару визначається переважно часом ретардації елемента Кельвіна-Фойгта τ_K .

Як і в роботі [1], встановлено пропорційність між часом запізнення реакції в'язкопружного шару на зовнішню силову дію τ_d та часом ретардації τ_K . Побудовано графіки неявної залежності коефіцієнта пропорційності від відносної максимальної різниці між в'язкопружним та пружним вертикальним переміщенням навантаженої поверхні для тих же товщин та для двох значень коефіцієнта Пуассона матеріалу шару, а також для випадку моделі Вінклера. Встановлено, що всі залежності є монотонно спадними, а графіки функцій, побудовані для різних товщин, є майже конгруентними логарифмічній кривій, що відповідає моделі Вінклера, з відповідним зсувом. При малих товщинах криві, отримані в рамках двопараметричної моделі, практично співпадають з вінклерівською логарифмічною кривою. Залежність від товщини та матеріалу шару в даному випадку сильніша, ніж у попередньому та у випадку зосередженої сили [1].

З проведеного дослідження випливає, що у випадку тонкого шару останній доцільніше розглядати як вінклерівський і користуватися простими та явними співвідношеннями відповідної моделі.

Побудовано та досліджено графіки розподілу контактного тиску між в'язкопружним шаром та жорсткою основою в різні моменти часу та для різних товщин і матеріалів шару. Проведено порівняння з моделлю Вінклера (або класичною двопараметричною моделлю) та з точним розв'язком плоскої задачі теорії пружності для нескінченної смуги. Встановлено, що залежності контактного тиску від координати в рамках узагальненої двопараметричної моделі є кусково-монотонно спадними з фіксованим стрибком величини $0.5p_0$ (p_0 – заданий тиск) на кінцях області навантаження для любого моменту часу $t \geq 0$. Максимум контактного тиску в області навантаження досягається в її середині. Для достатньо малих товщин розподіли контактного тиску між шаром та жорсткою основою поза певними околами кінців області навантаження наближаються до вінклерівського. З ростом товщини шару величина контактного тиску зменшується, а його розподіл все сильніше віддаляється від вінклерівського, однак весь час добре корелює з точним розв'язком. Залежність контактного тиску від часу стає помітною тільки для товщин шару, співрозмірних з областю навантаження.

Встановлено добру кореляцію між контактними тисками у пружному випадку, отриманими на базі узагальненої двопараметричної моделі та точного розв'язку задачі теорії пружності для нескінченної смуги. Таким чином, узагальнена двопараметрична модель забезпечує не тільки правильні розподіли вертикальних переміщень навантаженої поверхні, а й більш коректні (у порівнянні з класичною двопараметричною моделлю) розподіли контактних тисків між шаром та жорсткою основою.

1. Скородинський І. С., Максимук О. В. Узагальнена модель в'язкопружного проміжного шару або покриття, що враховує деформацію поперечного зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 1. – С. 62–70.

RESPONSE OF VISCOELASTIC LAYER JOINED WITH A RIGID FOUNDATION TO NORMAL DISTRIBUTED LOAD

The response of infinite viscoelastic layer on the rigid foundation to normal distributed constant load is investigated on the base of generalized two-parameter model. The delay of response of the layer to external load at the origin of coordinates as well as distributions of the contact pressure between the layer and the rigid foundation in the frames of different models are studied.

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ДВОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ НЕЗСУНУТИМИ НАСКРІЗНИМИ ОДНАКОВИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Георгій Сулим, Віктор Опанасович, Ігор Яцик

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ з двома незсунутими паралельними тріщинами завдовжки $2l$ рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності. Відстань між центрами тріщин дорівнює $2d$ (рис. 1). Вважаємо, що

під дією зовнішнього навантаження береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини тріщин з постійною двовимірною зоною ширини h_1 , що прилягає до верхньої основи пластини. До деформування пластини береги тріщин були вільними від зовнішнього навантаження.

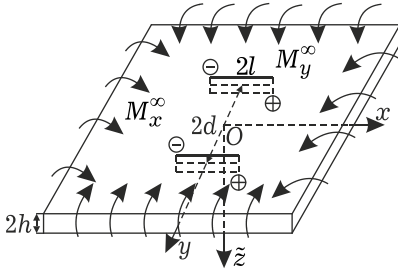


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

Виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини з початком координат O посередині між центрами тріщин, які розташовані на осі Oy і спрямуємо вісь Ox паралельно до осей тріщин. Відрізки $[-id-l, -id+l]$ і $[id-l, id+l]$ ($i^2 = -1$) позначимо

відповідно через L_1 і L_2 , контактне зусилля між берегами k -ої тріщини – через N_k ($N_k > 0$, $k = \overline{1,2}$), а прикладені до пластини розподілені згинальні моменти на нескінченності – через M_x^∞ і M_y^∞ .

З урахуванням контакту берегів тріщин розв'язок задачі розбиваємо на дві: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Відтак на берегах k -ої тріщини будемо вимагати виконання таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N_k/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k,$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_k, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k,$$

$$M_k = (1 - \gamma/3)hN_k, \quad \partial_x[v_{\Pi}] - 0,5 \left\{ 1 + (1 - \gamma)^2 \right\} h \partial_x[\varphi_y] = 0, \quad x \in L_k,$$

де σ_{xy} , σ_{yy} та v_{Π} – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь Oy у плоскій задачі; φ_y – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [2]; M_y – згинальний момент; Q_y і H_{xy} – поперечна сила і крутний момент відповідно;

$\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; символами «+» і «-» позначені відповідно граничні значення функції при прямуванні точки площини до берегів тріщин при $y \rightarrow \pm id + i0$ і $y \rightarrow \pm id - i0$; $\gamma = h_1/h$ – зведена ширина області контакту [3].

На основі методів теорії функції комплексної змінної, комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини [1] отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно усередненого за товщиною пластини кута повороту нормалі до серединної площини пластини, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. У часткових випадках отримано відомі в літературі результати для однієї та двох тріщин, коли контакт відбувається вздовж лінії на одній з основ пластини. Здійснено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності для контактного зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності згинальних і крутних моментів, а також поперечних сил при різних значеннях параметрів задачі.

1. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1990. – 256 с.
2. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123-127.

REISSNER'S PLATE BENDING WITH TWO PARALLEL NOT MOVED THROUGH-THE-THICKNESS EQUAL CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT REGION WIDTH OF THEIR FACES

In the paper stressedly-deformed state of the boundless isotropic plate with two parallel not moved equal cracks is investigated which faces are free of the external loading. The plate is under the loading by the evenly distributed bending moments on the infinity. It is assumed that the cracks faces are in the smooth contact on all cracks length on a two-dimensional region on overhead basis of plate. The numerical analysis of the problem solution is conducted.

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ІЗ ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Георгій Сулим, Ярослав Пастернак, Михайло Томашівський

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;
Луцький національний технічний університет,
вул. Львівська, 75, м. Луцьк, 43018, Україна*

Унаслідок можливості забезпечити у композиційних матеріалах набагато вищі експлуатаційні параметри порівняно із традиційними, перші набули широкого використання у сучасних інженерних конструкціях. Особливе місце серед них посідають стрічкові композити, завдяки можливості забезпечити вищу об'ємну наповнюваність арматурою, кращу адгезію тощо. З іншого боку у всіх природних і створюваних людиною матеріалів більшою чи меншою мірою присутні різноманітні порушення однорідної будови (тонкі включення, порожнини, тріщини), що внаслідок концентрації на них фізико-механічних полів спричиняють руйнування конструкцій. Для аналізу крайових ефектів у такого роду проблемах, зокрема впливу межі тіла на інтенсивність теплових потоків та напружень у околі вістря включення, часто розглядають задачу термопружності анізотропного півпростору із тріщинами та тонкими неоднорідностями, до якої застосовують різні методи (див., зокрема, [1, 2]).

У цій роботі розширюються можливості підходу [3, 4] для отримання інтегральних формул і рівнянь для анізотропного термопружного півпростору з отворами, тріщинами і тонкими деформівними включеннями. Отримано подання ядер цих інтегральних рівнянь для чотирьох можливих випадків однорідних крайових умов на межі середовища. Ці інтегральні рівняння разом із залученими співвідношеннями математичної моделі включення та умовами ідеального термомеханічного контакту матеріалів розв'язано числово із використанням модифікованого методу граничних елементів. Це дало можливість дослідити низку нових задач для термопружності півпростору з тріщинами або тонкими деформівними включеннями, з'ясувати вплив умов на межі анізотропного термопружного півпростору на інтенсивність напружень в околі торця включення.

1. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Качан Ю.Б. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами, упругими и жесткими включениями // Теорет. и прикл. мех. – 2002. – № 35. – С. 53–65.
2. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – **37**, No. 2. – P. 419–433.
4. Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H. Boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – **37**, No. 11. – P. 1514–1523.

THERMOELASTICITY OF AN ANISOTROPIC HALF-SPACE WITH CRACKS AND THIN INCLUSIONS

The present study derives the Somigliana type boundary equations for an anisotropic thermoelastic half-space with holes and thin inclusions. This work investigates the influence of boundary effects in an anisotropic thermoelastic half-space on the stress intensity factors of thin inclusions.

УДК 539.3

СМУГА ЛОКАЛІЗАЦІЇ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ В ОДНОРІДНОМУ МАТЕРІАЛІ ТА НА ІНТЕРФЕЙСІ МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ

Юрій Черняков, Алла Шевельова, Шевченко А.Г.

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
пр-т Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

Досліджується смуга локалізації пластичної деформації для випадків однорідного ізотропного матеріалу та в області розділу двох матеріалів за умови, що діаграма зсуву матеріалу в першому випадку та міжматеріального прошарку у другому випадку має «пік-зуб».

У першій задачі розглядається нескінченна пластина, яка знаходиться в умовах узагальненого плоского напруженого стану під дією зсувного навантаження τ_0 на нескінченності. Розшукується смуга локалізації пластичної деформації пластини на відрізку $(-b, b)$, наявність якої пов'язана з нетривіальним розв'язком поставленої задачі, який має місце разом з однорідним розв'язком $\sigma_{11}(x, y) = 0$, $\sigma_{22}(x, y) = 0$, $\sigma_{12}(x, y) = \tau_0$.

У відповідності з діаграмою зсуву будемо вважати, що на ділянці $l < |x| < b$ цієї смуги виникає дотичне напруження τ_s^{up} , яке відповідає верхній границі текучості, а на ділянці $|x| < l$ — маємо τ_s^{low} , яке відповідає площинці плинності. Тоді, подумки розрізаючи смугу локалізації пластичної деформації по осі x і замінюючи дію пластичних зв'язків між берегами дотичними напруженнями τ_s^{up} і τ_s^{low} на відповідних ділянках берегів, приходимо до задачі лінійної механіки руйнування з невідомими положеннями точок b і l .

Для розв'язку сформульованої задачі, використовуючи крайову дислокацію з відповідним вектором Бюргерса, приходимо до сингулярного інтегрального рівняння з ядром типу Коші. Точний розв'язок останнього, дає довжину смуги пластичності в залежності від співвідношень зовнішнього навантаження та напружень τ_s^{up} і τ_s^{low} .

В другій задачі маємо нескінченну пластину, що складається з двох спаяних півплощин $y > 0$ і $y < 0$ з механічними характеристиками μ_1 , κ_1 ($y > 0$) і μ_2 , κ_2 ($y < 0$). На нескінченності на пластину діє постійне зсувне навантаження τ_0 .

Враховуючи, що міжматеріальний прошарок зазвичай є дуже тонким, будемо спрямовувати його товщину до нуля і називати границею поділу матеріалів, приписуючи цій границі механічні властивості прошарку. Крім того враховуючи, що зварні та клейові прошарки зазвичай є м'якшими від матеріалів матриці, будемо вважати, що смуга локалізації пластичної деформації виникає у цьому прошарку. Тобто відрізок $(-b, b)$ прошарку є смугою локалізації пластичної деформації з тими ж фізичними властивостями, що і в однорідному випадку.

Розв'язок задачі у випадку неоднорідного матеріалу проведено іншим шляхом ніж в однорідному, а саме за допомогою співвідношень [2], сформульована крайова задача Діріхле для

кусково-аналітичної функції $F_1(z)$

$$\operatorname{Re}\left(i F_1^{\pm}(x)\right)=-\frac{\tau(x)}{g(1+\gamma)} \text { для }-b < x < b,$$

за умови на нескінченості

$$F_1(x)\big|_{x \rightarrow \infty}=0.$$

Виписано її точний аналітичний розв'язок [2]

$$i F_1(z)=-\frac{\sqrt{(z-b)(z+b)}}{2 \pi i g(1+\gamma)} \int_{-b}^b \frac{\tau(t) d t}{(t-z) \sqrt{(t-b)(t+b)}},$$

за додатковою умовою

$$-\frac{2}{g(1+\gamma)} \int_{-b}^b \frac{\tau(t) d t}{\sqrt{(t-b)(t+b)}}=0.$$

Сформульовано трансцендентне рівняння для знаходження довжини смуг локалізації пластичної деформації. Отримані аналітичні формули для напружень на продовженні тріщини та стрибка переміщень у смузі локалізації. Чисельна реалізація проведена для різних зовнішніх навантажень і різних механічних властивостей матеріалів.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. – 1966. – 707 с.
2. Herrmann K.P., Loboda V.V., Kharun I.V. Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading // Theor. and Appl. Fract. Mech., 2004. – Vol. 42. – P. 335-348.

LOCALIZATION STRIP OF PLASTIC DEFORMATION ON THE INTERFACE BETWEEN THE TWO MATERIALS

A localization strip of plastic deformation between two materials assuming that the graph of intermaterial deformation has a peak-"tooth" is investigated. Dirichlet problem for a piecewise-analytic function is formulated and solved exactly. The numerical results of the length of localization strip of plastic deformation, shear displacement jumps and shear stress for various external loads and mechanical properties of materials are presented.

УДК 539.3

XFEM-BASED PREDICTION OF FATIGUE CRACK GROWTH FOR A NICKEL SUPERALLOY AT ELEVATED TEMPERATURE

**F Farukh, LG Zhao, R Jiang, P Reed,
D Proppentner, B Shollock**

*School of Mechanical and Manufacturing Engineering, Loughborough
University, UK;*

School of Engineering and the Environment, University of Southampton, UK;

Department of Materials, Imperial College London, UK;

Warwick Manufacturing Group, University of Warwick, Coventry, UK

**Corresponding author's email: L.Zhao@Lboro.ac.uk*

1. Introduction

Nickel-based superalloys are designed to provide special combination of properties such as strength, toughness and thermal performance which make them suitable for structural components undergoing high mechanical and thermal stresses. The typical application of these alloys is in turbine blades and discs in the hot section of gas turbines. In this paper, a viscoplastic constitutive model has been used to simulate crack-tip deformation and predict crack growth for a nickel alloy LSHR (low solvus high refractory) at elevated temperature under fatigue loading conditions. The viscoplastic model was implemented as a user-defined material subroutine (UMAT) interfaced with the commercial finite element package ABAQUS [1]. The accumulated plastic strain calculated by the UMAT was used as a criterion for prediction of damage initiation. Using the XFEM (Extended Finite Element Method), crack growth was predicted for selected loading range and superimposed dwell times, and compared with those obtained experimentally.

2. Material Model and X-FEM

The material model is essentially the constitutive equations developed by Chaboche [2], where both isotropic and kinematic hardening variables are considered during the transient and saturated stages of cyclic deformation. A power relationship is adopted for the viscopotential and the viscoplastic strain rate tensor $\dot{\epsilon}_p$ is expressed as [2]:

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\langle \frac{f}{Z} \right\rangle^n \frac{\partial f}{\partial \sigma},$$

where f is the yield function, Z and n are material constants, σ is the stress tensor, and the bracket $\langle \rangle$ represents a sign function. The material model has been programmed into a UMAT interfaced with ABAQUS.

The XFEM allows crack propagation to be modelled without the introduction of a predefined path. A three-point bend specimen was considered, and meshed into four-node first-order elements with full integration. The applied cyclic load has a ratio of 0.1, and the load amplitude was chosen to be the same as that used in crack growth testing ($P_a=1.5\text{kN}$). It was postulated that crack starts to grow when the accumulated plastic strain reaches a critical value of 0.23 which was calibrated using the crack growth test data. Two loading waveforms (1-20-1-1 & 1-90-1-1) were considered, where 20 and 90 refer to the dwell period (in seconds) at the maximum load.

3. Results

For a stationary crack, finite element analyses showed the progressive accumulation of plastic strain near the crack tip over the number of cycles, which justify the suitability of accumulated plastic strain as a criterion for predicting crack growth under fatigue. During the simulation, the number of cycles was recorded against the length

of the crack, and the results were compared with the experimental data obtained in vacuum (Fig. 1). The use of vacuum results is necessary in order to remove the influence of oxidation, which can be considerable at elevated temperature. As

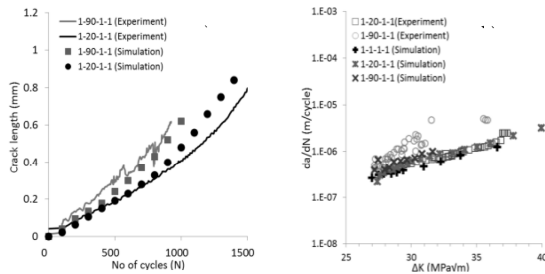


Fig. 1, (a) Crack length against N and (b) da/dN against ΔK : X-FEM predictions vs. experimental results.

shown in Fig. 1, a good agreement between the simulation results and experimental data proves the model's capability to predict crack growth in nickel-based superalloys at high temperature. It is also shown that an increase of dwell period leads to an increase of crack growth rate due to the increased creep deformation near the crack tip, but this effect is marginal when compared to the dwell effects under fatigue-oxidation conditions [3].

4. Acknowledgements

The work was funded by the EPSRC (Grants EP/K026844/1, EP/K027271/1 and EP/K027344/1) of the UK and in collaboration with Nasa, Alstom, E.On and Dstl.

1. ABAQUS (2014) Version 6.13, Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, France.
2. *Chaboche JL* (1989) Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity* 5, 247-302.
3. *Zhao LG and Tong J* (2008) A viscoplastic study of crack-tip deformation and crack growth in a nickel-based superalloy at elevated temperature. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56, 3363-3378.

УДК 539.3

PRE-FRACTURE ZONES FOR A LIMITED PERMEABLE CRACK IN AN INTERLAYER BETWEEN MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC MATERIALS

O. Viun, F. Labesse-Jied, V. Loboda, Y. Lapusta

*Clermont Universite, Institut Pascal, Campus des Cezeaux 24 avenue des
Landais 63171 Aubiure Cedex, France;*

*Universite Blaise Pascal - IUT d'Allier, Institut Pascal,
BP 2235, 03100 Montluzon, France;*

*Dnipropetrovsk National University,
Gagarin Av., 72 Dnipropetrovsk 49010, Ukraine;*

*French Institute of Advanced Mechanics, Institut
Pascal/IFMA/CNRS/Clermont Universite, Campus de Clermont-Ferrand /les
Cezeaux, BP 265, 63175 Aubiure Cedex, France*

Wide use of active materials in important industrial applications makes it necessary to study their strength and reliability. One of the main causes of their destruction are interface cracks.

In this work, a plane-strain problem for a limited electro-magneto permeable crack in an adhesive thin interlayer between two semi-infinite electro-magneto-elastic spaces is considered. It is assumed that a uniformly distributed mechanical stress $\sigma_{33} = \sigma^\infty$, an electric displacement $D_3 = d^\infty$ and a magnetic induction $B_3 = h^\infty$ are applied at

infinity. The crack is supposed electrically and magnetically limited permeable with unknown electrical d_0 and magnetic h_0 displacements in the crack region.

Similarly to [1], we model the mechanical yield zones $|x_1| \in (a, b)$, $x_3 = 0$ by crack continuations and assume that $\sigma_{33}(x_1, 0) \equiv \sigma_Y$ in these zones. The electric and magnetic polarization saturation zones are modeled by segments $|x_1| \in (a, e)$, $|x_1| \in (a, c)$ at the crack continuations with prescribed saturated electric displacements and magnetic induction $D_3(x_1, 0) \equiv d_S$, $B_3(x_1, 0) \equiv h_S$.

Using the presentations of electro-magneto-mechanical values via sectionally-analytic functions [2] and satisfying the boundary conditions the formulated problem was reduced to the system of three equations of linear relationship:

$$\sum_{j=3}^5 G_{ij} \left[W_j^+(x_1) + W_j^-(x_1) \right] = R_i(x_1) \quad x_1 \in [-l_i, l_i], \quad i = 3, 4, 5,$$

where $W_i(x_1)$, $i = \overline{3, 5}$ are unknown functions, $\mathbf{G}$ is a known material matrix [2], $R_i(x_1)$ are sectionally-constant functions; $l_1 = b$, $l_2 = e$ and $l_3 = c$.

The exact solution of this system is found analytically. Functions $W_i(z)$ and all electro-magneto-mechanical quantities at the interface are found as well. Particularly the equations for determination of the point b is obtained in the form:

$$\arccos\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega_{11}\sigma^\infty + \Omega_{12}(d^\infty - d_0) + \Omega_{13}(h^\infty - h_0)}{\Omega_{11}\sigma_Y + \Omega_{12}(d_0 - d_S) + \Omega_{13}(h_0 - h_S)},$$

where $\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{G}^{-1}$. Similar equations for the determination of c and e are also obtained. Expressions for the crack opening displacement jump, electrical potential, magnetic induction jumps and J -integral are presented by simple formulas. The unknown electrical d_0 and magnetic h_0 displacements in the crack region are obtained from algebraic equations.

The J -integral grows with growing of the mechanical load and decreases with growing of the electric flux. The pre-fracture zone lengths, the crack opening, the module of magnetic and electric potential jumps at the initial crack tip are larger for a crack filled by air than for the same crack filled by water. However, concerning the

J -integral, this effect is opposite.

Acknowledgements

This work has been partially carried out within the framework of the Transversal Program of the Pascal Institute, Division "Materials and Multiscale Modeling" and of the Excellence Laboratory LabEx IMobS3 (ANR-10-LABX-16-01) (supported by the French program investissement d'avenir and managed by the National Research Agency (ANR), the European Commission (Auvergne FEDER funds) and the Region Auvergne, which is gratefully acknowledged.

1. Leonov M., Panasyuk V., Development of the smallest cracks in a rigid body, Appl. Mech. (in Russian) 5 (1959) 391-401.
2. Khodanen T.V., Loboda V.V. Problem of thermoelectromagneto elasticity for a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial with interface crack. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 165, No. 3, 2010. – P. 301-317.

ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ ПРОНИКНОЇ ТРІЩИНИ У ПРОМІЖНОМУ ШАРІ МІЖ МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Розглядається задача плоскої деформації для обмеженої проникної тріщини у адгезивному тонкому проміжному шарі між двома напів-безмежними електромагнітопружними просторами. Механічні напруження розтягу, електричне зміщення і магнітна індукція прикладаються на безмежності. Механічна, електрична і магнітна зони передруйнування моделюються на продовженні тріщини. Задача зводиться до задачі Гільберта-Рімана, яка розв'язується точно. Рівняння для визначення довжини зони передруйнування, вирази для скачка переміщень розкриття тріщини, скачків електричного потенціалу та магнітної індукції а також J -інтеграл отримуються в аналітичному вигляді.

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

УДК 532:595

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАПІЛЯРНОЇ РІДИНИ В РУХОМОМУ ЦИЛІНДРІ

Михайло Барняк, Іван Луковський

*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 01601, Україна*

В роботі запропоновано метод побудови коефіцієнтів рівнянь руху капілярної рідини, яка частково заповнює рухому циліндричну посудину. Спочатку розв'язується задача про форму рівноваги вільної поверхні рідини під дією сил ваги і сил поверхневого натягу, яка описується системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$(rz')' = bzs + cr, \quad r'^2 + z'^2 = 1, \quad (1)$$

де $(\cdot)$ означає диференціювання по довжині дуги s , $b = \rho g L^2 \sigma^{-1}$ – число Бонда. Розв'язки задачі подаються у вигляді степеневих рядів, а при великих числах Бонда також у вигляді асимптотичного подання.

Однією з основних задач, які описують динаміку обмеженого об'єму рідини в порожнині твердого тіла, є задача про власні коливання ідеальної нестисливої капілярної рідини в нерухомій посудині вигляду

$$\Delta_m \Phi = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } L, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \kappa dh \text{ на } \Gamma, \\ -\frac{1}{b} \left[\frac{d}{dr} (rd^3) \frac{dh}{dr} - \frac{m^2 dh}{r} \right] + h = \kappa \Phi, \quad \frac{dh}{dr} = 0 \text{ при } r = 1, \quad (2)$$

де $\kappa = \omega L^{1/2} g^{-1/2}$, ω – частота власних коливань, L – радіус циліндра, $\Phi(r, z)$ – потенціал швидкостей, $h(r)$ – відхилення по вертикалі вільної поверхні рідини, $d = d(s) = \frac{dr}{ds}$.

Для побудови розв'язків цієї спектральної крайової задачі застосовується варіаційний метод.

