ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО КЛИНУ

Наталя Вайсфельд[1], Зінаїда Журавльова[2]

[1]Королівський Колледж, м. Лондон, natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk
[2]Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса, z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглянуто задачу поропружності для півнескінченного клину $(0<r<\infty,\ \ 0<\varphi<\omega,\ \ 0<z<h)$, верхню грань якого навантажено так:

$$\sigma_z\big|_{z=0}=L(r,\varphi),\quad \tau_{zr}\big|_{z=0}=R(r,\varphi),\quad \tau_{z\varphi}\big|_{z=0}=T(r,\varphi),\quad p\big|_{z=0}=P(r,\varphi). \tag{1}$$

Тут $p(r,z)$ – тиск рідини, що знаходиться у порах клину, $\sigma_z,\tau_{zr},\tau_{z\varphi}$ – нормальне та дотичні напруження клина, залежні від (r,φ,z).

Бічні грані $\varphi=0$, $\varphi=\omega$ клина перебувають в умовах ідеального контакту та є непроникними [1]:

$$v\big|_{\varphi=0,\omega}=0,\quad \tau_{\varphi r}\big|_{\varphi=0,\omega}=0,\quad \tau_{\varphi z}\big|_{\varphi=0,\omega}=0,\quad \partial p/\partial\varphi\big|_{\varphi=0,\omega}=0, \tag{2}$$

а нижня грань $z=h$ є проникною та жорстко закріпленою [2]:

$$u\big|_{z=h}=0,\quad v\big|_{z=h}=0,\quad w\big|_{z=h}=0,\quad p\big|_{z=h}=0, \tag{3}$$

де u,v,w – переміщення твердого каркасу шару, залежні від (r,φ,z).

Потрібно знайти переміщення та напруження твердого каркасу та тиск рідини у клині, що задовольняють умови (1) – (3) та рівняння рівноваги [3]

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}u-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+ \\
+\frac{2}{\kappa-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}u+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}\right]-\frac{\alpha}{G}\frac{\partial p}{\partial r}=0, \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}v+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+ \\
+\frac{2}{\kappa-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\partial z}\right]-\frac{\alpha}{G}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=0, \qquad (4) \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{2}{\kappa-1}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\partial z}\right]-\frac{\alpha}{G}\frac{\partial p}{\partial z}=0, \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{\alpha}{k}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]-\frac{S_p}{k}p=0,
\end{gathered}$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ – стала Мусхелішвілі, μ – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт Біо, G – модуль зсуву, S_p – пам'ять простору пор, k – коефіцієнт проникності.

До вихідної задачі застосовано перетворення Фур'є за змінною φ :

$$\begin{bmatrix} u_\gamma(r,z) \\ v_\gamma(r,z) \\ w_\gamma(r,z) \\ p_\gamma(r,z) \end{bmatrix} = \int_0^\omega \begin{bmatrix} u(r,\varphi,z)\cos\gamma\varphi \\ v(r,\varphi,z)\sin\gamma\varphi \\ w(r,\varphi,z)\cos\gamma\varphi \\ p(r,\varphi,z)\cos\gamma\varphi \end{bmatrix} d\varphi, \quad \gamma = \gamma_n = \frac{\pi n}{\omega}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Замість двох переміщень уведено дві нові функції $W_{1,\gamma} = u_\gamma + v_\gamma, W_{2,\gamma} = u_\gamma - v_\gamma$. До крайової задачі у трансформантах (5) застосовано півнескінченне перетворення Ганкеля за змінною *r*.

У результаті отримано одновимірну крайову задачу у просторі трансформант. Цю задачу сформульовано у векторному вигляді, її аналітичний розв'язок побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення [4]. Застосування формул обернення інтегральних перетворень завершує побудову точного розв'язку вихідної задачі.

Дослідження підтримано грантами Horizon 2020 Grant Agreement number 101008140 EffectFact "Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications", Royal Society Wolfson Visiting Fellowship R3/233003, стипендією Кабінету Міністрів України для молодих вчених.

1. *Kubik J., Kachmaryk M., Chaplya E.* Methods for the determination of the characteristics of porous saturated media // Materials Science. – 2001. – **37**. – P. 92–102.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of the coupled processes in nanoporous bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – **12**, No. 3. – P. 196–203.
3. *Cheng A. H.-D.* Poroelasticity. – Cham: Springer, 2016. – 877 p.
4. *Попов Г. Я.* Точні розв'язки деяких крайових задач механіки деформованого твердого тіла. – Одеса: Астропринт, 2013. – 424 с.

SPATIAL POROELASTICITY PROBLEM FOR A SEMI-INFINITE WEDGE

A spatial poroelasticity problem is formulated for a semi-infinite pie-shaped wedge. It is solved analytically with the help of the Fourier and Hankel integral transforms, and the matrix differential calculation apparatus.