Теорема 1. Найменше по модулю власне значення задачі (2) визначається як мінімум абсолютної величини функціоналу

$$K(\Phi, h) = \frac{1}{2 \int_{\Gamma} r \Phi h dr} \left\{ \int_G \left[r \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + r \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 + \frac{m^2}{r} \Phi^2 \right] dG + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{b} \left\langle r d^3 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + \frac{m^2 d}{r} h^2 \right\rangle + r h^2 \right] dr \right\}. \quad (3)$$

Зауважимо, що перше власне значення задачі

$$\Delta_m \Psi = 0 \text{ в } G_0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \text{ на } L_0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \kappa^2 \Psi \text{ на } \Gamma_0, \quad (4)$$

яка описує власні коливання “важкої” рідини відрізняється від відповідного власного значення задачі (2) при числах Бонда менших ніж 100 на 1 відсоток. Друге і третє власне значення відрізняються на 15 і 40 відсотків, тобто для дослідження власних коливань і в інших, нециліндричних порожнинах, при числах Бонда менших 100 необхідно враховувати вплив сил поверхневого натягу, а при більших значеннях чисел Бонда можна використовувати і модель “важкої” рідини. Досліджуються межі застосування різних моделей.

1. Барняк М.Я., Луковський І.О. Визначення динамічних характеристик капілярної рідини в рухомому циліндрі при великих числах Бонда. Зб. Праць Ін-ту математики НАН України – 2013, 10, №3. – С. 20-35.

DETERMINATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS CAPILLARY FLUID IN A MOVING CYLINDER

A method for constructing the hydrodynamic coefficients of the equations of a capillary liquid partly filling a mobile cylindrical tank is proposed. First, the problem on the capillary meniscus is solved for large Bond number. For constructing a solution of the spectral boundary problem describing the natural sloshing modes and frequencies, a variational method is applied. A numerical realization of the method versus the Bond number is presented.

УДК 539.3

ДИНАМІЧНІ КІН ПОБЛИЗУ ПОЛОГОГО ТОНКОСТІННОГО ВКЛЮЧЕННЯ У ПОЛІ ГАРМОНІЧНОЇ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ

Іванна Бутрак

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Теоретичні дослідження напружено-деформованого стану композитних матеріалів з об'ємними включеннями різної топології можна знайти у роботах [1, 3, 4] та ін. Нижче розглянуто тривимірну задачу динамічної поведінки пружного тонкостінного включення з викривленою серединною поверхнею в умовах гармонічного хвильового навантаження.

Розглянемо безмежне пружне тіло з модулем зсуву G , що містить податливе включення, розташоване вздовж гладкої поверхні S . Протилежні поверхні неоднорідності знаходяться під дією самозрівноваженого низькочастотного гармонічного хвильового навантаження, коли всі параметри напружено-деформованого стану змінюються в часі t і в просторі $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ за законом $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$, де $f(\mathbf{x})$ – задана амплітуда коливань, ω – циклічна частота коливань, $i = \sqrt{-1}$. Тоді шляхом відокремлення експоненціального часового множника та задоволення ефективних контактних умов на серединній поверхні включення S задача зводиться до розв'язання системи трьох граничних інтегральних рівнянь (ГІР):

$$\sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{1}{G} [(f - g) n_{i\mathbf{x}} n_{j\mathbf{x}} + g \delta_{ij}] \Delta u_j(\mathbf{x}, \omega) + \iint_S \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, \omega) \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) dS_{\boldsymbol{\xi}} \right\rangle =$$

$$= -\frac{N_i(\mathbf{x}, \omega)}{4G}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (1)$$

де Δu_j ($j = \overline{1, 3}$) – стрибки переміщень на включенні; Ω_{ij} – ядра з особливістю потенціалу Гельмгольца, приведені в [2]; $n_{i\mathbf{x}}$ ($i = \overline{1, 3}$) – проекції нормалей до поверхні S у точці $\mathbf{x}$; N_i ($i = \overline{1, 3}$) – проекції амплітуди напружень у падаючій хвилі; δ_{ij} – символ Кронекера; f , g – коефіцієнти жорсткості включення.

Систему ГР (1) розв'язано аналітично методом малого параметра [2], який передбачає виконання умов пологості включення та низькочастотності навантаження. Це дозволило шукати функції Δu_j подати у вигляді подвійного збіжного ряду за частотою ω та малим геометричним параметром ε викривлення включення

$$\Delta u_j(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta u_j^{(k,q)}(\mathbf{x}) \omega^k \varepsilon^q, \quad j = \overline{1, 3},$$

де функції $\Delta u_j^{(k,q)}$ визначаються аналітично з інтегральних рівнянь зі статичними ядрами та заданих на плоскій області. Отримано наближені формули для розрахунку динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (ДКІН), за допомогою яких досліджено вплив на їх значення частоти коливань, геометричних розмірів включення та співвідношень між пружними характеристиками матриці та неоднорідності.

Як приклад, розглянуто включення, що розташоване вздовж поверхні сфероїда за падіння сферичної гармонічної хвилі з постійною амплітудою. Обчислено залежності амплітуди ДКІН нормального відриву і поперечного зсуву від нормалізованого хвильового числа в діапазоні низьких частот коливань. Побудовано графіки для різних значень діаметрів основи включення. На основі побудованих графіків проаналізовано інерційні ефекти, що пов'язані з впливом змінної кривини поверхні включення на концентрацію напружень в її околі.

1. Бутрак І.О., Кільницька Т.І., Хай О.М. Динамічний контакт сферичного включення з матрицею за падіння пружної хвилі // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 99-104.
2. Михаськів В.В., Бутрак І.О. Тривимірні динамічні задачі для пружного тіла з пологою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 1. – С. 63-70.
3. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 27-35.
4. Hirose S. Boundary integral equation method for transient analysis of 3-D cavities and inclusions // Engng Analysis with Boundary Elements. – 1991. – **8**. – P. 146-154.

DYNAMIC OF THE MODE SIFS AROUND A SHALLOW THIN-WALLED INCLUSION BY THE TIME-HARMONIC ELASTIC WAVE

A three-dimensional problem of dynamic behavior elastic inclusion of curved surfaces under time-harmonic wave loading is investigated by the analytic small parameter method. The inertial effects associated with the influence of variable curvature surfaces inclusion on the concentration of stress in its neighborhood are analyzed.

УДК 539.3

**ДИНАМІЧНІ НАПРУЖЕННЯ ЗА ПАДІННЯ ГАРМОНІЧНОЇ
ПРУЖНОЇ ХВИЛІ НА ДВОПЕРІОДИЧНИЙ МАСИВ
ПОДАТЛИВИХ ДИСКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ****Іванна Бутрак, Ігор Жбадинський, Віктор Михаськів**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Для теоретичного аналізу блокування і локалізації хвиль у тілах з множинними дисковими включеннями доцільно розглядати спрощені моделі пружних середовищ з періодичними неоднорідностями [1]. Такі дослідження мають практичну цінність з точки зору опису властивостей фононних кристалів [2], зацікавленість якими за останні роки стрімко зростає. Нижче метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР) застосовано для вивчення взаємодії періодичного масиву дискових включень малої жорсткості за падіння на них плоскої поздовжньої хвилі.

Розглянемо безмежну пружну матрицю з модулем зсуву G та коефіцієнтом Пуассона ν , в площині $x_3 = 0$ якої розташовано дво-періодичний масив податливих дискових включень $S^{(mn)}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) з однаковими товщинами h , радіусами a , модулями зсуву $G_0 \ll G$ та коефіцієнтами Пуассона ν_0 . Центри включень розташовані на паралельних до осі Ox_1 прямих з періодичною відстанню d_1 та на паралельних до осі Ox_2 прямих з періодичною відстанню d_2 . Припускаємо, що включення перебувають в умовах ідеального механічного контакту з матрицею, тобто забезпечується неперервність переміщень та напружень при перетині міжфазних поверхонь.

В композиті поширюється гармонічна пружна плоска поздовжня хвиля з перпендикулярним до площини розташування неоднорідностей вектором переміщень $\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ та циклічною частотою коливань ω . Така хвиля викликає в площині неоднорідностей тільки нормальні напруження $\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x})$. Тут і надалі розглядаються лише амплітудні значення величин хвильового процесу, оскільки загальний експоненціальний множник $\exp(-i\omega t)$, де t – час, $i = \sqrt{-1}$, вилучається з розв'язку.

Наявність в просторі множинних розсіювачів спричинює супер-

позиційне хвильове поле, переміщення в якому $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ подається у вигляді:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^{(mn)}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де $\mathbf{u}^{(mn)}$ – невідомі переміщення в розсіяних включеннях хвилях. Всі складові у співвідношеннях (1) повинні задовільняти дифракційні рівняння руху у випадку стаціонарних коливань [1].

За аналогічними співвідношенням (1) суперпозиційними формулами, визначаються загальні напруження в тілі. Керуючись періодичністю розташування дефектів, враховуючи теорію Блоха про поширення хвиль в пружному середовищі [1] та задовольнивши граничні умови в області розташування одного з включень масиву, задачу зведено до ГР, заданого в обмеженій області актуального включення $S^{(00)}$, відносно функції розходження його поверхонь Δu_3 :

$$f \Delta u_3(\mathbf{x}) - \frac{4G}{k_2^2} \iint_{S^{(00)}} \Delta u_3(\boldsymbol{\eta}) [R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|) - L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})] dS = \sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S^{(00)}. \quad (2)$$

Тут коефіцієнт f задається через механічні параметри включення, особливість потенціалу Гельмгольца присутня в ядрі R . Регулярне ядро L , що містить періодичну функцію напружень Гріна [1], описує взаємодію включення з сусідніми.

За результатами числового розв'язання рівняння (2) для різних відстаней між включеннями, визначаються залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від хвильового числа.

1. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. – 260 p.
2. Pennec Y., Vasseur J.O., Rouhani B.D., Dubrzynski L., Deymier P.A. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications // Surface Science Reports. – 2010. – № 65 – P. 229-291.

DYNAMIC STRESSES DUE TO TIME-HARMONIC ELASTIC WAVE INCIDENCE ON DOUBLY PERIODIC ARRAY OF COMPLIANT DISK INCLUSIONS

The symmetric problem of time-harmonic elastic wave interaction with a periodic array of coplanar compliant disk inclusions embedded in an infinite elastic matrix is numerically investigated. By using the superposition principle and the conjunction of boundary conditions on multiple-connected space domain with natural symmetry conditions due to the problem periodicity, the boundary integral equation is formulated without any strong restrictions on the distance between the scatterers and the frequency range. Numerical results for the mode-I dynamic stress intensity factor are presented and discussed to show its variation with the dimensionless wave number and the distance between the inclusions.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРУ ЗБУДЖЕННЯ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР В СИСТЕМАХ РЕАКЦІЇ-ДИFUЗІЇ

Зоряна Васюник

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Характер збудження неоднорідних структур в системах реакції-дифузії буває м'яким і жорстким. За м'якого сценарію втрати стійкості встановлюється коливна періодична структура, амплітуда таких коливань пропорційна квадратному кореню з закритичності (різниці між критичним і фактичним значенням біфуркаційного параметра). Вважається, що в цьому випадку реалізується закритичне галуження розв'язків.

У випадку жорсткої втрати стійкості ще перед точкою біфуркації область притягання однорідного стану стає дуже малою і завжди присутні випадкові збурення викидають систему з цієї області ще до того, як ця область притягання повністю зникає. При цьому система переходить на новий режим стрибком, тобто реалізується докритичне галуження розв'язку. Цей режим може бути іншою стаціонарною структурою, чи стійкими коливаннями, чи більш складним хаотичним режимом.

Для дослідження характеру галуження розв'язку систем реакції дифузії, які в загальному випадку мають вигляд:

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - q(\theta, \eta, A), \quad (1)$$

$$\tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - Q(\theta, \eta, A) \quad (2)$$

з умовами Неймана на границі, використано метод малого параметра. Причому за малий параметр взято відхилення біфуркаційного параметра від критичного значення при якому відбувається біфуркація. Для отримання наближеного розв'язку системи (1-2), та дослідження характеру збудження неоднорідних структур введено відхилення $\tilde{\theta} = \theta - \theta_c$, $\tilde{\eta} = \eta - \eta_c$, $\mu = A - A_c$, вважаючи відхилення малою величиною ($\tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \mu \ll 1$), і розкладено функції $q(\theta, \eta, A)$, $Q(\theta, \eta, A)$ в ряд по степенях даного відхилення при

цьому ми обмежувались третім порядком малості:

$$q(\theta, \eta, A) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} q_{ij} \tilde{\theta}^i \tilde{\eta}^j + q_{A\mu} + q_{1A\mu} \tilde{\theta} + q_{A1\mu} \tilde{\eta}, \quad (3)$$

$$Q(\theta, \eta, A) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} Q_{ij} \tilde{\theta}^i \tilde{\eta}^j + Q_{A\mu} + Q_{1A\mu} \tilde{\theta} + Q_{A1\mu} \tilde{\eta}, \quad (4)$$

де q_{ij} , Q_{ij} відповідні коефіцієнти розкладу.

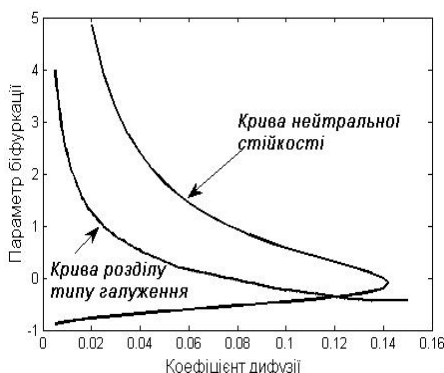


Рис. 1

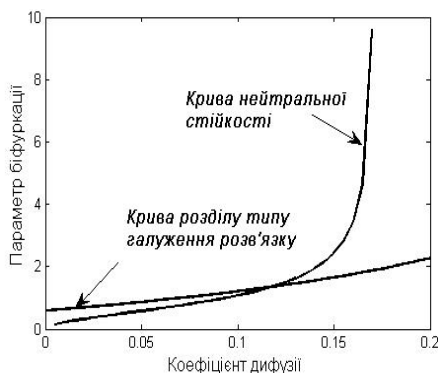


Рис. 2

Дане дослідження проведено для модельних систем (1-2) з кубічними $q(\theta, \eta, A) = \eta - \theta^2 - 1$, $Q(\theta, \eta, A) = \eta(\eta - (\theta - A)^3)$, та експоненційними $q(\theta, \eta, A) = \eta - c\hbar\alpha\theta$, $Q(\theta, \eta, A) = \alpha\eta(\eta - \exp(\alpha\theta) + A)$ нелінійностями і побудовано для них криві розділу типу галуження розв'язку (рис. 1 і рис. 2, відповідно).

1. Гафійчук В.В., Дацко Б.Й., Васюник З.І. Дослідження різних типів біфуркації у системах типу реакція-дифузія // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2001. – 44, №1. – С.155-161.
2. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитони. – Москва: Наука, 1991 – 198 с.
3. Сугаков В.Й. Основи синергетики. – Київ: Обереги, 2001. – 287 с.
4. Sattinger D. Topics in stability and bifurcation theory. – Berlin: Springer Verlag – 1973. – 136 p.

INVESTIGATION THE NATURE OF THE EXITATION INHOMOGENEOUS STRUCTURES IN REACTION-DIFFUSION SYSTEMS

A small parameters method is used to study the different nature branching of inhomogeneous solutions to the systems of reaction-diffusion type. For particular model systems the corresponding diagrams are built.

УДК 539.3

ПРО ОДНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ШАРУВАТОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Юрій Глухов

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова 3, м. Київ, 03057, Україна*

В рамках постановок, викладених в роботах [1, 2], розглянута плоска задача про зосереджену силову дію на двошарову смугу, що лежить на пружній основі. Рух верхнього шару смуги описаний системою рівнянь з теорії пластин, що враховує інерцію обертання і поперечний зсув [4]. Підстилаючий шар та пружна основа мають початкові напруження і складаються із стисливого або нестисливого матеріалу з довільним пружним потенціалом. Матеріали шару та півпростору вважаються ізотропними в природньому стані. Форми пружних потенціалів мають загальний вид і повинні бути конкретизовані лише при виконанні чисельних розрахунків.

Дослідження проведені у рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [3].

Пластина товщиною $2h$ лежить на пружному шарі товщиною H , який в свою чергу лежить на пружному півпросторі. Пластина і підстилаючий шар віднесені до декартової системи координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , які вводяться в початковому деформованому стані. Координатна площина $\xi_1 O \xi_3$ співпадає з середньою поверхнею пластини.

Вважаємо, що навантаження рухається по вільній поверхні пластини ($\xi_2 = h$) з постійною швидкістю v на протязі великого проміжку часу. Координати рухомої системи координат визначаються співвідношеннями $y_1 = \xi_1 - vt$, $y_2 = \xi_2$.

Використовуючи формули, приведені в роботі [3], лінеаризовані рівняння руху точок шару та півпростору при плоскій деформації в координатах (y_1, y_2) через функцію $\chi^{\{s\}(j)}(y_1, y_2)$ запишемо в вигляді:

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j, s = 1, 2. \quad (1)$$

Значення $s = 1$ відповідає шару, значення $s = 2$ – півпростору.

Рівняння руху пластини з урахуванням зсуву та інерції обертання в рухомій системі координат мають вигляд

$$\begin{aligned}
 & 2h \left(\frac{2G_1}{1 - \nu_1} - \rho_1 v^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \tau = P_1; \\
 & 2h \left(\kappa G_1 - \rho_1 v^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - q = P_2; \\
 & \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1 - \nu_1} - \rho_1 v^2 \delta_0 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} - \varphi \right) - \tau = 0.
 \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) і (2) використовуються такі ж позначення, як і роботах [1,2].

При $y_2 = -h$ умови контакту між пластиною і шаром можна записати у вигляді

$$\tilde{Q}_{22}^{\{1\}} = q; \quad u_2 = w; \quad \theta^{\{1\}} \tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \tau; \quad \left(1 - \theta^{\{1\}} \right) \tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \theta^{\{1\}} (u_1 - u - h\varphi). \quad (3)$$

Контакт шару з пружною основою при $y_2 = -h - H$ описується рівняннями

$$\begin{aligned}
 & u_2^{\{1\}} = u_2^{\{2\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{2\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \theta_1^{\{2\}} \tilde{Q}_{21}^{\{2\}}; \\
 & \left(1 - \theta_1^{\{2\}} \right) \tilde{Q}_{21}^{\{2\}} = \theta_1^{\{2\}} \left(u_1^{\{2\}} - u_1^{\{1\}} \right).
 \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $\theta_1^{\{s\}} = 1$ відповідає жорсткому контакту, а $\theta_1^{\{s\}} = 0$ – нежорсткому контакту елементів шаруватого середовища.

Таким чином, задача зводиться до визначення функцій $\chi^{\{s\}(j)}$ і φ з допомогою рівнянь (1) при граничних умовах (2-4).

Розв'язок задачі отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є.

Розв'язок представлений в загальному вигляді для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних матеріалів елементів багатошарового середовища, умов їх сполучення і для будь-якої швидкості руху поверхневого навантаження.

1. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 36-54.
2. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 4. – С.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: "А.С.К.", 2004. – 672 с.
4. Achenbach J.D., Keshawa S.P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967.- 34, № 4. – P. 183-189.

**ABOUT ONE DYNAMIC TASK FOR THE STRATIFIED SEMISPACE
WITH INITIAL STRESSES**

Within the bounds of linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses staging a planar problem of the perturbation of moving with a constant speed of the surface load of two-layered pre-stressed stripe with the elastic basis. The model of the layered medium is considered "a plate, elastic layer, elastic semispace". With the help of the Fourier integral method a fundamental solution to the problem is obtained in general form under various conditions of contact and speeds of load.

УДК 539.3: 534.1

**ВІЛЬНІ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ
ВИДОВЖЕНИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ**

Тарас Горячко, Оксана Лесик, Віра Пакош, Федір Якімов

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46000, Україна*

Тонкі видовжені композитні циліндричні панелі, що піддаються впливу інтенсивних динамічних, зокрема циклічних, навантажень, які викликають співмірні з товщиною нормальні переміщення, тобто геометрично нелінійний динамічний напружено-деформований стан, широко застосовуються в конструкціях і технічних засобах різноманітного цільового призначення [1]. Щоб уникнути резонансних явищ в експлуатаційних умовах, необхідно на стадії проектування визначити спектр власних частот зазначених конструктивних елементів. Через дефіцит і високої ціни традиційних матеріалів виникає потреба заміни їх новими конструкційними, зокрема композитними, експлуатаційні властивості та характеристики міцності яких можна прогнозувати в широкому діапазоні на стадії проектування і регулювати в процесі виготовлення. Поряд з анізотропією пружних властивостей найбільш характерною особливістю деформування тонкостінних оболонок з композитів є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Вільні коливання композитних тонкостінних елементів конструкцій досліджені або за допомогою чисельних методів [2, 5-7], або з урахуванням тільки податливості до трансверсального зсуву [1].

У пропонованій роботі вивчені поперечні вільні коливання видовжених композитних циліндричних панелей з одночасним

урахуванням зазначених факторів завдяки просторовій постановці задачі. З цією метою досліджено можливість застосування методу збурень для знаходження скінченної кількості перших значень власних частот і форм геометрично нелінійних вільних коливань серединних перетинів вказаних панелей. Рівняння руху разом з співвідношеннями пружності, деформаційними співвідношеннями і граничними умовами описують геометрично нелінійні поперечні коливання серединного перерізу панелі [4], якщо задати відповідні початкові умови. При використанні квадратичної апроксимації переміщень за нормальною координатою і скінченноелементної апроксимації на одновимірних лінійних ізопараметричних елементах вздовж кільцевої координати [3] отримана відповідна дискретизована еквівалентна варіаційна задача [8]. Для її вирішення використаний адаптований метод збурень. Побудований ітераційний алгоритм чисельного відшукування скінченного числа перших власних частот і амплітуд геометрично нелінійних коливань панелі. Апробація запропонованого алгоритму проведена на прикладі задачі про коливання ізотропної пластини-смуги, видовжені краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицевій площині. Чисельні результати порівняні з раніше отриманими іншими авторами [2, 7]. Максимальна відносна похибка не перевищує 9%, що свідчить про досить хороші апроксимаційні властивості запропонованого алгоритму.

За допомогою розробленого методу отримано розв'язок задачі про геометрично нелінійні поперечні коливання видовженої циліндричної панелі. Знайдено три перші власні частоти, амплітуди та моди (форми). Проведено аналіз впливу кривини панелі на величину її першої власної частоти.

Дослідження виконано за часткової підтримки ДФФД України (проект Ф53.1/028).

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. *Курпа Л.В., Будников Н.А.* Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек при помощи многомодовой аппроксимации // Вісник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки. – 2013. – № 1. – С. 55–60.
3. *Марчук М.В., Муха І.С., Горячко Т.В.* Порівняльний аналіз характеристик геометрично нелінійного напружено-деформованого стану композитних пластин і циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності // Modelling and Stability: Abstracts of Conference Reports. – К: Taras Shevchenko National Univ. of Kyiv, 2011. – Р. 301.
4. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. – 182 с.
5. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 374 p.

6. *Amabili M.* Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments // Comput. Struct. – 2004. – **82**(31-32). – P. 2587–2605.
7. *Lewandowski R.* Free vibration of structures with cubic non-linearity-remarks on amplitude equation and Rayleigh quotient // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2003. – **192**(13). – P. 1681–1709.
8. *Reddy J.N.* An introduction to nonlinear finite element analysis. – Oxford University Press, 2004. – 488 p.

**FREE GEOMETRICALLY NONLINEAR VIBRATIONS OF ELONGATED
COMPOSITE CYLINDRICAL PANELS**

On the basis of adapted perturbation method is constructed iterative algorithm of finding a finite number of the first natural frequencies and amplitudes of the free transversal geometrically nonlinear vibrations of elongated cylindrical composite panels. The algorithm is tested on the example of the problem of vibrations of the plate-strip. We obtain the solution of the problem of finding the first three natural frequencies and amplitudes of the cylindrical panel. The influence of the curvature of the panel at its first natural frequency is investigated.

УДК 393.3

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛЫХ
НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРАХ**

Александр Григоренко, Игорь Лоза

*Институт механики им. С.П. Тимошенка НАН Украины,
ул. Нестерова 3, м. Киев, 03057, Украина;*

*Национальный транспортный университет,
ул. Суворова, 1, Киев, 01010, Украина*

Природные и синтезированные пьезоэлектрические материалы, благодаря внутренне присущему им свойству преобразовывать приложенное к телу электрическое поле в механические деформации (прямой пьезоэффект) и, наоборот, механические деформации в электрическое поле (обратный пьезоэффект) давно уже нашли применение в различного вида актуаторах и сенсорах, а также прочих так называемых «умных» устройствах. Экспериментальные и теоретические исследования связанных процессов, протекающих в пьезоэлектрических телах при распространении акустоэлектрических волн в волноводах, имеют большое фундаментальное и прикладное значение. В связи с этим актуальными являются разработка и со-

вершенствование теоретических и численных методов анализа распространения электроупругих волн.

Как правило, для повышения функциональности волноводов (повышения прочности, достижения больших деформаций и т.д.) их часто изготавливают в виде конструкций, имеющих неоднородную структуру. Учет динамических процессов, протекающих в такого типа структурах приводит к значительному усложнению математической модели задачи. При этом можно рассматривать неоднородность двух типов: дискретная неоднородность (слоистый материал) и континуальная (материал, со свойствами, меняющимися непрерывно в одном из направлений). Первый случай приводит к увеличению количества уравнений разрешающей системы, а второй – к краевой задаче с переменными коэффициентами.

В настоящем сообщении для решения поставленной задачи использован эффективный численно-аналитический подход, с успехом применявшийся для решения аналогичных задач, когда материал цилиндра является упругим [3,6]. После разделения переменных и представления решения в виде волн, бегущих в осевом направлении, мы переходим от системы дифференциальных уравнений в частных производных к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученная задача решалась устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Проведен численный анализ кинематических характеристик амплитуд, распространяющихся волн и выявлены некоторые механические эффекты, связанные с влиянием фактора неоднородности.

1. Григоренко А.Я., Лоза И.А., Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных волн в пьезокерамическом полом цилиндре // Там же. – 1984. – 20, № 6. – С. 11-16.
2. Григоренко А.Я. О распространении упругих волн в некруговом цилиндрическом волноводе // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990, № 11, – С. 26 – 28.
3. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Численное решение задачи о распространении продольных упругих волн в ортотропном полом цилиндре. Сб. «Вычислительная и прикладная математика», вып. 56, – Киев: Изд-во при Киевском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 1985. – С. 75 – 78.
4. Dai H.L., Fu Y.M., Yang J.H. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere// Acta Mech. Sin. – 2007. – 23, P. 55-63
5. Dai H.L., Hong L., Fu Y.M., Xiao X. Analytical solution for electromagnetoelastoelectric behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder// Appl. Math. Modeling. – 2010. – 34, P. 343-357
6. Ya. M. Grigorenko, A.Ya. Grigorenko, G.G. Vlaikov. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basis of different models. – Kiyiv. – 2009. “Akademiaprirodika” – 549 p.
7. Khoshgoftar M.J., Ghorbanpour Arani, Arefi M. Thermoelastic analysis of thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric materials.// Smart Mater. Struct. – 2009. – 18, 115007.

KINEMATIC ANALYSIS AXISYMMETRICAL ELASTOELECTRIC WAVES IN INHOMOGENEOUS CYLINDERS

In the article problem about axisymmetrical elastoelectric propagation waves in hollow inhomogeneous cylinder from piezoelectric material is considering. Lateral faces of cylinder are free from environmental loads and coated short-circuited electrodes. After separate variables and modeling solution in form progression waves in axial direction and standing waves in circumference direction, the initial problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives is reduced to the boundary value problem for the system of ordinary differential equations with variable coefficients for the radial coordinate. The problem obtained is solved by stable numerical method of discrete orthogonalisation coupled with the incremental search method. There numerical results are presented for investigation of kinematic analysis of the propagation waves in hollow cylinder.

УДК 539.3

ВРАХУВАННЯ МІКРОСТРУКТУРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МАТЕРІАЛІ В ЗАДАЧІ ПРО ТЕРМІЧНЕ ІМПУЛЬСНЕ ОПРОМІНЕННЯ ПІВПРОСТОРУ

Ярослав Жук

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64/13, м. Київ 01601, Україна*

Підвищення міцності, довговічності та витривалості деталей машин часто досягається за допомогою різноманітних методів поверхневої обробки. Поруч із класичними методами (проковування, обкатування тощо) останнім часом широко використовується обробка поверхні лазерним імпульсом або імпульсом електронного променя, які мають ряд переваг. Моделювання процесів поверхневої температурної обробки для прогнозування бажаних властивостей і вибору оптимальних параметрів процесу є важливою задачею. Для аналізу особливостей напружено-деформованого стану, що виникає внаслідок теплового опромінення матеріалів, які можуть зазнавати мікроструктурних перетворень (МСП), необхідно використовувати постановку динамічної зв'язаної задачі термомеханіки, модифіковану відповідним чином [1]. В даній роботі використана постановка із залученням узагальненої узгодженої з термодинамікою необоротних процесів теорії непружної течії для описання фізично нелінійної поведінки металічних матеріалів в широкому інтервалі температур. Розроблена модель ґрунтується на застосуванні термомеханічного формалізму для середовищ із внутрішніми змінними стану. Модифікація моделі з метою врахування МСП внаслідок швидкого наг-

риву і наступного охолодження виконана в роботі [2].

Розглядається півпростір $z > 0$, $0 < r < \infty$, на поверхні $z = 0$ якого задають граничні умови імпульсного термічного навантаження, де q_0 – параметр теплового навантаження, t_q – інтервал дії імпульсу.

Припускається, що від нуля відмінні лише осьоова компонента переміщення u_z , причому $u_z = u_z(z, t)$, а також температура $\theta = \theta(z, t)$. З цих припущень задача для півпростору еквівалентна задачі для стержня $0 < r < R$, $z > 0$, на бічній поверхні якого реалізуються умови жорсткого гладкого контакту і теплоізоляції $u_r = 0$, $\sigma_{rz} = 0$, $\partial\theta/\partial r = 0$, $r = R$, $z > 0$ з умовами імпульсного навантаження на торці $z = 0$. Розрахунки проводилися для ряду значень параметрів імпульсу та геометричних параметрів стержнів і продемонстрували якісно аналогічну поведінку.

Еволюція характеристик теплового і напружено-деформованого стану в часі в точці $z = 0$, показана на рис. 1. Для відображення впливу МСП результати розрахунку без МСП показані штриховими лініями, а з їх врахуванням – суцільними. В процесі, що розглядається доречно виділити три часових інтервали, які пов'язані з МСП. Перший з них це розігрів від $\theta = \theta_0 = 20^\circ\text{C}$ до $\theta = A_{C1} \cong 780^\circ\text{C}$. В цьому інтервалі вихідна фаза не змінюється, тому всі криві на

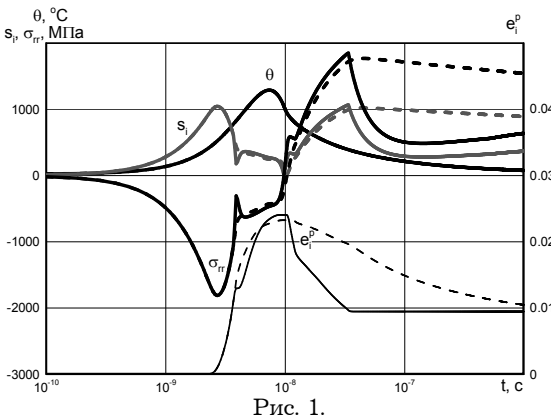


Рис. 1.

рисунку співпадають. Другий інтервал, пов'язаний з аустенізацією $\theta \geq A_{C1}$. Ця трансформація не суттєво впливає на напружений стан оскільки протікає при підвищених температурах, при яких матеріал розм'якшений. В третьому інтервалі має місце мартенситне перетворення, яке призводить до суттєвого зменшення напружень розтягу, а також інтенсивностей напружень і деформацій внаслідок збільшення об'єму матеріалу. Відзначимо, що МСП блокують активний процес непружного деформування, тому з початку мартенситного перетворення має місце розвантаження (див. рис. 1). В розглянутому масштабі характеристик процес є суттєво квазістатичним, оскільки динамічна складова має значно менший рівень.

1. Сенченков И.К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикл. механика. – 2005. – т. 41, № 9. – С. 118-126.
2. Жук Я.О., Червінко О.П., Васильєва Л.Я. Уточнена модель структурних перетворень в тонкому сталевому циліндрі при тепловому опроміненні торця // Доповіді НАН України. – 2007. – № 4. – С. 53-58.

TAKING ACCOUNT OF MATERIAL MICROSTRUCTURAL TRANSFORMATION IN THE PROBLEM OF THERMAL PULSE IRRADIATION OF HALFSPACE

Statement of the dynamic coupled problem of thermoplasticity with correspondingly modified model of inelastic response of the material is used to investigate an influence of the microstructural transformations on the residual strain-stress state of the halfspace subjected to the short thermal pulse loading.

УДК 539.3:5519.8

**ДИФУЗІЙНА НЕСТІЙКІСТЬ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ
НЕЛІНІЙНОЇ ТРИКОМПОНЕНТНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ
РЕАКЦІЯ-ДИФУЗІЯ**

Катерина Іванків

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

Нерівноважні просторово-часові структури виникають у багатьох фізичних, хімічних, біологічних системах як і навколишньому середовищі в цілому. Виникнення самоорганізації у системі тісно пов'язано з утворенням нових гілок розв'язків у результаті біфуркації внаслідок втрати стійкості деякого стаціонарного стану системи [4]. У зв'язку з цим дослідження біфуркацій у математичних моделях синергетики займають особливо важливе місце. Результати досліджень явищ самоорганізації в системах різної природи опубліковані у ряді монографій і статей [1, 2, 4] та ін.

Дана робота присвячена дослідженню дифузійної нестійкості в квазілінійній трикомпонентній системі рівнянь типу реакція-дифузія. Отримані необхідні і достатні умови як нестійкості Тюрінга, так і хвильової нестійкості в термінах властивостей матриці Якобі правих частин системи і додатно визначеної матриці дифузії D .

Показано, що трикомпонентна система якісно відрізняється від класичної моделі Тюрінга більш широкими можливостями втрати стійкості. Виявлені якісні властивості, які повинна мати система, щоби у ній могла відбутися та або інша біфуркація.

Розглядається початково-крайова задача для системи квазілі-

нійних параболічних рівнянь (1), які складають основу математичних моделей багатьох біологічних, хімічних, екологічних і фізичних процесів:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^m D_{ij} \operatorname{grad} u_j \right) + f_i(u_1, u_2, \dots, u_m, M, t),$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad t > 0; \quad M \in R^N, \quad N = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Тут $f_i(u_1, u_2, \dots, u_m, M, t)$ – задані нелінійні функції і такі, що задача має при будь-яких допустимих значеннях параметрів хоч би один просторово-однорідний стаціонарний стан $u_i^0, i=1, \dots, m; D_{ij}$ – коефіцієнти власної дифузії ($i = j$) і взаємної дифузії ($i \neq j$).

На границі області задаються нульові потоки. У початковий момент часу задані початкові умови.

Лінійний аналіз стабільності стаціонарного стану реакційно-дифузійної системи типу (1) виявляє два базових види дифузійної нестабільності: це нестабільність Тюрінга і хвильова нестійкість. У випадку нестійкості Тюрінга дійсна частина власного значення характеристичного рівняння $\operatorname{Re} \lambda$ додатна для деякого скінченного інтервалу хвильових чисел $k > 0$, має максимум при деякому $k = k_T$ і, як правило, $\operatorname{Re} \lambda < 0$ при $k = 0$, а уявна частина $\operatorname{Im} \lambda$ рівна нулю. У цьому випадку утворюються періодичні у просторі і стаціонарні за часом концентраційні структури, які названі структурами Тюрінга. У випадку хвильової нестабільності $\operatorname{Re} \lambda$ також додатна в деякому інтервалі хвильових чисел, але уявна частина не дорівнює нулю. Це породжує періодичні за часом і простором хвилі або структури.

Техніка лінеаризації реакційно-дифузійних рівнянь (знаходження якобіана) і знаходження власних чисел характеристичного рівняння детально описані в літературі. Будь-яке мале відхилення системи від її положення рівноваги змінюється з часом як $\exp(\lambda t + ikr)$, а тому якщо $\operatorname{Re} \lambda > 0$ при будь-якому k , система відхиляється від рівноваги далі і далі (система нестійка).

Розглянемо для прикладу трикомпонентну систему нелінійних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(u_1, u_2, u_3) + D_i \nabla^2 u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

де f_i – нелінійні функції, які описують взаємодію змінних стану u_i ; D_1, D_2 відповідні коефіцієнти дифузії;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2.$$

$$\text{Початкові умови: } u_1(0) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2^0, \quad u_3(0) = u_3^0. \quad (3)$$

На границі області задаються нульові потоки.

Проведемо параметричний аналіз моделі (2)-(3). Нехай $u_i^0 (i=1,2,3)$ – однорідний стабільний стан системи із-за відсутності дифузії. Знайдемо умови при яких дифузія порушує однорідний стан. Лінеаризуємо систему (2) в околі стаціонарної точки

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \bar{u}_j + D_i \nabla^2 \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Тут $a_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ постійні коефіцієнти, що рівні відповідним частинним похідним, які обчислені у стаціонарній точці; $\bar{u}_i (i=1, 2, 3)$ – малі відхилення від положення рівноваги.

Дисперсійне рівняння має вигляд

$$\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0, \quad (5)$$

де $A = \sigma - k^2 (D_1 + D_2 + D_3)$,

$$B = \Sigma - k^2 [D_1(a_2 2 + a_3 3) + D_2(a_1 1 + a_3 3) + D_3(a_1 1 + a_2 2)] + k^4 (D_1 D_2 + D_1 D_3 + D_2 D_3),$$

$$C = \Delta - k^2 \sum_{i=1}^3 D_i \theta_i + k^4 (D_1 D_2 a_{33} + D_1 D_3 a_{22} + D_2 D_3 a_{11}) - k^6 D_1 D_2 D_3,$$

σ – слід матриці $\{a_{ij}\}$, Δ – її детермінант, $\Sigma = \sum_{i=1}^3 \theta_i$ де $\theta_i = a_{jj} a_{kk} - a_{jk} a_{kj}$, $i \neq j \neq k$.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корені рівняння (5). Стан системи буде стабільним, якщо $\text{Re } \lambda_i (k^2) < 0, i = 1, 2, 3$.

Однорідний стан системи стійкий тоді і тільки тоді, коли

$$A < 0, \quad B > 0, \quad C < 0, \quad AB - C < 0. \quad (6)$$

За припущенням при відсутності дифузії ($k^2 = 0$) однорідний стаціонарний стан системи стійкий, тоді співвідношення (6) перепишемо у вигляді

$$\sigma < 0, \quad \Sigma > 0, \quad \Delta < 0, \quad \sigma \Sigma - \Delta < 0. \quad (7)$$

Невиконання будь-якої з нерівностей (6) означає втрату стійкості однорідного стану. Невиконання умови $C < 0$ означає появу у системі додатного власного числа, а порушення умови $AB - C < 0$ приводить до появи пари комплексно-спряжених власних чисел з

додатною дійсною частиною. Перший випадок відповідає біфуркації Тюрінга, а другий – хвильовій біфуркації.

Як приклад розглянемо математичну модель узагальненого брасселятора.

Функції $f_i(u_1, u_2, u_3)$ мають вигляд:

$$f_1(u_1, u_2, u_3) = \mu(a - (1 + b + c)u_1 + u_1^2 u_2 + du_3),$$

$$f_2(u_1, u_2, u_3) = bu_1 - u_1^2 u_2, \quad f_3(u_1, u_2, u_3) = cu_1 - du_3.$$

Стационарна точка системи (2) має координати $(a, b/a, ac/d)$.

Зафіксуємо параметри μ, a, b, c, D_1, D_3 . Параметри d, D_2 будемо змінювати, при тому значення параметра d будемо вибирати так, щоби виконувались умови (6). На рис. 1 виділені області на площині параметрів d, D_2 що відповідають нестійкості Тюрінга (Ω_1) і хвильовій нестійкості (Ω_2), а область їх перетину відповідає обом видам нестійкості. В області Ω_0 стан системи стійкий. Значення фіксованих параметрів $\mu = 10, a = 3, b = 4, c = 2, D_1 = 1, D_3 = 50$.

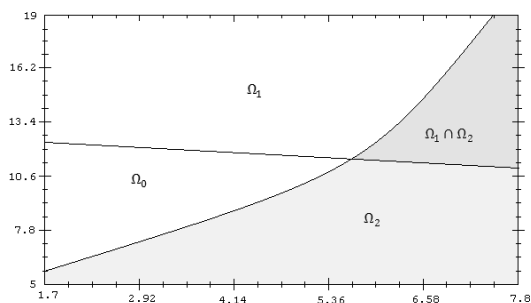


Рис. 1. Площина параметрів d, D_2 моделі (2).

Числове дослідження системи (2) здійснено в області $0 \leq x \leq L_1, 0 \leq y \leq L_2$ методом змінних напрямків [5]. У початковий момент часу система знаходиться у стаціонарному стані $u_1^0 = a, u_2^0 = b/a, u_3^0 = ac/d$.

Метод змінних напрямків є природним підходом до розв'язання багатовимірних початково-крайових задач. Кожний крок за часом цього методу складається із декількох стадій, на яких для кожної компоненти розв'язується рівняння дифузії із «замороженими» значеннями інших компонент; для одновимірного випадку використовуємо триточкову схему Кранка-Ніколсона. Ця схема є абсолютно стійка і дозволяє здійснювати обчислення з великим кроком за часом. Але цей природний підхід може мати суттєві

труднощі. Так системи рівнянь хімічної кінетики зазвичай є жорсткими і може виявитись, що точність результату при більшому кроці буде поганою, оскільки значення компонент при переході від шару до шару може сильно змінитися і їх «замороження» є досить грубою процедурою.

У випадку жорстких систем рівнянь використовуємо інший підхід до числового розв'язування задачі, а саме алгоритми які базуються на методі прямих [3]. Дискретизуємо систему (2) по просторових змінних з допомогою скінченних різниць, які забезпечують апроксимацію $O(h^2)$, де h – крок розбиття. Граничні умови так само апроксимуємо другим порядком. Таким чином ми маємо пів дискретний аналог задачі (2)–(3) у вигляді задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Ця система є жорсткою, має велику розмірність і специфічну структуру. Тому для чисельної реалізації використано неявні методи інтегрування ЗДР.

У числових експериментах показано, що при виконанні відповідних умов у нелінійній моделі виникають просторово-часові структури, які передбачалися лінійним аналізом: при виконанні умов тюрінгової біфуркації формується стаціонарна дисипативна структура, а при виконанні умов хвильової біфуркації спостерігаються біжучі та стоячі хвилі.

1. Ванаг В.К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова-Жаботинского в обращенной микроэмульсии // Успехи физических наук. – 2004. – Т.3, №9. – С.991-1010.
2. Васюник З.І., Дацко Б.Й., Гафійчук В.В. Дослідження різних типів біфуркації у системах типу реакція – дифузія // Мат. методи та фіз. – мат. поля. – 2001. Т. – 44, № 1. – С. 155-160.
3. Гужев Д.С., Зайферт П., Калиткин Н.Н., Ширков П.Д. Численные методы решения задач химической кинетики с диффузией // Математическое моделирование. – 1992. – Т.4, №1. – С.98-110.
4. Николас Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей – 1991. – Т. 1, С. 325-332.

DIFFUSION INSTABILITY AND NUMERICAL ANALYSIS OF THREE-COMPONENT REACTION-DIFFUSION SYSTEMS

The paper deduced conditions of diffusion instability existence for three-component reaction-diffusion systems. Properties that Jacobi and diffusion matrices should have in order for stationary solution being stable in the point system to loose stability in the presence of diffusion are clarified.

The results obtained make it possible to carry out a full parametric analysis of mathematical models of such a form. Numerical experiments show that under appropriate conditions spatiotemporal structures in the non-linear model arise as predicted by linear analysis.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У НЕСКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ ДОВІЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ З ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ КОЛИВАННЯХ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Ольга Кирилова

Одеська національна морська академія,
вул. Дідріхсона, 8, м. Одеса, 65029, Україна

Розглядається нескінченний пружний циліндр з твірними, паралельними осі Oz , який знаходиться в умовах плоскої деформації. Переріз циліндра площиною xOy являє собою область, обмежену довільною замкненою гладкою кривою $\eta(\varphi) = \eta_0 \psi_0(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. У циліндрі міститься наскрізний дефект у вигляді тонкого жорсткого включення, яке у площині xOy не виходить за межі перерізу і займає відрізок довжиною $2a$.

Поверхня циліндра знаходиться під дією самоврівноваженого нормального гармонічного навантаження $P(\varphi)e^{-i\omega t}$. Множник $e^{-i\omega t}$ всюди далі опущений.

Нехай u_r , u_φ – радіальне та кутове переміщення. Тоді вони задовольняють рівнянням Ламе для гармонічних коливань:

$$\mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \rho \omega^2 u_r = 0;$$

$$\mu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \rho \omega^2 u_\varphi = 0.$$

Граничні умови на поверхні циліндра при даній постановці мають вигляд:

$$\sigma_{xx} \cos(\nu, x) + \sigma_{xy} \cos(\nu, y) = P(\varphi) \cos(\nu, x),$$

$$\sigma_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_{yy} \cos(\nu, y) = P(\varphi) \cos(\nu, y),$$

де $(x, y) \in L$, L – контур перерізу.

Для формулювання граничних умов на включенні з ним пов'язується локальна система координат $x_1 O_1 y_1$. Нехай $u_1(x_1, y_1)$, $v_1(x_1, y_1)$ – переміщення при переході від полярних координат до

декартових $x_1 O_1 y_1$. Для абсолютно жорсткого включення

$$u_1(x_1, 0) = d_1, \quad v_1(x_1, 0) = d_2 + \gamma x_1,$$

$$d_1, d_2, \gamma = \text{const}, x \in [-a; a].$$

В цих формулах d_1, d_2 – невідомі амплітуди переміщень включення вздовж осей Oy та Ox , а γ – амплітуда кута обертання навколо осі Oz . Вони визначаються з рівнянь руху включення, як жорсткого тіла.

Також на поверхні включення мають розрив напруження $\sigma_{y_1 y_1}(x_1, y_1)$, $\sigma_{x_1 y_1}(x_1, y_1)$, стрибки яких позначено

$$\sigma_{y_1 y_1}(x_1, +0) - \sigma_{y_1 y_1}(x_1, -0) = \chi_1(x_1),$$

$$\sigma_{x_1 y_1}(x_1, +0) - \sigma_{x_1 y_1}(x_1, -0) = \chi_2(x_1).$$

Для розв'язання задачі запропоновано підхід, що дозволяє окремо задовольняти умови на поверхні включення і на границі циліндра. Він полягає в представленні переміщення у вигляді суми розривних розв'язків рівнянь Ламе, побудованих для включення, і деяких невідомих функцій, які є розв'язками рівнянь Ламе та за рахунок яких задовольняються умови на поверхні циліндра. Ці функції представлено через хвильові потенціали, які, в свою чергу, розшукуються у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівнянь Гельмгольца, що утворюють повні замкнені системи функцій. В результаті задача зводиться до розв'язання послідовності систем інтегральних рівнянь на включенні. Після розв'язання цих систем коефіцієнти лінійної комбінації визначаються з граничних умов на поверхні циліндра.

Отримано наближені формули для розрахунку КІН, за допомогою яких досліджено вплив на їх значення частоти коливань, геометричних розмірів циліндра а також розташування включення.

STATE OF STRESS IN CYLINDER OF ARBITRARY CROSS-SECTION WITH A TUNNEL HARD INCLUSION UNDER OSCILLATIONS OF PLANE STRANE CONDISION

The problem issolved to determine the stress state near the inclusion in an infinite hollow cylinder of arbitrary cross section with oscillations of plane strane condision. An approach is proposed that allows to satisfy separately the conditions on the inclusion and on the borders of the cylinder.

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ ІЗ ПОРИСТИМ ГАЗО- ТА ВОДОНАСИЧЕНИМ ШАРОМ**Оксана Кравчишин, Василь Чекурін**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Водонасичені пористі пласти геологічних структур використовують, зокрема, для створення підземних сховищ газу. Зміна кількості газу, накопиченого у сховищі, спричиняє зміщення границі, що розділяє частини пласта, заповнені газом та водою. Оскільки акустичні властивості цих двох частин є різні, то переміщення межі розділу можуть змінювати картину хвильового поля у структурі, збудженого зовнішніми джерелами. Це можна використати для створення методології дистанційного моніторингу підземних сховищ газу із використанням сейсмічного зондування. Тому моделювання хвильових полів у шаруватих структурах, які містять пористі газо- та водонасичені шари, є важливою науково-технічною проблемою. Для дослідження взаємодії пружних хвиль із шаруватими структурами, зокрема геологічними, ефективно використовують матричний метод [1,2].

У доповіді розглядається шарувата структура, що складається із двох пружних півпросторів $\mathcal{S}^{(0)} : -\infty < x_2 < h$ та $\mathcal{S}^{(3)} : H < x_2 < \infty$, які розділяє шар $\mathcal{S} : h < x_2 < H$ пористого середовища (пласта). Це середовище насичене природнім газом та водою. Межа розділу між газом та водою у пористому шарі змінюється залежно від тиску газу. Акустичні властивості пористого середовища залежать від властивостей флюїду, що його заповнює. Тому пористий пласт розглядається як двошарова структура із шару $\mathcal{S}^{(1)} : h < x_2 < h_1$, заповненого газом, та шару $\mathcal{S}^{(2)} : h_1 < x_2 < H$, заповненого водою.

Побудована математична модель, яка описує поширення плоских монохроматичних хвиль у структурі $\mathcal{S}^{(0)} - \mathcal{S}^{(1)} - \mathcal{S}^{(2)} - \mathcal{S}^{(3)}$. Для опису хвильових процесів у пористому середовищі застосовано наближення теорії ефективних модулів. Це дозволило розрахувати із використанням відомих формул Гассмана [3] акустичні властивості шарів $\mathcal{S}^{(1)}$ та $\mathcal{S}^{(2)}$, залежно від їхньої пористості та

тиску флюїдів, що їх наповнюють, і розглядати їх як пружні середовища. На поверхнях розділу середовищ $x_2 = h$, $x_2 = h_1$ та $x_2 = H$ виконуються умови ідеального механічного контакту.

У рамках цієї моделі сформульовані задачі поширення у структурі поперечної SH-хвилі та взаємозв'язаних поздовжньо-поперечних хвиль для заданих кута падіння φ на поверхню $x_2 = h$ зовнішніх хвиль збудження різної поляризації, що приходить із безмежності.

Із використанням сформульованих задач досліджено залежність характеристик хвильового поля у структурі за його збудження SH-хвилею, поздовжньою та поперечною хвилями, поляризованими у площині падіння $x_1 O x_2$, від параметрів пористості середовища $\mathcal{S}$ та його наповненості газом, а також від кута падіння збуджувальних хвиль.

Побудована математична модель є теоретичною основою для дослідження впливу параметрів пористості та порових тисків газо- та водонасичених шарів на характеристики хвильового поля в структурі $\mathcal{S}^{(0)} - \mathcal{S}^{(1)} - \mathcal{S}^{(2)} - \mathcal{S}^{(3)}$, яка моделює підземні сховища газу. Результати роботи дозволять оцінити можливість застосування акустичного зондування для моніторингу стану підземних сховищ газу.

1. Л.А. Молотков О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. I // Зап. научн. Семин. ПОМИ. – 2003. – **297**. – С. 230-253.
2. Chekurin V., Malytsky D. Mathematical model for interference of elastic waves in a geological medium with a stressed layer. The case of uniform compression// Physical-Mathematical Modelling and Informational Technologies.– 2011, Issue 14, pp. 159-166.
3. Berryman J.G. Comparison of upscaling methods in poroelasticity and its generalizations // J. Engng Mech.– 2005.– 131, N 9.– P. 928-936.

MODELLING OF INTERACTION OF ELASTIC WAVES WITH A POROUS GAS- AND WATER-SATURATED LAYER

A layered gas- and water-saturated structure consisting of two elastic half-spaces that are separated by a porous layer is considered. The layer is saturated by natural gas and water and is considered in the model as a two-layer structure. A mathematical model for interaction of elastic waves of various polarizations with the structure has been built and numerically studied. Obtained results can be used to develop method for remote monitoring of underground gas storage facilities.

ВИМУШЕНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Юрій Крутий

*Одеська державна академія будівництва та архітектури,
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна*

Об'єктом дослідження є прямий однорідний стержень постійного поперечного перерізу, довжиною l , із рівномірно розподіленою масою m , на який діє рівномірно розподілене динамічне навантаження $q(x, t) = q \sin \theta t$, де q, θ – відповідно амплітуда і частота збуджуючої сили.

Розглядаються вимушені коливання стержня з урахуванням тертя. Для зовнішнього тертя прийнято гіпотезу, згідно якої сила опору пропорційна масі стержня і швидкості [1]. Внутрішнє тертя враховується за гіпотезою Кельвіна – Фойхтга [2]. За вказаних умов рівняння вимушених коливань стержня має вигляд [2]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha m \frac{\partial y}{\partial t} + \beta EI \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = q \sin \theta t, \quad (1)$$

де $y = y(x, t)$ – прогин точки осі стержня з координатою x в момент часу t , EI – згинна жорсткість стержня, α, β – коефіцієнти зовнішнього та внутрішнього тертя відповідно.

Диференціальне рівняння з частковими похідними (1) не допускає розв'язку методом розподілу змінних Фур'є. Можливо саме цією обставиною пояснюється відсутність в науковій літературі точного розв'язку даного рівняння.

Автором знайдено точний розв'язок рівняння (1). Як наслідок, для довільного поперечного перерізу стержня з координатою x отримано вирази для динамічних переміщень (прогину $y(x, t)$ і кута повороту $\phi(x, t)$) та динамічних внутрішніх зусиль (згинального моменту $M(x, t)$ і поперечної сили $Q(x, t)$). Кінцеві формули виглядають так:

$$y(x, t) = y_1(x) \sin \theta t + y_2(x) \cos \theta t; \quad \phi(x, t) = \phi_1(x) \sin \theta t + \phi_2(x) \cos \theta t;$$

$$M(x, t) = M_1(x) \sin \theta t + M_2(x) \cos \theta t; \quad Q(x, t) = Q_1(x) \sin \theta t + Q_2(x) \cos \theta t;$$

$$\phi_j(x) = y'_j(x); \quad M_j(x) = -EI \phi'_j(x); \quad Q_j(x) = M'_j(x) \quad (j = 1, 2);$$

$$y_1(x) = y_1(0) \operatorname{Re} X_1(x) + \phi_1(0) l \operatorname{Re} X_2(x) - \frac{M_1(0) l^2}{EI} \operatorname{Re} X_3(x) - \\ - \frac{Q_1(0) l^3}{EI} \operatorname{Re} X_4(x) - y_2(0) \operatorname{Im} X_1(x) - \phi_2(0) l \operatorname{Im} X_2(x) + \frac{M_2(0) l^2}{EI} \operatorname{Im} X_3(x) + \\ + \frac{Q_2(0) l^3}{EI} \operatorname{Im} X_4(x) + \frac{q}{1 + \beta^2 \theta^2} \frac{l^4}{EI} (\operatorname{Re} X_5(x) + \beta \theta \operatorname{Im} X_5(x));$$

$$y_2(x) = y_2(0) \operatorname{Re} X_1(x) + \phi_2(0) l \operatorname{Re} X_2(x) - \frac{M_2(0) l^2}{EI} \operatorname{Re} X_3(x) - \\ - \frac{Q_2(0) l^3}{EI} \operatorname{Re} X_4(x) + y_1(0) \operatorname{Im} X_1(x) + \phi_1(0) l \operatorname{Im} X_2(x) - \frac{M_1(0) l^2}{EI} \operatorname{Im} X_3(x) - \\ - \frac{Q_1(0) l^3}{EI} \operatorname{Im} X_4(x) + \frac{q}{1 + \beta^2 \theta^2} \frac{l^4}{EI} (\operatorname{Im} X_5(x) - \beta \theta \operatorname{Re} X_5(x));$$

$$X_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k} \cos k\gamma}{(4k+n-1)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{4k+n-1} - \\ - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k} \sin k\gamma}{(4k+n-1)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{4k+n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$L = l^2 \sqrt[4]{\frac{\theta^2(\theta^2 + \alpha^2)}{1 + \beta^2 \theta^2}} \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad \gamma = \arctg \frac{\alpha}{\theta} + \arctg \beta \theta.$$

Наведені вирази дозволяють визначати вимушені динамічні коливання та динамічні внутрішні зусилля від гармонічного навантаження, зводячи задачу при будь яких можливих закріпленнях кінців стержня до пошуку невідомих сталих інтегрування, що представлені тут у формі початкових параметрів.

1. Киселев В.А. Строительная механика. — М.: Стройиздат, 1980. — 616 с.
2. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. — К.: Вища шк., 2004. — 525 с.: іл.

FORCED CROSS FLUCTUATIONS OF THE DIRECT CORE OF CONSTANT SECTION WITH TAKING INTO ACCOUNT OF RESISTANCE FORCES IN CASE OF HARMONIC LOADING

The compelled cross fluctuations of a direct core of constant section taking into account resistance are considered at influence of external harmonious loading. The exact solution of the corresponding differential equation of fluctuations in quotient derivativeis found. Formulas for dynamic movements and internal efforts in any section of a core are written out.

ВЗАЄМОДІЯ SH-ХВИЛІ ІЗ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА НАЯВНОСТІ ТОНКОСТІННОГО МІЖФАЗНОГО ДЕФЕКТУ НИЗЬКОЇ ЖОРСТКОСТІ

**Ярослав Кунець, Валерій Матус, Віктор Міщенко,
Василь Пороховський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянуто усталену за часом задачу розсіяння SH-хвиль пружним волокном неканонічної форми, що міститься у необмеженій ізотропній матриці. На межі розділу складових композиту наявна тонка пружна неоднорідність низької жорсткості та змінної товщини, динамічна взаємодія якої з оточуючим середовищем моделюється асимптотично точними ефективними умовами, записаними на контурі волокна [1].

Переміщення у складових композиту задовольняють рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + k_j^2)u^j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_j \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

та умови контакту на міжфазній поверхні

$$u^1(\mathbf{x}) = u^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad \mu_1 \frac{\partial u^1(\mathbf{x})}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u^2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_2, \\ \mu_0 [u^1(\mathbf{x}) - u^2(\mathbf{x})] = \mu_1 h(\mathbf{x}) \frac{\partial u^1(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad \frac{\mu_0}{\max(\mu_1, \mu_2)} \ll 1, \quad (2)$$

де $u^1(\mathbf{x}) = u^s(\mathbf{x}) + u^{in}(\mathbf{x})$ та $u^2(\mathbf{x})$ – повні поля зміщень у матриці $W_1 = R^2 \setminus W_2$ та у включенні W_2 ($u^{in}(\mathbf{x})$, а $u^s(\mathbf{x})$ – набігаюча та розсіяна хвиля); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати з початком в W_2 ; S_0 та $S_1 = \partial W_2 \setminus S_0$ – лінії неідеального та ідеального контакту наповнювача з матрицею; μ_j та k_j ($j = 1, 2$) – модулі зсуву та хвильові числа поперечних хвиль складових композиту; μ_0 і $h(\mathbf{x})$ – модуль зсуву і товщина тонкостінної неоднорідності; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до ∂W_2 . Крім цього, виконується умова випромінювання на безмежності.

Розв'язок задачі (1)-(2) шукаємо за допомогою модифікованого

методу нульового поля [2, 3]. Враховуючи специфіку граничних умов (2), невідомі зміщення та напруження на контурі включення доцільно подати у вигляді

$$v(\theta) = \sum_{\sigma, m} x_{\sigma m}^1 C_{\sigma m}(\theta), \quad u^2(\theta) = \sum_{\sigma, m} x_{\sigma m}^2 C_{\sigma m}(\theta), \quad \theta \in S,$$

$$v(\theta) = \begin{cases} a Z(\theta) \frac{\partial u^1(\theta)}{\partial n}, & \theta \in S_1, \\ Z(\theta) [u^1(\theta) - u^2(\theta)], & \theta \in S_0, \end{cases} \quad (3)$$

Тут функція $Z(\theta)$ описує характер поведінки переміщень та напружень в околі вершин тонкостінної неоднорідності. У випадку заокруглених вершин, напруження мають кореневу особливість в їх околах, тому функція $Z(\theta)$ має вигляд, наведений у [2]. Підставляючи представлення (3) у рівняння нульового поля [1, 2], отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку для визначення невідомих коефіцієнтів $x_{\sigma m}^1, x_{\sigma m}^2$, яку розв'язуємо методом редукції.

Знаючи зміщення та напруження на контурі ∂W_2 , за допомогою відповідних інтегральних представлень [1, 2] отримаємо вирази для обчислення комплексних амплітуд розсіяння пружних хвиль у дальньому полі. За допомогою запропонованого аналітико-числового алгоритму проаналізовано вплив механічних та геометричних параметрів пружної структури на амплітудно-частотні характеристики SH-хвиль.

1. *Emets V.F., Kunets Ya. I., Matus V.V.* Scattering of SH waves an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // *Archive of Applied Mechanics*, – 2004. – Vol. 73. – P. 769-780.
2. *Kunets Y.I., Matus V.V., Mykhas'kiv V.V., Boström A., Zhang Ch.* Scattering of SH-wave by an elastic fiber of non-classical cross-section with interface crack // *Mechanics of Composite Materials*. – 2008. – Vol. 44, No. 2 – P. 245-254.
3. *Matus V., Kunets Y., Mykhas'kiv V., Boström A., Zhang Ch.* Wave propagation in 2-D elastic composites with partially debonded fibers by the null field approach // *Waves in Random and Complex Media*. – 2009. – Vol. 19, No. 4. – P. 654-669.

INTERACTION BETWEEN SH-WAVE AND ELASTIC INCLUSION GIVEN A THIN-WALLED INTERPHASE DEFECT OF LOW RIGIDITY

The problem of interaction of a plane time-harmonic SH-wave with an elastic inclusion of non-classical cross-sections, when an elastic thin inhomogeneity of low rigidity is present between the infinite elastic matrix and the fiber, is considered. The method employed is a modified null field approach.

ЕФЕКТИ РОЗСІЯННЯ ІМПУЛЬСІВ SH-ХВИЛЬ ТОНКИМ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Ярослав Кунець, Валерій Матус, Роман Рабош

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянемо необмежене пружне середовище з тонкостінним криволінійним п'єзoeлектричним включенням. П'єзoeлектрична неоднорідність знаходиться в умовах ідеального механічного контакту, а її поверхня вважається електроізолюваною або електропровідною. Матеріал неоднорідності належить до кристалографічного класу $6mm$ із віссю симетрії шостого порядку. На включення набігає імпульс SH-хвиль. При цьому відносна та хвильова товщини включення є малими величинами.

Комплексну амплітуду розсіяння визначено з допомогою методів зрощування асимптотичних розкладів [1] та граничних інтегральних рівнянь. Обчислення нестационарних ехо-сигналів проведено, використовуючи метод Ромберга [2].

Досліджено поведінку ехо-сигналів за часами затримки. Встановлено, що ехо-сигнали формуються в основному, за рахунок дзеркально відбитих імпульсів та сигналів, двічі дифрагованих на кінцях включення. Така закономірність спостерігається як для слабкоконтрастних включень, так і для неоднорідностей малої жорсткості. Для включень малої жорсткості збільшення коефіцієнта електромеханічного зв'язку веде до зменшення рівня амплітуд на максимумах сигналів, а для слабкоконтрастних – до збільшення. При чому електричні граничні умови суттєво впливають на п'єзoeлектричну залежність величин ехо-сигналів при поздовжньому падінні імпульсів.

1. Рабош Р.В. Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзoeлектричним включенням при поздовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №1. – С. 101-106.
2. Подстригач Я.С., Поддубняк А.П. Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – К.: Наук. думка, 1986. – 264 с.

EFFECTS OF SH-WAVE PULSE SCATTERING BY A THIN PIEZOELECTRIC INCLUSION

SH-wave echo-pulses scattering from a thin curvilinear piezoelectric inclusion in an elastic medium is investigated. The methodology of investigation is based on the matching of asymptotic expansions, integral equations approach and Romberg method.

УДК 534.26

РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННОМУ М'ЯКОМУ (ЖОРСТКОМУ) КОНУСІ

Дозислав Куриляк, Віктор Лисечко

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Задачу дифракції поля плоскої звукової хвилі на скінченному конусі у сферичній системі координат (r, θ, ϕ) зведено до системи суматорних рівнянь, які запишемо у вигляді:

$$\sum_{(z_n)} \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(x) + t(x) = \begin{cases} \sum_{(v_p)} y_p^{(1)} P_{v_p-1/2}(x), & \cos \gamma < x \leq 1; \\ \sum_{(\mu_k)} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-x), & -1 \leq x < \cos \gamma; \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{(z_n)} \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(x) \frac{K'_{z_n}(\rho_1)}{K_{z_n}(\rho_1)} + t_1(x) = \begin{cases} \sum_{(v_p)} y_p^{(1)} P_{v_p-1/2}(x) \frac{I'_{v_p}(\rho_1)}{I_{v_p}(\rho_1)}, & \cos \gamma < x \leq 1 \\ \sum_{(\mu_k)} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-x) \frac{I'_{\mu_k}(\rho_1)}{I_{\mu_k}(\rho_1)}, & -1 \leq x < \cos \gamma \end{cases} \quad (2)$$

де $\bar{x}_n$, $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ – невідомі коефіцієнти розкладу; $t(x)$, $t_1(x)$ – відомі функції; $\rho_1 = sc_1$ ($s = -ik$, k – хвильове число), c_1 – довжина твірної конуса; $x = \cos \theta$; γ – кут розхилу конуса; $K_\eta(\cdot)$, $I_\eta(\cdot)$ – відповідно функція Макдональда і модифікована функція Бесселя; $P_{\eta-1/2}(\cdot)$ – функція Лежандра; індекси v_p , μ_k , z_n – дійсні додатні корені трансцендентних рівнянь:

$$\text{м'який конус} - P_{v_p-1/2}(\cos \gamma) = 0, \quad P_{\mu_k-1/2}(-\cos \gamma) = 0; \quad (3a)$$

$$\text{жорсткий конус} - P_{v_p-1/2}^1(\cos \gamma) = 0, \quad P_{\mu_k-1/2}^1(-\cos \gamma) = 0; \quad (3б)$$

$$\cos \pi z_n = 0.$$

Суматорні рівняння (1), (2) зводимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) виду:

$$A_{11}X = F. \quad (4)$$

Тут $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невідомий вектор, $x_n = P_{z_n-1/2}(\cos \gamma) \bar{x}_n$ для задачі (3а) і $x_n = P_{z_n-1/2}^1(\cos \gamma) \bar{x}_n$ для задачі (3б); A_{11} – матричний оператор,

$$A_{11} : \left\{ a_{qn} = \frac{\rho_1 W[K_{z_n} I_{\xi_q}]_{\rho_1}}{[\xi_q^2 - z_n^2] K_{z_n}(\rho_1) I_{\xi_q}(\rho_1)} \right\},$$

де $\{\xi_q\}_{q=1}^{\infty} = \{v_p\}_{p=1}^{\infty} \cup \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\xi_q\}_{q=1}^{\infty} = \{1/2\} \cup \{v_p\}_{p=2}^{\infty} \cup \{\mu_k\}_{k=2}^{\infty}$ – зростаючі послідовності відповідно коренів рівнянь (3а) і рівнянь (3б).

Застосувавши метод аналітичної регуляризації [1], з (4) отримаємо НСЛАР другого роду, яку запишемо так

$$X = A^{-1}(A - A_{11})X + A^{-1}F. \quad (5)$$

Тут A , A^{-1} – регуляризуючі оператори наведені в [1]. НСЛАР (5) допускає розв'язок у класі послідовностей $\bar{x}_n = O(n^{-1})$, що забезпечує виконання умови Мейкснера на краю конуса.

На основі розв'язків НСЛАР (5) проведено дослідження дифракційних характеристик скінченного м'якого (жорсткого) конуса. На рис. 1 приведено порівняння перерізів розсіювання $\sigma_s = \sigma_s(kc_1)$ для м'якого (жорсткого) диска отриманого нами (криві 1' (1'')) з результатами наведеними в [2] (криві 2' (2'')). Із співставлення видно їх практично повне співпадіння в усьому діапазоні зміни параметра kc_1 .

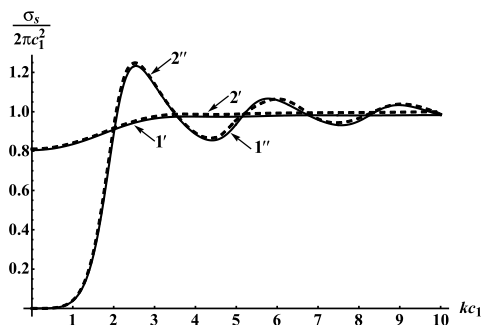


Рис. 1. Перерізи розсіювання отримані для м'якого (криві 1', 2') і жорсткого (криві 1'', 2'') диска: 1'('') – отримано нами при $\gamma = 90.01^\circ$; 2'('') – отримано в [2].

1. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на кінцевих і клиноподібних поверхнях. – К.: Наук. думка, 2006. – 280 с.

2. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E., Asvestas J. S. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. – Amsterdam: North-Holland, 1969. – 728 p.

SOUND WAVE SCATTERING BY A FINITE SOFT (RIGID) CONE

The problem of the sound plane wave diffraction by a soft (rigid) cone in axial irradiation is solved.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ СО СЛОЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Лидия Курпа, Галина Тимченко

*Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина*

В работе предложен численно-аналитический метод, позволяющий исследовать геометрически нелинейные колебания многослойных пластин и пологих оболочек, имеющих сложную форму плана, различные граничные условия и различную толщину слоев. Метод базируется на совместном использовании теории R-функций, вариационного метода Ритца, проекционного метода Бубнова-Галеркина.

Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной геометрически нелинейной теории типа модели Тимошенко. При этом, предполагается, что проскальзывание между слоями отсутствует, общая толщина пластины является постоянной, а слои могут иметь различную толщину. Уравнения движения принимаются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений движения (1) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями. Усилия N_x, N_y, N_{xy} , моменты M_x, M_y, M_{xy} и перерезывающие силы Q_x, Q_y выражаются через перемещения u, v, w и углы поворота ψ_x, ψ_y по известным формулам [3,4].

Согласно предложенного алгоритма, прежде всего, вычисляются приведенные жесткостные характеристики исследуемого объекта, а затем осуществляется решение линейной задачи о колебаниях многослойной пластины. Ранее такой подход был использован к многослойным пластинам и оболочкам со слоями одинаковой толщины. В настоящей работе метод обобщен для многослойных пластин с произвольной укладкой и различной толщиной слоев. В рамках автоматизированной системы POLE-RL разработано соответствующее программное обеспечение.

Отличительная особенность предложенного алгоритма состоит в том, что искомые функции $w(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t)$ представляются в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y), \psi_x(x, y, t) = y_1(t) \cdot \psi_{x1}(x, y), \\ \psi_y(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{y1}(x, y), \end{aligned}$$

где $w_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}$ – собственные функции линейной задачи, а аналитические выражения для перемещений $u(x, y, t), v(x, y, t)$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= y_1(t) \cdot u_1(x, y) + y_1^2(t) \cdot u_2(x, y), \\ v(x, y, t) &= y_1(t) \cdot v_1(x, y) + y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \end{aligned}$$

где u_1, v_1 являются решением линейной задачи, а функции u_2, v_2 находятся как и в работе [1]. Благодаря использованию метода R – функций системы базисных функций для последовательности линейных задач были получены в аналитическом виде, универсальном относительно геометрии пластины.

В результате подстановки выражений для искомым функций в уравнения (1) и применения метода Бубнова-Галеркина, исходная задача сведена к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, для решения которого были использованы приближенные методы.

Разработанный метод и соответствующее ему программное обеспечение было протестировано на ряде задач для многослойных пластин простой геометрии и применено для исследования нелинейных колебаний пластин со сложной геометрической формой, различным способом укладки слоев, видом граничных условий и механическими характеристиками материалов слоев.

1. Курпа Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №2. – С. 75-85.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек – М.: Наука, 1974. – 446 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек – М.: Наука, 1972. – 432 с.

INVESTIGATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR VIBRATION OF THE LAMINATED PLATES WITH COMPLEX FORM AND LAYERS OF THE DIFFERENT THICKNESS

The problem of nonlinear free vibrations of composite laminated plates with layers of different thickness and complex planform is studied. The mathematical statement of the problem is carried out using the Timoshenko type theory. To solve the problem the R-function theory, variational methods and the Bubnov-Galyorkin method have been applied. The comparison of the obtained results with available ones confirms effectiveness and reliability of the offered method.

УДК 539.3

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ

Лідія Курпа, Тетяна Шматко

*Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна*

Застосування функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) при виготовленні елементів тонкостінних конструкцій суттєво підвищує їх міцність, стійкість та термостійкість. Тому розробка універсальних методів розрахунку пластин та пологих оболонок, які є моделями елементів, що виготовлені із сучасних неоднорідних композитних матеріалів, являє собою актуальну проблему механіки неоднорідних структур. Враховуючи, що подібні елементи можуть мати різну геометричну форму плану та способи закріплення, для розробки чисельно аналітичного методу пропонується використовувати теорію R-функцій у поєднанні з варіаційними методами.

В даній роботі будемо розглядати проблему про вільні геометричні нелінійні коливання пологих оболонок постійної товщини h , які

виготовлено із суміші кераміки та металу. Механічні властивості композиту змінюються неперервно за товщиною. Як відомо, властивості ФГМ залежать від об'ємних частин складових матеріалів та визначаються наступним чином:

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m.$$

Наведений вираз являє собою загальну формулу для визначення модуля пружності, коефіцієнта Пуассона та густини композита, P_c, P_m – відповідні характеристики кераміки та металу. Показник степені k об'ємної долі кераміки у даній формулі може змінюватися від нуля до безмежності ($0 \leq k < \infty$). Якщо $k = 0$, то структура є цілком керамічною, якщо ж $k = \infty$, то – металевою. Для розв'язання поставленої задачі розвинуто метод, який було запропоновано раніше у роботі [1]. Особливою відмінністю в данному випадку є той факт, що механічні характеристики матеріалу оболонки є функціями аплікати z :

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz = E_m + \frac{(E_c - E_m)h}{1+k}, \quad E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z dz = \frac{(E_c - E_m)h^2 k}{2(1+k)(2+k)}$$

$$E_3 = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz = \frac{E_m h^3}{12} + (E_c - E_m) h^3 \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)} \right).$$

Саме це необхідно приймати до уваги при визначенні вектора зусиль та моментів, компоненти яких обчислюються наступним чином:

$$N_{11} = (E_1 (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) + E_2 (\chi_{11} + \nu \chi_{22})) / (1 - \nu^2),$$

$$N_{12} = (E_1 \varepsilon_{12} / 2 + E_2 \chi_{12}) / (1 + \nu),$$

$$N_{22} = (E_1 (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) + E_2 (\chi_{22} + \nu \chi_{11})) / (1 - \nu^2),$$

$$M_{11} = (E_2 (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) + E_3 (\chi_{11} + \nu \chi_{22})) / (1 - \nu^2),$$

$$M_{12} = (E_2 \varepsilon_{12} / 2 + E_3 \chi_{12}) / (1 + \nu),$$

$$M_{22} = (E_2 (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) + E_3 (\chi_{22} + \nu \chi_{11})) / (1 - \nu^2).$$

Вектор деформацій $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}\}^T$ визначається

згідно з нелінійною теорією пологих оболонок першого порядку типу Тимошенка як:

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y},$$

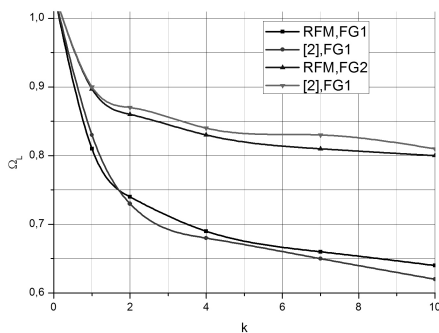
$$\chi_{11} = \Psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \Psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = (\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}).$$

Поперечні зусилля Q_x, Q_y , за умови використання корегуючого множника K , визначаються як:

$$Q_x = K \frac{E_1}{2(1+\nu)} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K \frac{E_1}{2(1+\nu)} \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_{13} = w_{,x} + \Psi_x - \frac{u}{R_x},$$

$$\varepsilon_{23} = w_{,y} + \Psi_y - \frac{v}{R_y}.$$

Запропонований метод апробовано на ряді тестових задач та застосовано для дослідження динамічної поведінки пологих оболонок зі складною формою плану. В якості тестового прикладу розглянуто жорстко закріплену сферичну оболонку, яка спірається на еліптичний план. Геометричні та механічні характеристики такі ж як і в роботі [2]. На рисунку показано порівняння значень основної частоти оболонок, одержаних за допомогою методу R-функцій з результатами роботи [2]. Як видно з графіків відхилення не перебільшує 3%.



1. Kurpa L.V. (2009) Nonlinear free vibrations of multilayer shallow shells with a symmetric structure and with a complicated form of the plan. J. Math. Sciences 162, №1:85-98.
2. Chorfi S.M., Houmat A. (2010) Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form. J. Composite Structures 92: 2573-258.

NONLINEAR VIBRATION OF FUNCTIONALLY GRADED SHALLOW SHELLS OF THE COMPLEX PLAN FORM.

First RFM(method of R-functions) is extended to the study of geometrically nonlinear free vibrations of shallow shells with complex shapes plan. Appropriate software was developed and tested on the test problems as well as used to solve new problems.

ОСОБЛИВОСТІ КОВЗНОГО ДИНАМІЧНОГО КОНТАКТУ МАТРИЦІ ТА СФЕРИЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Ігор Лаушник, Віктор Михаськів, Тетяна Слободенюк

*Львівська філія Дніпропетровського національного університету
залізничного транспорту,*

вул. Іванни Блажкевич, 12а, м. Львів, 79052, Україна;

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,*

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна

У багатьох випадках у композитних тілах між матрицею та включенням реалізується ковзний або гладкий контакт, який супроводжується відсутністю дотичних напружень на поверхні з'єднання. Дослідження гладкого контакту тривимірної матриці із об'ємним включенням нарівні із задачами про ідеальний контакт є дуже актуальними в практичних розрахунках, а умови динамічного контакту матриці та включення впливають також на параметри концентрації напружень, які є визначальними для теоретичного передбачення руйнування структури. У літературі наведено розв'язки тривимірних задач дифракції пружних хвиль на включенні за його ідеального контакту з матрицею [1-3] та за присутності між ними тонкого податливого прошарку [4]. Також опубліковано ряд робіт, що стосуються вивчення даної проблеми у тривимірних статичних задачах. У даній роботі наведено порівняльний аналіз пружних хвильових полів у тривимірній матриці за умов ідеального та ковзного контакту зі сферичним включенням.

Розглядається тривимірне пружне тіло, яке складається з безмежної матриці та включення, що обмежене гладкою поверхнею S із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$. У матриці поширюється гармонічна пружна хвиля із заданою циклічною частотою ω та компонентами u_j^{in} амплітуди переміщень. Між матрицею та включенням реалізуються умови ковзного контакту:

$$\begin{aligned} t_k^M(\mathbf{x}) &= t_k^I(\mathbf{x}) = t_k(\mathbf{x}), \quad k = \overline{1, 3} \\ n_1(\mathbf{x})t_2(\mathbf{x}) - n_2(\mathbf{x})t_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ n_1(\mathbf{x})t_3(\mathbf{x}) - n_3(\mathbf{x})t_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ \left[u_k^I(\mathbf{x}) - u_k^M(\mathbf{x}) \right] n_k(\mathbf{x}) &= 0, \quad x \in S \end{aligned} \quad (1)$$

Інтегральні зображення розв'язку поставленої задачі у

частотній області ґрунтуються на поданнях Сомільяно. Граничним переходом у цих поданнях до міжфазної поверхні вихідна задача зводиться до системи шести граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Після неявного врахування в ГІР перших трьох умов (1) та регуляризації, система запишеться у слобосингулярній формі як:

$$\begin{aligned} u_j^M(\mathbf{x}) - \iint_S \tilde{T}_{jk}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [u_k^M(\mathbf{y}) - u_k^M(\mathbf{x})] dS_y + \iint_S \tilde{U}_{jk}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) dS_y - \\ - \iint_S [T_{jk}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \tilde{T}_{jk}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y})] u_k^M(\mathbf{y}) dS_y = u_j^{in}(\mathbf{x}) \\ \iint_S \tilde{T}_{jk}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [u_k^I(\mathbf{y}) - u_k^I(\mathbf{x})] dS_y - \iint_S \tilde{U}_{jk}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) dS_y + \\ + \iint_S [T_{jk}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \tilde{T}_{jk}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})] u_k^I(\mathbf{y}) dS_y = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \quad (2)$$

Замкнутість системи рівнянь забезпечується об'єднанням ГІР (2) з останніми трьома співвідношеннями (1). Її розв'язок отримується поєднанням методів граничних елементів і колокацій.

На основі числових результатів проведено порівняльний аналіз картин дифракції хвиль на включенні у залежності від пружних характеристик складових за умов ідеального та ковзного контакту за поширення у тілі плоскої позовжньої хвилі.

1. Kitahara M., Nakagawa K., Achenbach J.D. Boundary-integral equation method for elastodynamic scattering by a compact inhomogeneity // Computational Mechanics. – 1989. – V. 5, No. 2-3. – P. 129-144.
2. Бутрак І.О., Кільницька Т.І., Хай О.М. Динамічний контакт сферичного включення з матрицею за падіння пружної хвилі // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, №3. – С. 99-104.
3. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тел с включением неканонической формы // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 4. – С. 27-35.
4. Бутрак І.О., Кильни́цкая Т.И., Михаськів В.В. Рассеяние гармонической упругой волны объемным включением при наличии тонкой прослойки // Прикл. математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 3. – С. 476-483.

SPECIFICS OF SLIDING DYNAMIC CONTACT OF MATRIX AND SPHERICAL INCLUSION

By the boundary elements method the dynamic displacements and stresses in an infinite elastic matrix with the spherical elastic inclusion caused by elastic wave propagation under conditions of perfect and sliding contact are investigated. By the numerical solution of equations an influence of direction of propagation and frequency of incident waves on the actual physical parameters depending elastic characteristics of composite constituents is studied.

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН-СМУГ ЗА ДИСКРЕТНОГО РОЗГЛЯДУ ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ СКЛАДОВИХ

Михайло Марчук, Віра Пакош, Володимир Харченко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;*

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна;*

Державне підприємство

*“Конструкторське бюро “Південне” ім. М. К. Янгеля”,
вул. Криворізька, 3, м. Дніпропетровськ, 49008, Україна*

Композитні пластини шаруватої структури з регульованими характеристиками міцності та матеріаломісткості належать до поширених несучих елементів конструкцій і технічних засобів різноманітного цільового призначення. Дія на них інтенсивних динамічних, зокрема циклічних, навантажень зумовлює необхідність достовірної оцінки спектра власних частот з метою запобігання резонансним явищам в експлуатаційних умовах. Оскільки кожна із складових шарів має своє функціональне призначення (зокрема, одна із них може бути несучим елементом, а інші – виконувати роль тепло- та звукозахисного або ж антикорозійного покриття), то їхні пружні характеристики та товщини можуть суттєво відрізнятися. Визначення в такому випадку спектра власних частот шляхом використання співвідношень класичної або ж уточнених теорій пластин з усередненими за товщиною жорсткісними характеристиками [1, 2, 5] приводить до значних неточностей. Це зумовлює необхідність застосування підходу за дискретного розгляду шарів, що дає змогу більш адекватно врахувати особливості деформування кожного з них, особливо у випадку виготовлення їх із композиційних матеріалів. Найхарактернішою особливістю деформування тонкостінних елементів із сучасних армованих композитів на полімерній основі (як у статичному, так і в динамічному випадках) поряд з анізотропією пружних характеристик є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення [5]. Необхідно відмітити також той факт, що на сьогодні відома незначна кількість праць, присвячених дослідженню коливань (як поперечних, так і поздовжніх) композитних пластин з одночасним урахованням податливості до трансверсальних зсуву та

стиснення, особливо для шаруватої за товщиною структури та при дискретному розгляді складових. Основну частину результатів отримано із застосування числових методів [6–9].

У роботі запропоновано математичну модель процесу вільних поперечних коливань шаруватих пластин-смуг за дискретного розгляду їх складових. Для цього використано співвідношення варіанта уточненої теорії пластин, у яких явно враховано податливість до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення [3] при одночасному виконанні граничних умов в напруженнях на лицевих площинах. На цій основі отримано аналітичний вираз для спектра власних частот двошарової пластини-смуги за умови шарнірного закріплення видовжених країв на нижній лицевій площині структури. Як частковий випадок записано вираз для спектра власних частот вільних поперечних коливань пластини-смуги з нанесеним на верхню лицеву площину тонким захисним покриттям [4]. Граничним переходом за параметрами, які характеризують співвідношення товщин складових, отримано вираз для спектра власних частот податливої до трансверсального зсуву та стиснення пластини-смуги. Подальші граничні переходи за параметрами податливості до трансверсальних стиснення та зсуву дозволили отримати відомі результати для виразів спектрів власних частот за використання теорій на основі зсувної моделі С. П. Тимошенка та класичної моделі Кірхгофа – Лява. Отримано також аналітичний вираз для спектра власних частот тришарової пластини-смуги симетричної будови за товщиною з аналогічними до попереднього випадку крайовими умовами. Для обох випадків пластин-смуг виявлено ефект суттєвого зниження значень власних частот при врахуванні дискретності будови за товщиною у порівнянні з результатами, отриманими з використанням приведених жорсткісних характеристик пакета.

Дослідження виконано за часткової підтримки ДФФД України (проект Ф53.1/028).

1. Гузь А.Н., Шульга Н.А., Бабич И.Ю., Космодамианский А.С., Лапуста Ю.Н., Подлипенец А.Н., Руцицкий Я.Я., Сторожев В.И., Чехов В.Н., Шпак В.А. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 429 с. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. акад. НАНУ А. Н. Гузя. – Т. 2.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композиционных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
3. Осадчук В.А., Марчук М.В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
4. Пакош В. С. Власні частоти податливої до трансверсальних зсуву та стиснення пластини-смуги з тонким покриттям // Прикл. проблеми

- механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 172-175.
5. *Christensen R.M.* Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
 6. *Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim.* Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory // *Int. J. Mech. Sci.* – 2010. – **52**, No. 4. – P. 626–633.
 7. *Latheswary S., Valsarajan K. V., Rao Y. V. K. S.* Free vibrations analysis of laminated plates using higher-order shear deformation theory // *J. Institution Eng. (India): Series A.* – 2004. – **85**. – P. 18–24.
 8. *Zak A.J., Ostachowicz W., Cartmell M.P.* Dynamics of multilayered composite plates with shape memory alloy wires // *Trans ASME. J. Appl. Mech.* – 2003. – **70**, No. 3. – P. 313–327.
 9. *Zhi Wei, Mingqiao Lu, and Jun Zhang.* Numerical model and analysis on dynamics of composites for active damage detection // *Proc. Int. Conf. Intelligent Computing. ICIC 2006: Comput. Intelligence. Lecture Notes in Computer Sci.* – 2006. – Vol. 4114. – P. 649–654.

NATURAL FREQUENCIES OF LAYERED COMPOSITE PLATES-STRIPS IN DISCRETE CONSIDERATION OF COMPONENTS PLIABLE TO TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION

On the basis of a variant of refined theory of dynamic deformation of composite plates, a mathematical model of the process of free vibrations of layered plates-strips with components compliant to transversal shear and compression is proposed. For hinged elongated edges of a lower component the characteristic equation is written. The analytical expression for the spectrum of natural frequencies of two and three-layer plates-strips is obtained. The influence of taking into account the structure discreteness in thickness and compliance to the transversal compression on their values is analyzed.

УДК 534.26: 620.19

ПРО ВПЛИВ ІМПЕДАНСУ ДЕФЕКТУ З'ЄДНАННЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗОНАНСНОГО РОЗСПОВАННЯ ПРУЖНОЇ SH-ХВИЛІ

Зіновій Назарчук, Мирон Войтко, Дозислав Куриляк

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

У декартовій системі координат *Oxyz* розглянемо жорстке з'єднання пластини $P : \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$ з півпростором $S : \{x \in (-\infty, \infty), y \in (0, \infty), z \in (-\infty, \infty)\}$. На межі з'єднання пластини

P та півпростору S задана поверхня $\Gamma : \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$, яка характеризується імпедансом η і є моделлю дефекту (рис. 1). Така структура опромінюється однією з незгасальних гармонічних нормальних SH-хвиль ($u_z^{inc}(x, y)$), що поширюються у пластині P , за відсутності дефекту.

Відповідна крайова задача дифракції має вигляд:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\partial u^{tot}(x, y) / \partial y = 0, \quad y = -d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\partial u^{tot}(x, y) / \partial y + \eta u^{tot}(x, y) = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-L, 0), \quad (3)$$

$$u^{tot}(x, y) = u(x, y) + u^{inc}(x, y) = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty), \quad (4)$$

де $u = u(x, y)$ – невідома u_z -компонента дифрагованого поля зміщень.

Методом Вінера–Хопфа, крайову задачу (1)–(4) зводимо до розв’язання нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР):

$$[I + A]X = F. \quad (5)$$

Тут $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – невідомі,

$x_n = O(n^{-1})$, коли $n \rightarrow \infty$,

$\|A\|_{l^2} = \sum_{p,n} |a_{pn}|^2 < \infty$, а отже

НСЛАР (5) має єдиний розв’язок, за виключенням дискретних значень частотного параметра.

Характеристичне рівняння для знаходження дискретного спектра вихідної дифракційної задачі записуємо у вигляді

$$\det[I + A(kd)] = 0. \quad (6)$$

Тут $kd = \omega d / c$, c – швидкість поширення хвилі у пластині, ω – комплексна частота.

На рис. 2 показано залежність функції $f(kd, p, \varepsilon) = |\det[I + A(kd)]|$ від дійсних kd для різних значень параметра $p = L / d$ і фіксованому ε , де $\varepsilon = \eta d$. Бачимо, що зі зростанням p функція $f(kd, p, \varepsilon)$ допускає більше, ніж один локальний мінімум, значення яких приймаємо за початкове наближення при визначенні комплексних коренів рівняння (6).

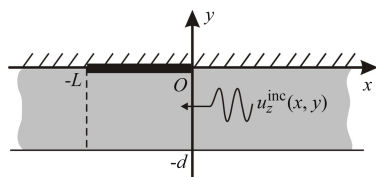


Рис. 1. Міжфазний дефект на межі з'єднання пружної пластини з півпростором

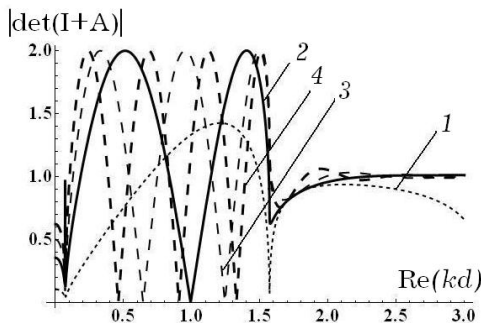


Рис. 2. Залежність модуля визначника (6) від $\text{Re}(kd)$ при $\varepsilon = 0,05$;
1 - $p = 0,1$; 2 - $p = 2,2$; 3 - $p = 4$; 4 - $p = 6$.

На рис. 3 показана залежність додатних дійсних значень коренів рівняння (6) від параметра p .

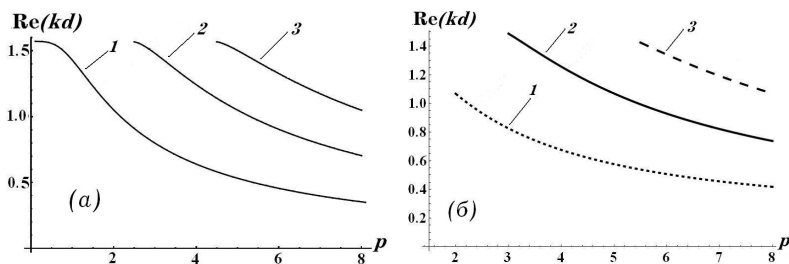


Рис. 3. Вплив імпедансу на резонансну частоту $\text{Re} kd$ для трьох віток коренів (1,2,3) рівняння (6), (а) - $\varepsilon = 0$; (б) - $\varepsilon = 0,05$.

Із наведених кривих на цьому рисунку бачимо, що за фіксованої товщини пластини d , резонансне збудження динамічної системи може відбуватися, коли $p \geq 0,1$ при $\varepsilon = 0$ (тріщина) і при $p > 2$, коли $\varepsilon > 0$ (імпедансний дефект). Отже, за фіксованої товщини пластини відношення мінімальних розмірів імпедансного дефекту L_1 та тріщини L_2 , за яких відбувається резонансне збудження динамічної системи, становить $L_1 / L_2 \sim 20$. Тобто, за однакових розмірів, тріщина є суттєво контрастніша, ніж імпедансний дефект.

INFLUENCE OF DEFECT'S IMPEDANCE ON THE RESONANCE SCATTERING OF ELASTIC WAVES SH-WAVE

Wiener-Hopf technique is applied for rigorous analysis of elastic SH-wave diffraction by the finite interface impedance defect and for investigation of corresponding spectral properties.

УДК 621.01: 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ЗВУКОПОГЛИНАЮЧИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ ТИМОШЕНКА

**Мирон Николишин, Богдан Дівесєв, Михайло Глобчак,
Уляна Тарасюк**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна;
Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна*

Проходження звуку через шаруваті структури інтенсивно вивчається протягом багатьох років, але більшість з цих досліджень донедавна стосувались передачі через ізотропні матеріали. Однак відомо, що погонна маса, структурне демпфування вібрації і структурна жорсткість є важливими параметрами, які впливають на вібрацію і звукові властивості передачі. Тільки в останні роки досліджуються задачі з передачі звуку через анізотропні шаруваті матеріали.

У даній роботі розглянуто панель як пластину Тимошенка, а її параметри визначено на основі порівняння частот сендвічу та балки Тимошенка [1] ідентичної товщини і погонної ваги.

Числові приклади. Розглянемо тришарову балку (циліндричний згин пластини). Її параметри: довжина $L = 0.6\text{ м}$, товщина наповнювача $H = 0.0254\text{ м}$, товщини лицевих шарів $h = 0.003\text{ м}$; модулі наповнювача $C_{xx} = C_{zz} = 180\text{ МПа}$, $G = 35\text{ МПа}$, $C_{xz} = 40\text{ МПа}$, густина $\rho = 240\text{ кг/м}^3$; модулі жорстких лицевих шарів – $C_{xx} = 43\text{ ГПа}$; $C_{xz} = 6\text{ ГПа}$; $G = 0.6\text{ ГПа}$, $\rho = 2000\text{ кг/м}^3$.

Для трансформації сендвічу до балки Тимошенка однакової товщини та погонної ваги застосуємо наступний критерій ([1])

$$C = \min_{E_T, G_T} \left| f_S^i - f_T^i(E_T, G_T) \right|^2 \quad f_k - \Delta_k/2 < f < f_k + \Delta_k/2. \quad (1)$$

Тут E_T, G_T – модуль Юнга та коефіцієнт зсуву еквівалентної балки Тимошенка. f_S^i – резонансні частоти сендвіча, а f_T^i – балки Тимошенка, що міняються у деяких інтервалах.

Розглянемо також ще два приклади: пластина з масивними м'якими зовнішніми шарами та однорідна пластина з композиту. Механічні характеристики шарів цих пластин такі ж, як і вище у сендвічу. За характеристику звукоізоляції виберемо величину

$T_L = 10 \log(p_i/p_t)$. Тут p_i – тиск падаючої хвилі, p_t – тиск хвилі за перешкодою [2].

На рис. 1 наведені значення T_L для цих трьох балок.

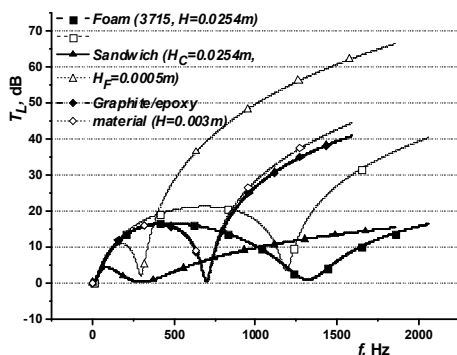


Рис. 1. T_L для трьох балок

Пунктирними лініями позначені значення T_L знайдені без врахування кутової інерції січення балки Тимошенка (так як у роботі [2]). Можна помітити значну різницю значень, особливо для такої найбільш часто вживаної звукозахисної структури, як сендвіч. Найменші відхилення спостерігаються у однорідній композитній пластині.

Значний резерв для збільшення звукоізоляції нами виявлено при застосуванні комплексної схеми: пластина – система ДГК ([3]).

1. Б. Бутинер, Б.М. Дівеєв, І.С. Козут, А.Г. Смольський. Визначення механічних характеристик шаруватих елементів. // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. Український міжвідомчий науково-технічний збірник. – Львів, Вид-во “Львівська політехніка”, 2011. – № 45. – С. 21-27.
2. K. Renji Sound transmission loss of unbounded panels in bending vibration considering transverse shear deformation, Journal of Sound and Vibration. 283 (2005) 478–486.
3. Bohdan Diveyev, Orest Horbay, Roman Pelekh, Andriy Smolskyi Acoustical and vibration performance of layered beams with the dynamic vibration absorbers. //Proceeding of the ICSV19, Vilnius, Lithuania, 08-12, 2012 (electronic edition, 8p.).

SOUND ABSORBING PROPERTIES OF LAYERED PLATES BASED ON TIMOSHENKO THEORY

The present paper is an attempt at proposing a novel procedure to derive the sound isolation parameters for sandwich plates. The main advantage of the present method is that it does not rely on strong assumptions about the model of the plate. For acoustic calculations Timoshenko beam equivalent to sandwich is under discussion.

УДК 539.3:534.1

АНАЛІЗ КРАЙОВОГО РЕЗОНАНСУ ПРИ ЗБУДЖЕННІ ТРИПАРЦІАЛЬНИХ АНТИСИМЕТРИЧНИХ ХВИЛЬ БІЛЯ КРАЮ ОРТОТРОПНОГО ПІВШАРУ З ГНУЧКИМ НЕРОЗТЯЖНИМ ПОКРИТТЯМ ГРАНЕЙ

Віталій Носок, Валерій Сторожев

*Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, м. Донецьк, 83001, Україна*

Представлено процедуру побудови аналітико-числового розв'язку задачі збудження нормальних антисиметричних пружних хвиль у ортотропному півшарі з довільно орієнтованою відносно напрямків пружної симетрії плоскою бічною поверхнею під дією зовнішнього гармонічного навантаження. Розглядуваний шар займає у безрозмірних координатах $Ox_1x_2x_3$ з нормуючим параметром R_* область $V = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \geq \operatorname{tg}\phi \cdot x_1, x_3 \in [-h, h]\}$, характеризується віднесеннями до нормуючого параметру c_* пружними сталими c_{ij} , густиною ρ та має вкриті гнучкими нерозтяжними покриттями грані $x_3 = \pm h$. До його бічної поверхні $\Gamma = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 = \operatorname{tg}\phi \cdot x_1, x_3 \in [-h, h]\}$ прикладені нормальні осцилюючі зусилля з комплексними характеристиками

$$(\sigma_{nn})_\Gamma = f_n(x_3) \exp(-i\omega t), (\sigma_{ns})_\Gamma = 0, (\sigma_{nz})_\Gamma = 0, \quad (1)$$

где $f_n(-x_3) = f_n(x_3)$, $f_n(-h) = f_n(h) = 0$. Характеристики динамічного напружено-деформованого стану півшару у вигляді комплексних функцій хвилових пружних переміщень $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ і динамічних напружень $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ задовольняють крайовим умовам

$$(u_j)_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (\sigma_{33})_{x_3=\pm h} = 0 \quad (2)$$

В контексті даної постановки для комплексних хвилових переміщень вводяться представлення

$$u_j = \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)} \sin \frac{p\pi x_3}{h} \cdot \exp(-i(\omega t - k_p(n_1 x_1 + n_2 x_2))) \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

$$u_3 = \sum_{p=1}^{\infty} A_3^{(p)} \cos \frac{p\pi x_3}{h} \cdot \exp(-i(\omega t - k_p(n_1 x_1 + n_2 x_2))),$$

$$n_1 = -\cos(\pi/2 - \phi), \quad n_2 = -\cos \phi,$$

які забезпечують виконання крайових умов (3). При цьому із системи диференціальних рівнянь динамічного деформування для матеріалу шару для u_j одержані представлення у формі рядів з невизначеними коефіцієнтами A_{pq}

$$u_j = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^3 (A_{pq} \Delta_{jq}^{(p)} E_{pq}(x_1, x_2)) \sin \frac{p\pi x_3}{h} \cdot \exp(-i\omega t) \right) \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

$$u_j = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^3 (A_{pq} \Delta_{3q}^{(p)} E_{pq}(x_1, x_2)) \cos \frac{p\pi x_3}{h} \cdot \exp(-i\omega t) \right),$$

де $k_p^{(q)} (q = \overline{1, 3})$ – корені бікубічних поліноміальних дисперсійних рівнянь

$$\det \|L_{ij}^{(pq)}\| = 0 \quad (\operatorname{Re}(k_p^{(q)}) > 0);$$

$$E_{pq}(x_1, x_2) = \exp(ik_p^{(q)}(n_1 x_1 + n_2 x_2));$$

$$\Delta_{1q}^{(p)} = L_{12}^{(pq)} L_{23}^{(pq)} - L_{13}^{(pq)} L_{22}^{(pq)}, \quad \Delta_{2q}^{(p)} = L_{12}^{(pq)} L_{13}^{(pq)} - L_{11}^{(pq)} L_{23}^{(pq)}, \quad (5)$$

$$\Delta_{3q}^{(p)} = L_{11}^{(pq)} L_{22}^{(pq)} - L_{12}^{(pq)} L_{12}^{(pq)},$$

які визначаються за формулою Кардано. У припущенні, що для функції $f_n(x_3)$ одержано представлення ортогональним гармонічним рядом

$$f_n(x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \sin \frac{p\pi x_3}{h}, \quad (6)$$

для коефіцієнтів A_{pq} як розв'язків системи лінійних алгебраїчних

$$\text{рівнянь} \quad \lambda_{m1}^{(p)} A_{p1} + \lambda_{m2}^{(p)} A_{p2} + \lambda_{m3}^{(p)} A_{p3} = \delta_{m1} \alpha_p \quad (m = \overline{1, 3}), \quad (7)$$

$$\text{в яких:} \quad \lambda_{1q}^{(p)} = ik_p^{(q)} (\Delta_{1q}^{(p)} n_1 (c_{11} n_1^2 + (c_{12} + 2c_{66}) n_2^2) + \quad (8)$$

$$+ \Delta_{2q}^{(p)} n_2 (c_{22} n_2^2 + (c_{12} + 2c_{66}) n_1^2)) - \Delta_{3q}^{(p)} (p\pi / h) (c_{13} n_1^2 + c_{23} n_2^2),$$

$$\lambda_{2q}^{(p)} = ik_p^{(q)} (\Delta_{1q}^{(p)} n_1 (c_{12} n_1^2 + (c_{11} - 2c_{66}) n_2^2) +$$

$$+ \Delta_{2q}^{(p)} n_2 (c_{12} n_2^2 + (c_{22} - 2c_{66}) n_1^2)) - \Delta_{3q}^{(p)} (p\pi / h) (c_{23} n_1^2 + c_{13} n_2^2),$$

$$\lambda_{3q}^{(p)} = \Delta_{1q}^{(p)} c_{55} n_1 (p\pi / h) + \Delta_{2q}^{(p)} c_{44} n_2 (p\pi / h) + \Delta_{3q}^{(p)} (ik_p^{(q)}) (c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2),$$

δ_{m1} – символ Кронекера, одержані аналітичні представлення. Із

використанням розкладів (4) для низки конкретних матеріалів проведено параметричний амплітудно-частотний аналіз полів динамічних переміщень і напружень в околі бічної поверхні розгляданого півшару.

ANALYSIS OF BOUNDARY RESONANCE AT EXCITATION OF THREE-PARTIAL ANTI-SYMMETRIC WAVES NEAR THE EDGE OF ORTHOTROPIC HALF-SPACE WITH FLEXIBLE NON-EXPANDING COATING OF FACES

The work presents the procedure of construction the analytic-numerical solution of the problem of excitation normal anti-symmetric elastic waves in an orthotropic half-space with arbitrary directions of elastic symmetry under the action of external harmonic loading.

УДК 539.3

ПОРІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО І НЕЛІНІЙНОГО ПРАВИЛ СУМІШЕЙ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ НЕПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БАГАТОФАЗНИХ МАТЕРІАЛІВ В ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ

Ніна Оксенчук, Ігор Сенченков, Олена Доля

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова 3, м. Київ, 03057, Україна;*

*КНУ будівництва та архітектури,
Повітрофлотський пр-т, 31, м. Київ, 03680, Україна*

Однією з сучасних технологій поверхневої обробки елементів конструкцій є коротко імпульсне потужне лазерне опромінювання тривалістю імпульсів $10^{-9} \div 10^{-7}$ с [3]. За таких умов модель термомеханічного процесу в тілі повинна враховувати динамічні ефекти. Термічна складова імпульсу викликає швидке підвищення температури і остигання, які для матеріалів мартенситного класу викликають спочатку аустенізацію вихідної фази, а потім розпад аустеніту в мартенсит. Для врахування впливу поточного фазового складу на непружні характеристики матеріалу в роботі [1] для визначення коефіцієнтів моделі течії було використано лінійне правило сумішей (ЛПС) $\bar{P} = (1 - C_2)P_1 + C_2P_2$, де P_1, P_2 – параметри моделі для компонентів фаз 1 і 2, які мають концентрації C_1, C_2 , $C_1 + C_2 = 1$.

Для оцінки чутливості результатів моделювання нестационарних

процесів до цієї конститутивної гіпотези в даній роботі проведено порівняльний аналіз результатів моделювання, отриманих з використанням лінійного і нелінійного правил сумішей (НПС) [2]

$$\bar{P} = (1 - C_2^N) P_1 + C_2^N P_2 \quad (1)$$

при $N = 2$.

Розглядається динамічна задача для півпростору $z \geq 0$ із сталі 35ХМА при імпульсному термічному навантаженні за умов на поверхні $z = 0$

$$q_s = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} = 0.$$

$u_z = \dot{u}_z = 0$ при $t = 0$.

В розрахунках приймалось $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ квт} / \text{м}^2$, $t_q = 10^{-8} \text{ с}$.

На рис. 1 показана зміна за часом температури та компоненти напруження σ_{rr} на поверхні $z = 0$, а на рис. 2 – залишковий розподіл σ_{rr} вглиб півпростору. Штриховими лініями показані результати розрахунку за ЛПС, а суцільними – за НПС. Температури початку аустенізації та мартенситного перетворення позначені як A_{c1} і θ_H .

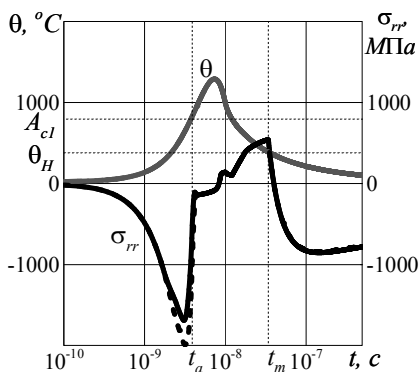


Рис. 1

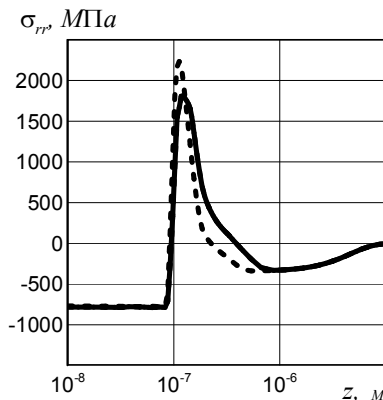


Рис. 2

В момент часу $t_a = 0,37 \cdot 10^{-8} \text{ с}$, при якому починається аустенізація, рівень напружень при розрахунку за ЛПС дещо вищий за рівень напружень, розрахований за НПС. Протягом інших

проміжків часу розбіжність не суттєва. В залишковому розподілі (рис. 2) ЛПС дає завищене значення максимальних розтягувальних напружень в околі «зуба» і не впливає на стискальні напруження в мартенситному шарі.

Таким чином, при $N > 1$ в рівнянні НПС (1) лінійне правило сумішей дає задовільну оцінку зверху максимальних поточних і залишкових напружень для даного класу задач.

1. Сенченков І.К., Оксенчук Н.Д. Моделирование неізотермического течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала // Мат. методы и физ.мех. поля. – 2012. – 55, № 1. – С. 138-144.
2. Bonquered I.K. et. al. Microstructure based model for the static mechanical behavior of multiphase steel // Acta Materialia, 2006. – 54, N 46. – P. 1143-1156.
3. Chen H., Kesar J., Yao Y.L. Characterization of plastic deformation induced microscale laser shock penning // ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 72. – P.713-723.

COMPARISON OF LINEAR AND NONLINEAR MIXTURE RULES FOR DEFINITION OF INELASTIC PROPERTIS OF MULTIPHASE MATERIALS IN DYNAMICAL PROBLEMS FOR BODIES WITH MICROSTRUCTURE

Linear and nonlinear mixture rules for parameters of multiphase nonlinear constitutive equations are compared for the problem of half space under thermal pulse loading.

УДК 539. 3

ПРУЖНЕ КІЛЬЦЕ ПІД ДІЄЮ ПАРАБОЛІЧНО РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗУСИЛЬ

Любов Онисько, Анатолій Осечко

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянуто задачу про пружне кільце з внутрішнім ($r_1 = R_1$) і зовнішнім ($r_2 = R_2$) радіусами, коли на внутрішній поверхні циліндра R_1 у початковий момент часу $t = 0$ прикладені симетрично розташовані відносно осі абсцис ударні динамічні зусилля $P_1(R_1, \theta, 0) = P_1(\theta)$, які розподілені за параболічним законом (рис.). Розподіл радіальних σ_{rr} , колових $\sigma_{\theta\theta}$ та дотичних $\sigma_{r\theta}$ напружень знайдено за використання методів скінченних різниць за часом та

рядів Фур'є за просторовими змінними [1,2]. Задачу розв'язано за наступних крайових умов:

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = P_1(\theta), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_2} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R_2} = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } P_1(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \pi/2 - \alpha, \quad \pi/2 + \alpha < \theta < \pi, \\ -a\theta^2 + b\theta + c, & \pi/2 - \alpha < \theta < \pi/2 + \alpha, \end{cases} \quad (2)$$

З рисунку маємо: $P_1(\pi/2 \pm \alpha) = 0$, $P_1(\pi/2) = p$. Ці невідомі коефіцієнти параболічного розподілу a , b , c знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a(\pi/2 \pm \alpha)^2 - b(\pi/2 \pm \alpha) - c = 0, \\ a(\pi/2)^2 - b\pi/2 - c = p. \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язавши її, отримаємо закон зміни зовнішнього навантаження від полярного кута θ для різних кутів розхилу параболі α (див. рис.):

$$P_1(\theta) = -p/\alpha^2 \left[\theta^2 - \pi\theta - (1/\alpha^2) + (\pi^2/4) \right]. \quad (4)$$

Розкладемо представлення (4) у ряд Фур'є

$$P_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [p_{1n}(R_1, t) \cos n\theta + p_{2n}(R_1, t) \sin n\theta] \quad (5)$$

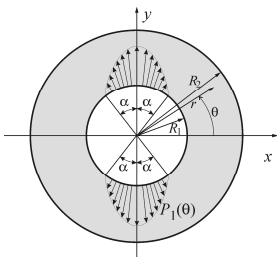
та знайдемо його коефіцієнти наступним чином:

$$\begin{aligned} p_{1n}(R_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_1(\theta) \cos n\theta d\theta = \delta \frac{8 \cos(n\pi/2)}{\pi n^2 \alpha} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} - \cos n\alpha \right), \\ p_{2n}(R_1, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_1(\theta) \sin n\theta d\theta = -p \frac{8 \sin(n\pi/2)}{\pi n^2 \alpha} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} + \cos n\alpha \right). \end{aligned} \quad (6)$$

За використання результатів статті [2] одержимо формули для розподілу напружень у кільцевій області. Колові напруження у відносних величинах матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}^j}{\sigma_0} &= \frac{\mu}{\sigma_0} \sum_{v=1}^j \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{C}_{1n}^v \bar{L}_{9n}^v(r) + \bar{D}_{1n}^v \bar{L}_{10n}^v(r) + \bar{C}_{4n}^v \bar{L}_{11n}^v(r) + \bar{D}_{4n}^v \bar{L}_{12n}^v(r) \right] w_{jv}^n \cos n\theta + \\ &+ \left[\bar{C}_{2n}^v \bar{L}_{9n}^v(r) + \bar{D}_{2n}^v \bar{L}_{10n}^v(r) + \bar{C}_{3n}^v \bar{L}_{11n}^v(r) + \bar{D}_{3n}^v \bar{L}_{12n}^v(r) \right] w_{jv}^n \sin n\theta. \\ \text{де: } \bar{L}_{9n} &= \frac{\lambda}{\mu} K_n''(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v} + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{R_1}{r} \bar{s}_{1v} K_n'(\tilde{s}_{1v}) - n^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{R_1^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{L}_{10n}(r) = \frac{\lambda}{\mu} I_n''(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v}^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \frac{R_1}{r} \bar{s}_{1v} I_n'(\tilde{s}_{1v}) - n^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \frac{R_1^2}{r^2} I_n(\tilde{s}_{1v})$$



$$\bar{L}_{11n}(r) = 2n \left[\frac{R_1^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}) - K_n'(\tilde{s}_{2v}) \frac{R_1}{r} \bar{s}_{2v} \right]$$

$$\bar{L}_{12n}(r) = 2n \left[\frac{R_1^2}{r^2} I_n(\tilde{s}_{2v}) - I_n'(\tilde{s}_{2v}) \frac{R_1}{r} \bar{s}_{2v} \right]$$

$$\text{де } \tilde{s}_{1v} = c_2 r / R_1 c_1 \Delta \tau_v, \quad \tilde{s}_{2v} = r / R_1 \Delta \tau_v,$$

$$\bar{s}_{1v} = c_2 / c_1 \Delta \tau_v, \quad \bar{s}_{1v}' = \bar{s}_{1v} R_2 / R_1, \quad \bar{s}_{2v} = 1 / \Delta \tau_v,$$

$\bar{s}_{2v}' = \bar{s}_{2v} R_2 / R_1$, коли $\Delta \tau_v = c_2 \Delta t_v / R_1$, а K_n, I_n – функції Макдональда та Бесселя n -порядку [2], c_k – відповідно швидкості поздовжніх ($k=1$) та поперечних ($k=2$) хвиль, p_0 – статичні колові напруження у точці $r=R$, $\theta=0$ для нескінченної пружної площини з коловим отвором, який навантажений відповідними силами. Невідомі коефіцієнти $\bar{C}_{kn}^j, \bar{D}_{kn}^j$ ($k=1,2,3,4$) визначено за допомогою розподілу напружень [2] та крайових умов (1) за використання методу рядів Фур'є.

За формулами (7) проведено розрахунок концентрації напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на поверхнях кільця залежно від кута розхилу параболічного навантаження α за різних коефіцієнтів Пуассона матеріалу. Досліджено, що при малих кутах α можна отримати розв'язок задачі для кільця, краї якого знаходяться під дією ударних зосереджених сил.

1. Саврук М.П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – №4. – С.194-198.
2. Онишко Л., Біда Н. Неосесиметричний розподіл напружень у порожнистому циліндрі за дії на його поверхнях динамічних навантажень // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника – Львів: ІПІММ, 2013. – Т. 2. – С. 155-158.

ELASTIC RING UNDER THE ACTION OF PARABOLIC DISTRIBUTED DYNAMIC LOADING

By the finite difference method with respect to the time and the Fourier series method for respect to the spatial variables a dynamic elastic problem for an annular area is solved, when the shock forces distributed by parabolic law are applied to its boundary.

ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ТА ФОРМ КОЛИВАНЬ ПЕРФОРОВАНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ТА ПЛАСТИН МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ

Андрій Осетров

*Національний Технічний Університет
«Харківський Політехнічний Інститут»,
м. Харків, вул. Фрунзе, 21, 61002, Україна*

Перфоровані тонкостінні елементи конструкцій є досить вживаними на практиці, завдяки зменшеній вазі та об'єму використаного матеріалу. Практичними прикладами таких конструкцій є теплообмінники, сепаратори, ізоляційні панелі та ін. Геометричні форми отворів перфорації можуть бути прямокутними, трикутними, коловими та ін. Цим обумовлена необхідність розробки ефективних чисельних методів розрахунку таких оболонок та пластин. У роботі запропоновано метод, що базується на сумісному використанні варіаційного методу Ритца, теорії R-функцій [2] та сплайн-апроксимації. Таке суміщення дозволяє називати даний метод універсальним по відношенню до форми та кількості перфораційних отворів та вигляду граничних умов, як на зовнішньому контурі, так і на внутрішніх контурах самих отворів.

Розглянемо практичну задачу дослідження спектру власних частот коливань пластини постійної товщини (рис. 1) з геометричними параметрами $a = 138$ мм, $b = 216$ мм, $h = 2$ мм, перфорованої

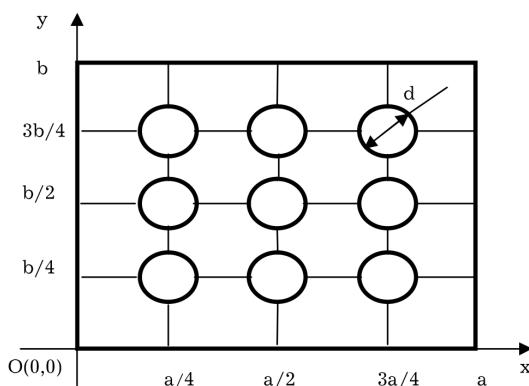


Рис. 1 – Перфорована пластина.

отворами у формі круга діаметра d . Пластина виготовлена зі сталі з

наступними механічними характеристиками: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$,
 $\nu = 0.3$, $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ [1].

Для розв'язання задачі з використанням запропонованого методу скористаємося класичною теорією, що відповідає гіпотезам Кірхгофа-Лява. Граничні умови для пластин відповідають жорсткому закріпленню на зовнішньому контурі при вільних отворах перфорації. Результати розрахунків власних частот пластин для різних значень діаметру перфорації d наведені у табл. 1 в порівнянні з відомими в літературі [1]. Результати в роботі [1] були отримані з використанням методу скінчених елементів (МСЕ), а запропонований метод реалізований з використанням сплайн-апроксимації з сіткою сплайнів 32×32 .

Таблиця 1 – Перші частоти пластин

№ пл.	d , мм	Λ_i , сплайни	Λ_i МСЕ[1], Гц
1	5	694.80	693.38
2	10	695.46	693.85
3	15	696.96	695.97
4	25	710.62	710.17
5	30	725.36	724.94

Співставлення результатів (табл. 1), отриманих за допомогою сплайн-апроксимації з відомими у літературі для методу МСЕ [1] демонструють, що різниця між ними не перевищує 1%. Таким чином застосування сплайн-апроксимації сумісно з RFM дозволяє ефективно враховувати особливості перфорованої геометрії пластин та пологих оболонок.

1. *Kiran D. Mali and Pravin M. Singru* Determination of the fundamental frequency of perforated rectangular plates: concentrated negative mass approach for the perforation // *Advances in Acoustics and Vibration* volume 2013, Article ID 972409, 6 pages.
2. *Курпа Л. В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек: монография – Харьков : НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.

DETERMINATION OF NATURAL FREQUENCIES AND EIGEN-FORMS OF PERFORATED SHALLOW SHELLS AND PLATES USING R-FUNCTIONS METHOD AND SPLINE-APPROXIMATION

The article suggests a method of investigation of natural frequencies and eigen-forms of perforated shallow shells and plates. The solution method is based on the joint usage of Ritz variational method, the R-functions theory and spline-approximation. The proposed approach allows to investigate shallow shells and plates with different types and numbers of perforations and different sets of boundary conditions on external and internal contours. The reliability of the obtained results via using the proposed approach is shown by it's comparison with the ones available in literature.

ДИНАМІКА ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ З ЗОВНІШНІМ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНИМ ОПОРОМ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Василь Перепічка

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглянуто задачу нестационарної динаміки півнескінченного пружного стержня, що взаємодіє з середовищем в рамках комбінованої чотирьохпараметричної моделі тертя. Досліджено процес згасання ударної хвилі, що спричинена прикладеним на торці сталим навантаженням. Сили тертя на бічній поверхні в зрушеній області визначаються пороговим значенням швидкості та моделюються або елементом Сен-Венана (сухе тертя), або паралельним з'єднанням елементів Фойгхта і Сен-Венана (так звана модель Шведова-Бінгама):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial T} = 0, & |\tau| < \tau_0 ; \\ \frac{\partial u}{\partial T} \neq 0 : & \frac{\partial u}{\partial T} < |v_0|, \quad \tau = -\tau_0 \operatorname{sgn} \frac{\partial u}{\partial T} - \beta \frac{\partial u}{\partial T} , \\ & \frac{\partial u}{\partial T} \geq |v_0|, \quad \tau = -\tau_1 \operatorname{sgn} \frac{\partial u}{\partial T} . \end{array} \right.$$

де $u(X, T)$ – переміщення перетинів, X, T – координата та час, v_0 – порогове значення швидкості, β – коефіцієнт в'язкості, τ_0, τ_1 – порогові значення сухого тертя.

Розв'язок поставленої задачі побудовано методом перетворення Лапласа. Отримані розв'язки проаналізовано з врахуванням результатів робіт [1, 2].

1. Никитин Л. В. Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. – 1988. – **11**, № 4. – С. 53-106.
2. Шацкий И.П., Перепичка В.В. Распространение ударной волны в упругом стержне с вязкопластическим внешним сопротивлением // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – **54**, № 6. – С. 175-180.

A DYNAMICS OF ELASTIC BAR IS WITH EXTERNAL VISCOPLASTIC RESISTANCE AT THE SHOCK LOADING

Analytical solution of dynamic task of longitudinal blow to the semi-infinite elastic rod that co-operates with an environment in obedience to a model viscoplastic friction with four parameters is proposed.

УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ, ЩО ЗВОДИТЬСЯ ДО СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА НЕРУХОМИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Всеволод Попов

*Одеська національна морська академія,
вул. Дідріхсона, 8, м. Одеса, 65029, Україна*

В доповіді міститься розв'язання задачі про гармонічні коливання повздовжнього зсуву смуги, зчепленої з пружним півпростором. Для цього розглянуто пружний ізотропний півпростір $-\infty < x < \infty$, $y \leq 0$, $-\infty < z < \infty$, з яким зв'язана пружна смуга $-a \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq h$, $-\infty < z < \infty$ з іншого матеріалу. З верхньою поверхнею смуги зчеплена жорстка накладка, яка завантажена зсувною спрямованою вздовж осі Oz силою $Pe^{-i\omega t}$. Далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, відкидається. Бічна поверхня смуги і поверхня півпростору поза зоною контакту з смугою вважаються ненавантаженими. За таких умов у півпросторі і в смузі відбуваються гармонічні коливання в умовах антиплоскої деформації і відмінною від нуля буде лише z -компонента вектора переміщень. Нехай $W_1(x, y)$ – переміщення смуги, а $W_2(x, y)$ – переміщення півпростору. Кожне з них є розв'язком відповідного рівняння Гельмгольца

$$\Delta W_l(x, y) + \kappa_{2l}^2 W_l(x, y) = 0, \quad \kappa_{2l}^2 = \frac{\omega^2}{c_{2l}^2}, \quad c_{2l}^2 = \frac{G_l}{\rho_l}, \quad l = 1, 2, \quad (1)$$

де G_1, ρ_1 – модуль зсуву і густина смуги, G_2, ρ_2 – модуль зсуву і густина півпростору. Умови зчеплення між смугою і півпростором формулюються у вигляді рівностей:

$$W_1(x, 0) = W_2(x, 0), \quad -a \leq x \leq a, \quad (2)$$

$$\tau_{yz}^1(x, 0) = \tau_{yz}^2(x, 0) = q(x), \quad -a \leq x \leq a, \quad \tau_{yz}^2(x, 0) = 0, \quad |x| > a, \quad (3)$$

$$\tau_{yz}^l(x, y) = G_l \frac{\partial W_l}{\partial y},$$

де $q(x)$ – невідомі контактні напруження в області контакту смуги і півпростору. Умови на верхній та бічних поверхнях смуги мають

вигляд:

$$W_1(x, h) = d, \quad -a \leq x \leq a, \quad \tau_{xz}^1(\pm a, y) = G \frac{\partial W_1}{\partial x}(\pm a, y) = 0 \quad (4)$$

В першій рівності (4) d – невідома амплітуда коливань накладки. Вона визначається з рівняння руху, яке при гармонічних коливаннях має вигляд:

$$-\omega^2 dm = P - \int_{-a}^a \tau_{yz}^1(x, h) dx, \quad (5)$$

де m – маса одиниці довжини накладки.

Методом інтегральних перетворень вихідна гранична задача (1)–(5) зводиться до інтегрального рівняння з додатковою умовою відносно невідомого контактного напруження:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[\frac{1+g_0}{\tau-\zeta} - \frac{1}{\tau+\zeta+2} + \frac{1}{2-\tau-\zeta} + R(\tau, \zeta) \right] d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) [-(2+g_0) \ln(\tau+1) + V(\tau+1)] d\tau = \frac{d_0}{\cos \gamma_{K_0}},$$

де

$$\varphi(\tau) = G_1^{-1} q(a\tau), \quad g_0 = \frac{G_1}{G_2}, \quad \gamma = \frac{h}{a}, \quad d_0 = \frac{d}{a}.$$

Це інтегральне рівняння, окрім сингулярності у вигляді ядра Коші, має ще дві нерухомі особливості в точках, які обмежують проміжок інтегрування. Одним з головних результатів доповіді є числовий метод розв'язання цього рівняння. Цей метод враховує справжню особливість розв'язку і ґрунтується на використанні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів. Після розв'язання інтегрального рівняння досліджені особливості розподілу напружень в зоні контакту.

THE DYNAMIC CONTACT PROBLEM WHICH REDUCE TO THE SINGULAR INTEGRAL ECUATION WITH TWO FIXED SINGULARITY.

The solving of the problem on the longitudinal share harmonic oscillation of the elastic strip, which is linked with elastic half space is given in the report. The initial boundary problem is reduced to the integral equation. One the main result of the report is the numerical method of this equation solving.

УДК 622.692.4+622.691.24

ОПТИМІЗАЦІЯ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ ТРАНСПОРТУВАННЯ ГАЗУ

Назар Притула

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

На даний час у світовій практиці актуальною є проблема створення комплексу моделювання режимів роботи газотранспортних систем (ГТС) в оптимізаційній постановці. Складність її розв'язання пов'язано із складністю ГТС, в яку входять десятки тисяч об'єктів, нелінійністю газодинамічних процесів, які розвиваються на значних просторових і часових вимірах, слабкою прогнозованістю вхідних параметрів, суттєвим впливом зовнішніх чинників та недостатнім метрологічним забезпеченням.

Планування оптимальних режимів роботи в складних системах транспортування газу вимагають побудови адекватних математичних моделей окремих об'єктів і системи в цілому, алгоритмів мінімальної складності і швидкозбіжних методів розв'язування відповідних рівнянь та систем, а також нестандартних підходів пошуку оптимальних рішень. Існуюча невизначеність, розмірність системи, стан метрологічного та інформаційного забезпечення суттєво впливають як на постановку задач, так і на складність їх розв'язування. Кожна оптимізаційна задача вимагає формулювання критерію оптимальності. Як правило, для кожного критерію оптимальності розробляється свій підхід до розв'язування оптимізаційної задачі. Перед проведенням оптимізації режимів роботи ГТС важливим є з'ясування потенціалу оптимізації і реальних можливостей його досягнення. Реальні можливості досягнення оптимального режиму пов'язані з можливостями його керуваності. Оптимізаційні задачі в реальних умовах роботи ГТС розв'язати достатньо точно проблематично. Це пов'язано в основному з точністю вхідних даних, недостатньою точністю прогнозування процесів надходження і відборів газу, проблемами ідентифікації параметрів моделей об'єктів.

Планування оптимальних режимів роботи ГТС зводиться до розв'язування систем, які включають моделі десятків тисяч ділянок газопроводів. Крім цього в системах магістральних газопроводів (МГ) працюють десятки компресорних станцій (КС), кожна з яких складається з багатьох газоперекачуючих агрегатів різних типів, технологічних об'єктів переробки газу, запірної та регулюючої арматури.

Моделями об'єктів є алгебраїчні, трансцендентні, диференціальні рівняння, системи диференціальних рівнянь. Можливе включення в модель ГТС об'єктів дискретної дії. В математичному плані пошук оптимальних режимних параметрів ГТС в загальному випадку зводиться до необхідності розв'язування нелінійних систем. Розв'язок повинен задовольняти критерій оптимальності, технічні та технологічні обмеження.

Запропоновано:

- метод розв'язування системи різнотипних нелінійних рівнянь [1], розв'язки яких задовольняють технологічним обмеженням роботи основних об'єктів, які задіяні в транспорті газу;
- алгоритми гідравлічного розрахунку багатоцехових компресорних станцій з різнотипними газоперекачуючими агрегатами, що дозволило враховувати індивідуальні характеристики кожного газоперекачуючого агрегату і запропонувати методи аналізу та оптимізації режимних газових потоків на КС в цілому [2].
- методи ідентифікації параметрів моделей і технологічного стану об'єктів, що дало можливість врахувати апріорну невизначеність умов їх функціонування і забезпечити необхідну точність планування параметрів режимів роботи ГТС;
- методи знаходження оптимальних режимів за умов обмеженості об'ємів акумульованого газу в ГТС та її роботи в непроекtnих режимах;
- алгоритми формування параметрів керування газопотоками за умов слабкої прогнозованості надходження газу в систему та його відбирання із неї.

1. *Притула Н. М. Розрахунок параметрів поточкорозподілу газу в газотранспортній системі (стаціонарний випадок) // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 146-155.*
2. *Притула Н. М. Задачі оптимізації поточкорозподілу в газотранспортних системах // Вісник Національного університету «Львівська політехніка»: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2007. – № 604. – С. 220-227.*

OPTIMIZATION OF STATIONARY OPERATING MODES OF GAS TRANSMISSION

In this work the author has analysed factors which influence on operating modes of the gas transmission system of Ukraine. As well as, he has found optimization potential estimates of certain technological objects and the gas transmission system as a whole. The author also has developed methods and algorithms for optimization of its operating modes.

УДК 629.5.015.5

РОЗВ'ЯЗКИ У ЗБУРЕННЯХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ БАЛОК І ПЛАСТИН З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Анатолій Сердюченко

*Національний університет кораблебудування ім. адм. Макарова,
пр-т Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025, Україна*

У доповіді розглянуто один із шляхів подолання проблем, які виникають у крайових задачах (КЗ) про власні коливання судових балок та пластин при збуреннях структури диференціальних рівнянь та граничних умов.

Крайові задачі про власні коливання балок та пластин належать до класичних задач механіки деформівного тіла [1, 2], проте в окремих випадках КЗ поки не отримано точних розв'язків та актуальним залишається питання ефективного розрахунку коренів – власних частот – з частотних рівнянь [1, 3]. З іншого погляду, хоч застосування сучасних обчислювальних комплексів (ANSYS, Solid Works тощо) в розрахунках вільних коливань дає змогу отримати чисельні результати для частот та форм коливань, але це не вирішує проблеми отримання повної множини аналітичних розв'язків КЗ.

У цьому напрямку було розроблено наближений асимптотичний метод розв'язку КЗ зі збуреннями, сутність якого полягає у наступному. Спочатку визначається формулювання незбуреної КЗ, для якої має місце точний розв'язок з найбільш простою структурою (однопрогонна балка чи прямокутна пластина із шарнірними закріпленнями та гармонічними $\sin$ - розв'язками – формами коливань). Далі на структуру диференціального рівняння (ДР) накладаються збурення за рахунок дії: а) поздовжніх сил (складний згин), б) пружної основи, в) врахування деформацій зсуву та г) інерції при кутових нахилах перерізів. В граничних умовах (ГУ) збуреннями є заміна шарнірних закріплень а) жорсткими затисненнями, б) вільними кінцями і взагалі в) пружними опорами та г) пружними затисненнями.

Було встановлено, що зазначені ускладнення структури ДР додають тільки парні похідні в рівняннях і це загалом не змінює структури базового розв'язку, дещо ускладнюються тільки обчислення параметрів розв'язку. У той же час збурення в ГУ призводить до появи в них непарних похідних (шарнірні закріплення містять тільки парні похідні в ГУ) і якраз ця обставина породжує суттєві

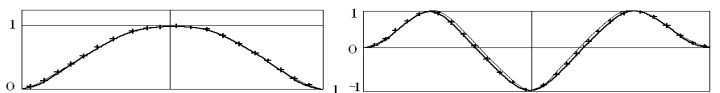
збурення у базовому розв'язку. Але збурення локалізовані в околі опор і швидко затухають при віддаленні від них особливо при зростанні порядку власних коливань.

Дані результати дали змогу записати розв'язки збурених КЗ у вигляді базового $\sin$ - розв'язку з приведеними параметрами (початковими фазами та довжинами півхвиль форм коливань) та збурень із експоненціальним затуханням при віддаленні від опор (для балок) чи опорного контуру (для пластин). Слід зазначити, що даний підхід почали використовувати, зокрема, при розрахунках власних коливань жорстко затиснених пластин, ще з другої половини минулого століття [2, 3].

У наступній таблиці наведено порівняння результатів автора та даних [1] для частот власних коливань жорстко затиснених пластин з різними відношеннями сторін γ .

	γ	$m = 1$		3		5	
$n = 1$	1.0	36.0	$\Delta, \%$	131.9	$\Delta, \%$	309.0	$\Delta, \%$
		35.1	2.5	131.6	0.23	308.9	0.03
	0.5	24.6	1.6	124.0	0.65	302.0	0.36
		24.2		123.2		300.9	
3	1.0	131.9	0.23	220.1	0.36	393.4	0.20
		131.6		219/3		392.8	
	0.5	44.8	0.89	142.4	0.21	320.1	0.3
		44.4		142.1		320.0	
		87.0		181.4		358.8	

Порівняння асимптотичного (+ + +) та чисельного (---) розв'язків для форм коливань наведено на наступному рисунку.



Висновки. Ускладнення у розв'язках КЗ про власні коливання балок та пластин виникають тільки у випадку появи непарних похідних у ДР чи ГУ. Проте дані збурення КЗ можуть бути ефективно подолані у рамках наближеного асимптотичного розв'язку, у якому до базового $\sin$ - розв'язку з модифікованими параметрами додано локалізовані в околі опор збурення.

1. Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3 т. / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко и др. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 568 с.
2. Постнов В.А., Калинин В.С., Ростовцев Д.М. Вибрация корабля – Л:

Судостроение, 1983. – 248 с.

3. *Leibowitz R.C., Wallace D.R.* Computer programs for plate vibration including the effects of clamped and rotational boundaries and cylindrical curvature – Ship acoustic department and computation and mathematics department of research & development center, January 1971. Washington, D.C. USA – 154 p.

**PERTURBATION SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS RELATED
TO THE FREE VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS AND PLATES
WITH ELASTIC SUPPORTS**

Approximate asymptotic solutions of the perturbed free-vibration problem of the ship structure beams and plates are considered. Solutions included basic sin-solution and localized perturbations close to the supports. Comparison of the results for the beams with elastic supports and for fully clamped plates, derived by using FEM analysis and asymptotic solutions, displayed close values for natural frequencies and mode shapes.

УДК 539.3

**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ У ШАРУВАТИХ
КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИНКАХ ПІД ДИНАМІЧНИМ
НАВАНТАЖЕННЯМ**

Тетяна Соляр

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

Розглядається задача про визначення динамічних напружень у шаруватих кільцевих пластинках, які навантажені змінними в часі нормальними зусиллями. Між шарами з різними механічними характеристиками мають місце умови ідеального механічного контакту. Розрахунок напружень у пластинках з довільною кількістю шарів проведено з використанням алгоритму, що ґрунтується на перетворенні Лапласа та обчисленні зображення за допомогою модифікованої формули для його обернення [1].

Приймемо, що пластинка складається з N шарів $r_{j-1} < r < r_j$, $j = 1, \dots, N$, r_0 і r_N – радіуси внутрішньої і зовнішньої меж пластинки, r – радіальна координата. Позначимо через v_j , E_j – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга j – го шару, $c_{1,j}$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль. Розглянемо випадок, коли до межі

пластинки при $r = r_0$ і $r = r_N$ прикладені нормальні, незалежні від кутової координати зусилля p_a і p_b в початковий момент часу задані переміщення та швидкості пластинки.

Рівняння теорії пружності для j -го шару мають вигляд [2]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{u_j}{r^2} - \frac{1}{c_{l,j}^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \quad \text{при} \quad r_{j-1} < r < r_j, \quad (1)$$

де u_j – радіальні переміщення.

Напруження за плоского напруженого стану мають вигляд

$$\sigma_r = A_j \frac{du_j}{dr} + B_j \frac{u_j}{r}, \quad \sigma_\theta = B_j \frac{du_j}{dr} + A_j \frac{u_j}{r}, \quad (2)$$

$$\text{де} \quad A_j = \frac{2G_j}{1 - \nu_j}, \quad B_j = \nu_j A_j.$$

Введемо нові змінні $\rho = r / r_*$, $\tau = c_* t / r_*$, $U_j = 2G_* u_j / r_*$, де r_* , c_* , G_* – характерні (вибрані для одного із шарів) розмір, швидкість поширення хвиль і модуль зсуву.

Розв'язок задачі в зображеннях для неоднорідної пластинки на проміжку $\rho_{j-1} < \rho < \rho_j$ записано у вигляді.

$$\widetilde{U}_j = \sigma_{j-1} \varphi_j(\rho) + \sigma_j \psi_j(\rho), \quad \widetilde{\sigma}_r = \sigma_{j-1} f_j(\rho) + \sigma_j g_j(\rho), \quad (3)$$

де $\sigma_j = \widetilde{\sigma}_r(\rho_j)$, $\varphi_j, \psi_j, f_j, g_j$ – відомі функції.

Використовуючи умови неперевності переміщень на стику j і $j+1$ шарів при $j = 1, \dots, N-1$, та граничні умови

$$\sigma_0 = \widetilde{p}_a, \quad \sigma_N = \widetilde{p}_b. \quad (4)$$

поставлена задача в зображеннях зведена до розв'язування системи $N-1$ рівнянь вигляду

$$\begin{cases} A_j \sigma_{j-1} + B_j \sigma_j + C_j \sigma_{j+1} = 0, & j = 2, \dots, N-2, \\ B_1 \sigma_1 + C_1 \sigma_2 = -A_1 \widetilde{p}_a, \\ A_{N-1} \sigma_{N-2} + B_{N-1} \sigma_{N-1} = -C_{N-1} \widetilde{p}_b. \end{cases} \quad (5)$$

Систему рівнянь (5) розв'язано методом прогонки. Знаходження оригіналів проводили за допомогою формули числово-аналітичного обернення перетворення Лапласа [1].

З використанням розробленого алгоритму розраховано напруження в однорідних та неоднорідних, широких та вузьких

кільцях за різної жорсткості та різних (гладких, кусково-неперервних) динамічних навантажень. Встановлено характерні особливості у розподілі динамічних напружень в однорідних та кусково-однорідних пластинках. Наведено елементарний розв'язок, який дозволяє визначати асимптотичний розподіл напружень у пружних кільцях.

1. Кушнір Р.М., Соляр Т.Я. Определение динамических напряжений в слоистых кольцевых пластинках с использованием модифицированной формулы Прудникова // Теор. и прикл. мех. – 2013. Вып. 7 (53). – С. 131-136.
2. Саврук М.П., Онишко Л.Й., Сенюк М.М. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, №1. – С. 7-14.

DETERMINATION OF THE STRESSED STATE IN LAMINATED CIRCULAR PLATES UNDER DYNAMIC LOAD

An algorithm of solution an axially symmetric dynamic problem of elasticity theory for a piecewise – homogeneous ring, loaded by time varying normal force, is offered. Stress analysis in the plates with arbitrary number of layers is made on the basis of calculation the Laplace transform using a modified formula for its inversion. Characteristic singularities in distribution of dynamic stresses in homogeneous and piecewise – homogeneous plates are determined.

УДК 621.01; 621.81

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ ОБРОБЛЕННЯ І ТРАНСПОРТУВАННЯ

**Володимир Топільницький, Оксана Велика, Соломія Ляковська,
Ярослав Кусий**

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна*

Робота присвячена дослідженню динамічних процесів, що відбуваються при експлуатації нелінійних дискретно-неперервних механічних систем оброблення виробів – зміцнюючих пристроїв, пристроїв буріння тощо, а також різнопланових систем транспортування – найрізноманітніших конвеєрних ліній та установок, газових та нафтових трубопроводів, підвісних доріг, ліній електропередач тощо, в усіх машинах та механізмах де можуть

виникати різноманітні коливні явища як в позитивному та негативному аспекті. Дані дослідження проводяться методом побудови нелінійних математичних моделей опису руху цих систем у вигляді множин нелінійних диференціальних рівнянь та їх аналітичних і чисельних розв'язків. Отримані моделі враховують максимальну кількість вагомих по впливу фізико-механічних параметрів досліджуваних нелінійних систем, що дозволяє визначити оптимальні якісні та кількісні показники експлуатації, підвищити продуктивність та надійність функціонування систем. На основі побудованих математичних моделей проведено ряд теоретичних та експериментальних досліджень з виявлення впливу фізико-механічних параметрів досліджуваних систем (машин і механізмів) на характеристики різноманітних нелінійних коливних процесів, які можуть виникати у них (поперечні, поздовжні, крутильні, тощо), а саме – на амплітудні, амплітудно-частотні та амплітудно-фазові характеристики, з метою розроблення рекомендацій щодо вибору конструкцій та режимів експлуатації. Це уможливорює максимальне усунення негативних коливань, що можуть виникати під час роботи машин та пристроїв, підсилить оптимально дію та вплив позитивних коливних процесів, як рушійного чинника продуктивності та надійності їх функціонування.

Розроблений метод дослідження одночастотних коливань довгомірних систем дає можливість проаналізувати вплив поздовжньої швидкості руху та різної природи сил (зокрема періодичних), а також крайових умов на одночастотний динамічний процес. Отримані розрахункові формули дають можливість зробити такі висновки:

1) Якщо за лінійної постановки задачі частота (період) коливань гнучкої системи залежить лише від початкового натягу, густини, швидкості поздовжнього руху та крайових умов, то у нелінійній – як від вказаної вище низки параметрів, так і від амплітуди коливань, причому, зі зростанням амплітуди коливань частота зростає для жорстких систем, а для м'яких – спадає;

2) Стала швидкість руху системи у випадку усталеного динамічного процесу суттєво впливає на частоту коливань, а при резонансі нелінійні сили – на амплітуду коливань;

3) Із зростанням швидкості в усталеному процесі частота коливань системи спадає за певним законом;

4) Для резонансних коливань досліджуваних систем характерними є такі властивості:

- із зростанням швидкості поздовжнього руху явище резонансу проявляється за меншої частоти коливань;
- резонансне значення амплітуди із зростанням швидкості поздовжнього руху спочатку зростає, а потім спадає;
- резонансне значення амплітуди для залежить від сили натягу

системи, причому, із зростанням сили натягу зменшується.

5) За швидкостей руху системи, близьких до критичних, на резонансну амплітуду впливає лише початкове її значення та гармонічне збурення, причому, вплив гармонічного збурення проявляється меншою мірою, ніж початкове значення амплітуди.

За допомогою розробленого методу дослідження багаточастотних нелінійних коливань під час проходження перехідних процесів та одночастотних коливань рухомих систем за мішаних крайових умов виявлені такі закономірності динамічних явищ:

1) для режиму розгону довгомірних систем частоти власних їх коливань з часом спадають, причому швидкість спадання вищих частот є більшою. Для режиму гальмування має місце обернена залежність;

2) для лінійних моделей динамічних систем хвильові числа прямих хвиль під час періоду розгону зростають, а відбитих хвиль спадають; для режиму гальмування характерна обернена залежність;

3) для нелінійних моделей коливань гнучких елементів вагоміший вплив на спектр власних частот відіграє швидкість позовжнього руху порівняно з амплітудою коливань;

4) критичне значення швидкості, при якій відбувається зрив коливань, суттєво залежить від амплітуди тільки для вищих частот коливань, причому, із зростанням амплітуди критична швидкість спадає;

5) вплив амплітуд першої і третьої хвиль на критичне значення швидкості для першої основної частоти є незначним;

6) критичні значення швидкості для вищих основних частот суттєво залежать від амплітуд хвиль.

1. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Асимптотические методы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1995. – 396 с.
2. Сокил М.Б. Нелінійні моделі рухомих середовищ і аналітичні методи дослідження їх коливних процесів // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 3. – С. 62-65.

INVESTIGATION OF DYNAMIC PROCESSES IN NONLINEAR DISCRETE-CONTINUOUS MECHANICAL HANDLING AND TRANSPORTATION SYSTEMS

The dynamic processes of nonlinear discrete-continuous mechanical systems processing and transportation of products by developing appropriate set of nonlinear mathematical models describing their movement based on factors unification and parameterization for optimum modes of operation and maintenance of mechanical systems have been investigated.

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ХВИЛІ РЕЛЕЯ

Олена Хотенко

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова 3, м. Київ, 03057, Україна*

Проведений аналіз квадратично нелінійної хвилі Релея, що поширюється вздовж площини $x_3 = 0$ – границі розділу пружного матеріалу та вакууму. Пружний матеріал є ізотропним, напрямок поширення обирається вздовж осі Ox_1 , рух в середовищі не залежить від координати x_2 . Рівняння руху записуються через несиметричний тензор напружень Кірхгофа. Процес деформування пружного матеріалу описується пружним потенціалом Мурнагана у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3})^2 + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right\} + \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3}) \times \\ \times \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2 \right] + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + 2u_{1,1}u_{1,3}^2 + 2u_{1,1}u_{3,1}^2 + u_{1,3}u_{3,1} \times \right. \\ \left. \times (u_{1,1} + u_{3,3}) \right\} + \frac{1}{3} A \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{3}{4} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 (u_{1,1} + u_{3,3}) \right] + \\ + B (u_{1,1} + u_{3,3}) \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right] + \frac{1}{3} C (u_{1,1} + u_{3,3})^3.$$

У попередніх дослідженнях були отримані нові нелінійні хвильові рівняння. За допомогою методу послідовних наближень у рамках перших двох наближень знайдені їх розв'язки та проаналізована роль граничних умов. В задачі розрізняється три підходи: перший – загальний, що враховує геометричну і фізичну нелінійність; другий – підхід, що враховує лише геометричну та нехтує фізичною нелінійністю; третій – підхід, що враховує лише фізичну нелінійність та нехтує геометричною нелінійністю. Також були розглянуті випадки нехтування перехресним впливом переміщень та потенціалів. Розв'язки для усіх описаних випадків та підходів знайдені в універсальному вигляді та відрізняються лише виглядом коефіцієнтів.

Отримано нове рівняння для знаходження хвильового числа або фазової швидкості хвилі Релея – рівняння Релея.

Дане дослідження зосереджене на числовому аналізі отриманих результатів. Було проведено комп'ютерне моделювання процесу поширення хвиль для різних матеріалів та різних значень

початкової амплітуди потенціалів і частоти. Для розв'язання цієї багатопараметричної задачі, параметри, що описують фізико-механічні властивості матеріалів (густина та 5 пружних сталей) були зафіксовані вибором 9 конкретних пружних матеріалів різних типів (метали, полімери, скло). Щодо двох інших параметрів (початкова амплітуда та частота) – обиралися певні дискретні значення, що були однаковими для всіх матеріалів (4 значення початкової амплітуди та 7 значень частот).

Аналіз впливу нелінійності на затухання та на поширення виконано окремо, але зафіксовані спільні тенденції, що при малих значеннях початкової амплітуди та частоти вплив другої гармоніки майже відсутній, тому її поширення та затухання описується так само, як і для лінійної хвилі. При поступовому зростанні їх значень починають проявлятися різні нелінійні ефекти, що описані в дослідженні (для поширення: асиметрія та крен піку, плато, роздвоєння піку та сильні нелінійні спотворення, а також зміна форми обвідної кривої хвилі; для затухання: вигин, перегин, зміна знаку). В дослідженні додатково проведено ряд розрахунків для виявлення частот, на яких починають проявлятися усі згадані ефекти. Виявлені закономірності та послідовність їх появи, виявлено, що для кожного матеріалу набір ефектів залишається сталим, а зі збільшенням початкової амплітуди різко зменшується частота, на якій вони починають проявлятися. Усі значення частот занесені до таблиць, та наведені рисунки для ілюстрації виявлених ефектів.

1. *Рущицький Я.Я., Хотенко Е.А.* О волне Рэлея в квадратично нелинейном упругом материале (модель Мурнагана) // Прикладная механика – 2011. – 47, N 3. – С. 50-58.
2. *Рущицький Я.Я., Хотенко О.О.* Наближені розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, що описують пружні поверхневі хвилі Релея // Доповіді НАН України. – 2012. – №1. – С. 64-69.
3. *Rushchitskyi J.J., Khotenko E.A.* On the role of boundary conditions in the nonlinear analysis of a Rayleigh wave // International Applied Mechanics – 2012. – 48, N 3. – С. 305-318.
4. *Khotenko E.A.* Numerical analysis of a nonlinear elastic Rayleigh wave // International Applied Mechanics – 2012. – 48, N 6. – P. 719-726.
5. *Khotenko O.O.* Analysis of the effect of the initial amplitude on the nonlinear elastic Rayleigh wave attenuation // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – 2012. – 4. – P. 73-76.

NUMERICAL ANALYSIS OF QUADRATICALLY NONLINEAR RAYLEIGH WAVE

A plane problem of the quadratically nonlinear elastic Rayleigh wave propagation is studied in the classical statement. The constitutive relations correspond to the nonlinear Murnaghan potential. The main findings are related

to the initial amplitude effect on the nonlinear elastic Rayleigh wave attenuation are presented.

УДК 539.3

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНАМИ ОТВОРІВ ТА ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Шопа Тетяна

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна*

В даній роботі узагальнено результати, які отримані в працях [1-4]. Розглянуто задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини, яка містить одночасно N отворів та абсолютно жорстких включень довільної форми та розташування. Серед них є N_1 включень, які взаємодіють з панеллю через тонкі пружні прошарки типу Вінклера, N_2 включень, які жорстко з'єднані з панеллю, та N_3 , які є шарнірно оперті. Панель також містить N_4 отвори, на контурах яких задано компоненти переміщень, N_5 отворів, на контурах яких задано компоненти зусиль, та N_6 отворів, на контурах яких задано комбінації компонент переміщень та зусиль. Коефіцієнт жорсткості пружного прошарку може бути різним для кожного включення, а також може бути змінним вздовж кожного з контурів включень. Товщиною пружних прошарків нехтуємо. На включення діють сили з головним вектором, який є нормальним до серединної поверхні панелі і прикладений в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснюють поступальний рух вздовж нормального напрямку до серединної поверхні панелі. Зовнішня границя панелі є також довільної форми, на частинах якої задано різні типи крайових умов, як і на контурах отворів.

Для опису деформування панелі використано рівняння, які враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом колокацій.

Використовуючи побудовані в роботі лінійні алгебраїчні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних мішаних

випадків крайових умов на зовнішній границі панелі та контурах отворів, розглядаючи довільні комбінації амплітуд компонент переміщень та зусиль. Також дозволяються довільні різні мішані крайові умови на всіх складових частинах зовнішньої границі та контурах отворів. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення границі у випадку анізотропних матеріалів. В рамках побудованого розв'язку можна розглядати випадки зовнішньої границі панелі та контурів отворів та включень з кутовими точками. Однак у випадку контурів з кутовими точками використовуємо нерівномірне розбиття в схемі методу колокацій з досить сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв'язків. А для розв'язку рівнянь Фредгольма першого роду використовуємо стабілізовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. Запропонована в роботі схема дає розв'язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових випадків, отриманими іншими методами.

1. Шона Т.В. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації // Вісник ТНТУ. – 2012. № 3. – С. 63-74.
2. Шона Т.В. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації з пружними прошарками // Вісник ТНТУ. – 2013. № 1. – С. 71-84.
3. Шона Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. – Львів, 2013. – Т.2. – С. 187-188.
4. Shopa T. Vibration of orthotropic double curvature panel with a set of cutouts of arbitrary configuration // 19th International Congress on Sound and Vibration (ICSV 19) (4 Vols) – Red Hook (New York, USA): Curran Associates, Inc., 2013. – Vol. 2. – P. 1171-1179.

VIBRATION OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED PANEL WITH SETS OF CUTOUTS AND INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION

In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic doubly curved panel with the arbitrary number of cutouts and rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. Inclusions have different types of interaction with the panel. The case of the translational motion of the inclusions along the normal direction to the middle surface of the panel is investigated. External boundary of the panel is of the arbitrary geometrical configuration. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered, both on the external boundary of the panel and on the contours of the cutouts. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method. The sequential approach to the representation of the Green's functions is used. Integral equations are solved by the collocation method.

RUNNING AUTO-WAVES IN FRACTIONAL ORDER DISSIPATIVE SYSTEMS

Bohdan Datsko, Igor Podlubny, Vitaliy Meleshko

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova Str., 3-B, Lviv, 79060, Ukraine;*

*Technical University of Kosice,
B. Nemcovej 3, 04200 Kosice, Slovak Republic*

In recent years, there has been an increasing interest in the study of dynamical mathematical models with fractional derivatives. This interest is mainly determined by the attempts to understand phenomena in granular, porous, fractal and other complex inhomogeneous media, where diffusion has an anomalous nature. The anomalous diffusion is caused by specific random processes and classical mathematical models are not sufficient to reflect the even basic features of such systems (see for example [1–3] and references therein). Modern experimental investigations prove that nature of many complex heterogeneous media can be more adequate described by mathematical models with fractional derivatives. Moreover, such models essentially enlarge the family of dynamical systems and leads to the formation of the new scientific direction – fractional dynamics [4].

In the present work, we have investigated the properties of solitary auto-waves in fractional reaction-diffusion systems (RDS). As an example, we consider the generalized time-fractional FitzHugh-Nagumo model

$$\tau_u \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = l^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + W(u, v, A), \quad (1)$$

$$\tau_v \frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial t^\alpha} = Q(u, v, A), \quad (2)$$

which in classical case describes the propagation of the pulse in a neuronal network. Here u is a fast activator variable and v is a slow inhibitor one, τ_u, τ_v and l are characteristic times and diffusion length of the system, $0 \leq x \leq L_x$, L_x is the system length, A is an external parameter, $W(u, v, A)$, $Q(u, v, A)$ are nonlinear functions. The fractional derivatives of order $\alpha \in \mathbb{R}_+$ are understood in the Caputo sense:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+m-1}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in N. \quad (3)$$

For a integer order RDS, solitary nonlinear waves have been studied for many years and called auto-waves or autosolitons[4]. For fractional RDS, the investigation of solitary nonlinear auto-waves remains an open problem. Moreover, last time auto-waves phenomena were experimentally revealed in such complex systems as living cells and living tissues, where diffusion has a substantially anomalous nature. Due to these facts our investigation has a great theoretical as well as applied interest.

The purpose of this work is to analyze a travelling wave solution in base model and to establish the main characteristic features of solitary travelling auto-waves in fractional RDS of the general type. We have investigated nonlinear auto-wave solutions, which appear in the stability region of the fractional reaction-diffusion systems and can coexist with homogeneous system states. It was shown that in fractional RDS solitary auto-wave solutions can exist in a wide range of system parameters, including the order of the fractional derivatives. Using the Fourier transform of fractional derivative for small perturbations $\delta u(x,t)$, $\delta v(x,t)$ we have obtained the dependence for group velocity of perturbations in the form of plane waves

$$c_g = \frac{\omega(k)}{\alpha \omega_0(k)} \frac{d\omega_0(k)}{dk}, \quad (4)$$

where $(i\omega)_\pm = \gamma(k) \pm i\omega_0(k)$, $\omega_0(k) = \sqrt{\det F(k) - tr^2 F(k)/4}$, $\gamma(k) = tr F(k)/2$, $F(k)$ is the linearized right hand side of the system (1), (2). Obtained formula characterizes the tendency of change of running auto-wave velocity in fractional RDS on dependence from fractional order of the system.

In our study it is established that a variation of the fractional system order may qualitatively and quantitatively change the conditions for formation and the main characteristics of running auto-waves in comparison with their analogues in systems with integer derivatives. We have demonstrated and explained these new properties of the solitary auto-wave solutions by a linear stability analysis as well as the numerical simulation.

1. *I. Podlubny* Fractional differential equations, Academic Press, 1999 – 368 p.
2. *F. Mainardi* Fractional Calc. and Waves in Viscoelasticity, World Sci., 2010 – 365 p.

3. V. Tarasov Fractional dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, Springer, 2010 – 504 p.
4. B.S. Kerner and V.V. Osipov Autosolitons, Kluwer, 1994 – 671 p.

БІЖУЧІ АВТОХВИЛІ В ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМАХ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Досліджено розв'язки автосолітонного типу в узагальнених системах реакції-дифузії з похідними дробового порядку. Показано, що нелінійні біжучі автохвильові розв'язки, які виникають в області стійкості рівноважного стану системи, можуть існувати в широкому діапазоні параметрів і для узагальненої системи, включаючи порядок дробової похідної. На основі лінійного аналізу та комп'ютерного моделювання пояснено нові властивості автохвиль в системах дробового порядку.

УДК 539

CONSTRUCTIONS DYNAMIC PARAMETERS IDENTIFICATION BY MEANS OF ELASTICALLY ATTACHED MASSES

**Bohdan Diveyev, Yevhen Martyn, Gennadij Cherchyk,
Ihor Dorosh**

*Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, Lviv, 79070, Ukraine;*

*Karpenko Physiko-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine;
Naukova Str., 5, Lviv, 79060, Ukraine;*

*Lviv PE "Dora", Lviv
Gorodots'ka Str., 197, Lviv, 79015, Ukraine*

Dynamic vibration absorber (DVA) is found to be an efficient, reliable and low-cost suppression device for vibrations caused by harmonic or narrow-band excitations. It is important to find the constructions dynamic parameters at points of DVAs attachment.

In the classical theory of DVA, the primary structure is modelled as a spring-mass system. However, other models also have high interesting research and engineering application. Methods of decomposition and numerical synthesis are considered on the basis of the adaptive schemes. A technique is developed to give the optimal DVA's for the elimination of excessive vibration in sinusoidal forced systems.

Although some parameters of DVA and constructions can be determined by experiments, but some, such as basic system mass m_1 remains unknown in equations ([1-4]). For a more precise definition of the model parameters was conducted several additional experiments (for the definition of parameters m_1 , k_1 – mass and stiffness of the

primary system). At the same time DVA parameters m_A , k_A requires refinement. Although its can be calculated more accurately than the basic parameters of the system, yet it takes a lot of effort both in determining of the elastic properties of DVA and it clamping plate. Although you can conduct a detailed theoretical analysis [5], but based on a series of simple experiments can be quite accurately determine these parameters as integrated value included in the system of equations. Originally let us show the correctness of these schemes. Fig. 1 shows the frequency deviation map centered on values, depending on the changes of parameters m_1 , k_1 :

$$R = |f(m_{10}, k_{10}) - f(m_{1i}, k_{1i})|, \quad \begin{aligned} m_{1i} &= m_{10} (i - N / 2), i = 1, \dots, N, \\ k_{1i} &= k_{10} (i - N / 2), i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

As the device is designed to test we are using our DVAs. For this series of experiments kinematic DVA perturbation for its different masses are performed. Values of first eigen-frequencies were obtained for different masses m_A located at the edge of the DVA plate. We see that the basic system parameters are determined uniquely. To determine all the parameters k_1 , m_1 , m_A , k_A we should apply a genetic method to minimize the objective function $F_c = \sum_i |f_T(M_i) - f_e(M_i)|$, where $f_T(M_i) = f_T(M_i, k_1, m_A, k_A)$ theoretically obtained values of natural frequencies (first eigen-frequencies), $f_e(M_i)$ – experimental values.

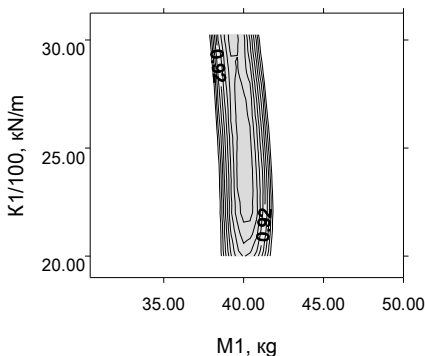


Fig. 1. The amount of frequencies deviations R maps centered values depending on the change of parameters k_1 , m_1

The main role in mechanical properties identification plays the topology of difference function set. The unique solution exists only

when this set is convex. For the standard dynamic tests eigen-frequencies are the most usual scheme, as be shown below, it is wrong. This dynamic test must be complicated and the special experiments must be added. The bases of these experiments are the same dynamic vibration absorbers. The first eigen-frequencies are calculated and obtained experimentally for different masses attached to elastic elements of the dynamic vibration absorbers. The one-digit values are established not only for the dynamic vibration absorber parameters, but also for mechanical parameter of base structure in connection points of the dynamic vibration absorbers. The results may be highly improved by applying the genetic algorithms for optimal design searching by discrete-continuum DVA's system – base system modelling.

1. *Den Hartog, J. P.* (1956), *Mechanical Vibrations* (4th edition) Mc Graw-Hill, New York. *S. Timoshenko, Vibration Problems in Engineering*, third ed., Van Nostrand Company, New York, 1955.
2. *S. Timoshenko* *Vibration Problems in Engineering*, third ed., Van Nostrand Company, New York, 1955.
3. *Diveyev Bohdan, Vikovych Igor, Dorosh Ihor, Kernytskyi Ivan.* Different type vibration absorbers design for beam-like structures. Proceeding of ICSV19, Vilnius, Lithuania, July 08-12, 2012.
4. *Nykolyshyn M.M., Diveyev B.M., Smolskyi A.H.* Frequency characteristics of elastically fastened cantilever laminated beams. *Journal of Mathematical Sciences* (2013) 194 270-277.

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА
ДОПОМОГОЮ ПРУЖНО ПРИСІДНАНИХ МАС**

УДК 517.519: 517.96

**MATHEMATICAL MODELLING OF NONLINEAR DYNAMICS
IN BRUSSELEATOR MODEL WITH SUPER-DIFFUSION**

Vitaliy Meleshko, Zoya Prytula, Bohdan Datsko

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova Str., 3-B, Lviv, 79060, Ukraine*

Investigation of the reaction-diffusion (RD) systems in the last decades has changed understanding of the nonlinear phenomena in many complex systems [1, 4]. Observations of different spatially nonhomogeneous patterns with complicated symmetries in many physical,

chemical and biological media have made RD models the subject of numerous investigations.

In the recent years, many scientists have considered that diffusion in real systems of nature has anomalous character [2]. Although in the majority examples a degree of anomaly is insignificant, a set of such complex systems, as composite or amorphous materials, complex micro-emulsions and living tissues require development of the models in which substantial anomalousness of diffusion has to be taken into account. Investigation of super-diffusion becomes important because it has been detected experimentally in several systems, such as porous, granulate and biological media. Therefore, studying of the fractional RD has a great interest.

In our work we will show that even the simplest fractional RD system possesses an extraordinarily complex dynamics. We investigate the Brusselator model with superdiffusion which generalizes the classical model in which the derivatives of integer order are replaced by space fractional derivatives

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta^\alpha u + A - (B+1)u + u^2 v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \Delta^\alpha v + Bu - u^2 v.$$

Here u is an activator variable and v is inhibitor one, D_1, D_2 are diffusion coefficients, A, B are external parameters and α is order of fractional derivative ($1 < \alpha < 2$). We consider the fractional derivative in Riemann-Liouville sense [5]

$$\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{f(\xi, t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi, \quad 1 < \alpha < 2.$$

The effect of superdiffusion on Turing pattern formation in the Brusselator model firstly was studied in [3]. In this article, through linear stability analysis and numerical simulations, a stationary Turing pattern formation is investigated. It was shown that unlike to the case of normal diffusion, the Turing instability in fractional order systems can occur even when diffusion of the inhibitor is slower than that of the initiator.

In our work, we have focused on fractional RD model under conditions, when sufficiently complex spatial-temporal patterns arise in the system dynamics. By linear stability analysis and computer simulation, it was shown that fractional derivative order can change the stability of steady state solutions and significantly enrich nonlinear system dynamics. It was analyzed the spectrum of eigenvalues of

linearized system and designed the instability domains. On the basis of obtained results we have investigated the evolution of the instability domains depending on the order of fractional derivative. It was shown that the order of fractional derivative may qualitatively change the instability conditions and nonlinear dynamics of basis RD systems with space fractional derivatives.

In contrast to a standard RD system with integer derivatives, the fractional RD system possesses new properties connected with the value of fractional derivative index. A fractional derivative order can substantially change the eigenvalue spectrum and significantly enrich the nonlinear dynamics in RD systems. The fractional derivative index plays a crucial role in pattern formation because conditions of bifurcations depend substantially on its value.

1. Britton N. F. Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology. – Academic Press, London, 1986.
2. Carcione J. M., Sanchez-Sesma F. J., Luzon F. and Gavilan J. J. P. Theory and simulation of time-fractional fluid diffusion in porous media // J. Phys. A: Math. Theor. – 2013. – **46**, 345501 (23 pp.).
3. Golovin A. A., Matkowsky B. J., and Volpert V. A. Turing pattern formation in the Brusselator model with superdiffusion // J. Appl. Math. – 2008. – Vol. 69, No. 1. – P. 251-272.
4. Nicolis G., Prigogine I. Self-organization in Non-equilibrium Systems. – Wiley, New York, 1977.
5. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – Academic Press, San Diego, 1999. – 340 p.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ В МОДЕЛІ БРЮССЕЛЯТОРА ІЗ СУПЕРДИФУЗІЄЮ

Досліджено розв'язки в моделі брюсселятора із супердифузією, в якій класичні просторові диференціальні оператори замінені їх дробовими аналогами. Проведений лінійний аналіз стійкості, а також результати комп'ютерного моделювання показали, що порядок дробової похідної якісно змінює умови нестійкості та нелінійну динаміку базових систем реакцій-дифузії з похідними дробового порядку. Показано, що дробовий порядок принципово впливає на формування нелінійних розв'язків системи, так як умови нестійкості залежать від його значення.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Азізов Талят	177
Андрейків Олександр	232
Андрійчук Роман	234
Антоненко Ніна	237
Асташкін Володимир	57, 112, 206
Афанасьєва Ольга	239

Б

Базилевич Любов	184
Барняк Михайло	329
Бас Віктор	300
Бедрій Василь	242
Бєлова Ольга	244
Білуцак Юрій	17
Бобик Богдан	198
Боженко Богдан	19, 22
Божидарнік Віктор	278
Бойко Андрій	268
Бойчук Юрій	165
Босняков Сергей	200
Брухаль Мар'ян	92
Будз Степан	112, 206
Бурик Олександр	113
Бутрак Іванна	331, 333
Бычкова Татьяна	64

В

Вайсфельд Наталія	24
Васьо Наталія	167
Васюник Зоряна	335
Васюник Іван	150
Васюник Марія	150
Васюта Ростислав	246
Велика Оксана	393
Величкович Андрій	216
Вестяк Владимир	26
Вільданова Надія	177
Власій Олеся	29
Вовк Оксана	142
Войтко Мирон	370

Г

Гаврись Олександр	173
Гасвська Любов	90
Галазюк Віталій	159
Гарт Етері	43
Гачкевич Микола	31

Гачкевич Олександр	33, 35, 37, 39
Глобчак Михайло	373
Глухов Юрій	337
Гончарук Володимир	102
Горун Олег	148
Горячко Тарас	339
Григоренко Олександр	341
Грицина Ольга	41
Гудрамович Вадим	43
Гуменчук Орест	46
Гуртовий Олексій	248, 251

Г

Гаск Максиміліан	35, 94
----------------------------	--------

Д

Давидок Анастасія	102
Демидюк Мирослав	202
Дзюба Анатолій	179, 244
Дзюбик Андрій	184
Дзюбик Людмила	204
Дівєєв Богдан	373
Діхтяренко Юлія	253
Доля Олена	377
Дробенко Богдан	112, 113, 206
Дудик Михайло	255, 256
Дякон Валерій	253

Є

Євдокимов Іван	275
Єрохова Ольга	227

Ж

Жбадинський Ігор	333
Жук Дмитро	248
Жук Ярослав	343
Журавльова Зінаїда	24

З

Звізло Іван	290
Земсков Андрей	48

И

Ивасько Роман	51
-------------------------	----

І

Іванків Катерина	345
----------------------------	-----

Івантишин Наталія	257
Івасько Наталія	259
Ірза Євген	33, 53

К

Казарян Карен	51, 90
Калиняк Богдан	181
Калоєров Стефан	55
Камінський Анатолій	261
Карнаухов Василь	115
Кирилова Ольга	350
Киричок Іван	115
Кіпніс Леонід	255, 261
Кіт Григорій	234, 259
Клім Богдан	313
Клименко Дмитро	66
Козакевич Тереза	35, 57
Козачок Олег	263
Козлов Володимир	115
Козярська Анна	53
Колодій Юрій	194
Кравець Володимир	265
Кравчишин Оксана	352
Крива Надія	268
Кривий Олександр	271
Крутий Юрій	354
Кузь Ігор	273
Кузь Ольга	273
Кузьменков Дмитрій	68, 128
Кунець Ярослав	356, 358
Куреннов Сергей	59
Куриляк Дозислав	359, 370
Куротчин Леся	286
Курпа Лидія	361
Курпа Лідія	363
Кусий Ярослав	393
Кухар Володимир	232
Кушнір Роман	37, 60

Л

Лаушник Ігор	366
Левін Віктор	62
Лесик Оксана	339
Лещук Олександр	275
Лисечко Віктор	359
Литвин Богдан	202
Лісничук Андрій	257, 310
Лоза Ігорь	341
Лопух Назар	152
Лотохова Олена	179

Лохов Валерій	208, 214
Луковський Іван	118, 329
Лясковська Соломія	393

М

Мазнев Олександр	64
Маковійчук Микола	277
Максимович Олеся	278
Максимук Олександр	281, 315
Малець Романна	124
Мариновіч Анджей	46
Мартиняк Ростислав	306
Марчук Михайло	66, 368
Марьина Наталія	128
Мастикаш Любов	126
Матус Валерій	356, 358
Махоркін Ігор	126
Махоркін Микола	283
Метельські Анджей	53
Михаськів Віктор	333, 366
Мітраков Володимир	62
Міщенко Віктор	356
Можаровський Валентин	68, 128
Можаровський Валентин	33, 46
Моїсенко Ігор	71
Мселати Абдуфтах Фрхат	200
Муліцка Івона	31, 104
Мусій Роман	73, 75

Н

Нагірний Тарас	78, 80
Назарчук Зіновій	370
Немировський Юрій	82, 210
Николишин Мирон	184, 283, 286, 373
Ніколаєв Олексій	130, 132
Носок Віталій	375
Няшин Юрій	208, 214

О

Оксенчук Ніна	377
Онишкевич Володимир	288
Онишко Любов	379
Онишко Олексій	19, 22
Опанасович Віктор	286, 290, 292, 317
Осетров Андрій	382
Осечко Анатолій	379
Осів Ярема	265
Острик Володимир	294

П

Пакош Віра	339, 368
Пастернак Роман	134
Пастернак Ярослав	134, 320
Перепічка Василь	384
Петров Олександр	135
Пиз Назарій	273
Подворний Андрій	191
Поліщук Олександр	137, 140
Поліщук Тетяна	261
Попадюк Ігор	216
Попіль Оксана	159
Попов Всеволод	385
Попович Василь	37, 142, 153
Пороховський Василь	356
Постолак Леся	196
Почапський Євген	313
Притула Назар	387
Прокопало Євген	179
Прокопишин Ігор	296
Процюк Борис	86, 146, 148
П'янило Ярослав	150, 152

Р

Рабош Роман	358
Равска-Скотнічни Анна	39, 57
Ракоча Ірина	153
Ревенко Віктор	88
Реут Віктор	298
Роговський Станіслав	298
Рудавський Денис	300
Рябоконт Сергій	43

С

Савельєва Єкатерина	186
Саврук Михайло	303
Самодуров Андрей	55
Сафронова Інга	218
Сачук Юрій	281
Сеник Юлія	78
Сенченков Ігор	219, 377
Сеньків Леся	188
Сердюченко Анатолій	389
Середницька Христина	306
Сибіль Юрій	308
Силованок Віктор	310
Симчук Ярослав	186
Синчило Сергей	186
Синюта Володимир	86
Сімакович Олександр	313

Скальський Валентин	313
Скородинський Ігор	315
Слободенко Тетяна	366
Слободян Богдан	263
Слободян Микола	290, 292
Солодяк Михайло	90
Соляр Тетяна	391
Станік-Бєслер Аніда	22
Станик-Бєслер Аніда	51
Стасюк Богдан	156
Стасюк Галина	73, 75
Стеблянко Павло	135
Сторожев Валерій	71, 375
Сулим Георгій	134, 159, 288, 317, 320
Сухорольський Михайло	160

Т

Танчік Євген	130, 132
Тарасюк Уляна	373
Тарлаковский Дмитрий	26, 48, 239
Тарлаковский Дмитро	73, 90
Твардовська Софія	152
Терлецький Ростислав	92, 94
Тимченко Галина	361
Тинчук Сергій	251
Токова Людмила	190
Токовий Юрій	60
Томашівський Михайло	320
Топільницький Володимир	393
Трач Володимир	191
Тріщ Богдан	31
Тропин Василій	208
Турій Оксана	92, 94
Турчин Ігор	96, 194
Тучапський Роман	98

Ф

Федорова Наталія	82
Федотенков Григорій	239
Феньків Володимир	256
Фесенко Ганна	163

Х

Хазін Геннадій	256, 261
Харченко Володимир	66, 368
Хвастек Анна	19
Хома Василь	96
Хом'як Леонід	99
Хом'як Микола	66, 99
Хотенко Олена	396

Ч

Чекурін Василь	165, 167, 196, 352
Червінка Костянтин	80
Червінко Ольга	219
Чернуха Ольга	29, 102
Черняков Юрій	135, 321
Чиж Анатолій	169
Чорненький Андрій	303
Чумак Костянтин	263
Чупик Ігор	39, 104

Ш

Шацький Іван	216
Швець Роман	198
Шевельова Алла	321
Шевченко А.	321
Шевчук Віктор	171, 173
Шевчук Павло	173
Шимчак Юзеф	75
Шинкаренко Георгій	124
Шматко Тетяна	363
Шопа Василь	216
Шопа Тетяна	398

Щ

Щербакова Юнна	175
--------------------------	-----

Ю

Юхим Роман	310
----------------------	-----

Я

Яворська Надія	232
Ядзак Михайло	221
Якименко Сергій	219
Якімов Федір	339
Янковський Андрей	224
Ясінський Анатолій	190, 227
Яцик Ігор	317
Яцків Олесь	198

А

Aizikovitch Sergey	109
------------------------------	-----

В

Berbyuk Victor	229
--------------------------	-----

С

Cherchyk Gennadij	402
-----------------------------	-----

Д

Datsko Bohdan	400, 404
Demyduk Myroslav	229
Diveyev Bohdan	402
Dorosh Ihor	402

Ф

Farukh F.	324
-------------------	-----

Ж

Jiang R.	324
------------------	-----

К

Kazberuk Andrzej	107
----------------------------	-----

Л

Labesse-Jied F.	326
Lapusta Y.	326
Loboda V.	326
Lozynskyy Yuriy	109
Lytwyn Bohdan	229

М

Ma Chien-Ching	109
Martyn Yevhen	402
Meleshko Vitaliy	400, 404

Р

Podlubny Igor	400
Prorentner D.	324
Prytula Zoya	404

Р

Reed P.	324
Rushchitsky Jeremiah	106

С

Savruk Mykhaylo	107
Shollock B.	324

Т

Tokovy Yuriy	109
------------------------	-----

В

Viun O.	326
-----------------	-----

З

Zhao L.G.	324
-------------------	-----

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Математичні проблеми механіки неоднорідних структур

Наукові праці

*Комп'ютерна верстка та технічне редагування
Романа Іваська та Оксани Турій*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060
тел.: +380 (32) 263-83-77, **факс:** +380 (32) 263-62-70
E-mail: conference@iapmm.lviv.ua, **http:** www.iapmm.lviv.ua

Підписано до друку _____. Формат $60 \times 84/_{16}$.
Гарнітура Journal. Ум. друк. арк. 32.80. Зам. № _____. Наклад 130

Видруковано у Дослідно-видавничому центрі
Наукового товариства ім. Шевченка
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 884 від 04.04.2002