ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ПОЛЕ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРІ ЗІ СФЕРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Наталя Вайсфельд[1], Юрій Процеров[2], Андрій Толкачов[3]

[1]Королівський Колледж, м. Лондон, natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk,
[2,3]Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса,
[2]protserov@onu.edu.ua, [3]andr.tolkach@gmail.com

Пружна рівновага півпростору з порожнинами розглядалася багатьма авторами [1, 2]. У зв'язку з великою кількістю практичних застосувань потреба в точних розв'язках такого класу задач залишається актуальною.

Тут у сферичній системі координат розглянуто пружний простір (μ – коефіцієнт Пуасона, G – модуль зсуву), що містить сферичну порожнину радіуса R з центром у початку координат. З боку порожнини до пружного простору прикладено осесиметричне нормальне навантаження інтенсивності $f(\theta)$ на ділянці $r = R,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \alpha$. У безрозмірних координатах (ρ, θ, φ), де $\rho = r / R$, з урахуванням осьової симетрії, задачу сформульовано для переміщень $u = u_\rho(\rho, \theta)$ і $v = u_\theta(\rho, \theta)$ у вигляді системи рівнянь Ляме

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - 2u + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) -$$

$$(2+\mu_0)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(v\sin\theta)}{\partial\theta} + \mu_0 \frac{\rho}{\sin\theta}\frac{\partial}{\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \mu_*\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \frac{v}{\sin^2\theta}\right] + \mu_0\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + 2\mu_*\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$$

в області $1 < \rho < \infty,\ \ 0 \le \theta \le \pi$, де $\mu_0 = 1/(1-2\mu),\ \ \mu_* = 1 + \mu_0$ за виконання крайових умов

$$\sigma_\rho\big|_{\rho=1} = 2G\left[-\frac{\mu_*}{2}\frac{\partial u}{\partial\rho} + 2\frac{\mu\mu_0}{\rho}u + \frac{\mu\mu_0}{\rho\sin\theta}\frac{\partial(v\sin\theta)}{\partial\theta}\right]_{\rho=1} = \begin{cases} Rf(\theta), & 0 \le \theta \le \alpha, \\ 0, & \alpha \le \theta \le \pi, \end{cases}$$

$$\tau_{\rho\theta}\big|_{\rho=1} = G\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{v}{\rho}\right]_{\rho=1} = 0$$

та умов спадання на нескінченності, коли $\rho \to \infty$.

До рівнянь Ляме та крайових умов застосовано інтегральне перетворення Лежандра за змінною θ

$$\begin{bmatrix} u_n(\rho) \\ v_n(\rho) \end{bmatrix} = \int_0^\pi \begin{bmatrix} u(\rho,\theta)P_n(\cos\theta) \\ v(\rho,\theta)P_n^1(\cos\theta) \end{bmatrix} \sin\theta d\theta, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

з оберненнями $u=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\rho)(2n+1)P_n(\cos\theta),\quad v=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(\rho)\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n^1(\cos\theta)$.

У просторі трансформант отримано одновимірну крайову задачу

$$\sigma_\rho=\frac{f_0}{2\rho^3}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nf_n}{\Delta_n\rho^{n+1}}\left\{a_{22}\left[\frac{n-1-\mu_*(n+1)}{2n-1}(\mu_*n-4\mu\mu_0)+2\mu\mu_0(n+1)\frac{\mu_0n-2\mu_*}{2n-1}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{n+1}{n}\frac{n+2-\mu_*n}{2n+3}\frac{4\mu\mu_0-\mu_*(n+2)}{\rho^2}+2\mu\mu_0(n+1)\frac{\mu_0(n+2)+2\mu_*}{(2n+3)\rho^2}\right]+$$

$$+a_{21}\left[\frac{2+\mu_0(n+1)}{n(2n-1)}\left(n-4\frac{\mu\mu_0}{\mu_*}\right)-2\mu\mu_0\frac{n-3-\mu_*^{-1}(n+1)}{2n-1}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2+\mu_0(n+3)}{n(2n+3)}\frac{4\mu\mu_0\mu_*^{-1}-n-2}{\rho^2}+2\mu\mu_0\left(n+1\right)\frac{1-\mu_*^{-1}}{2n+3}\rho^{-2}\right]\right\}P_n\left(\cos\theta\right),$$

$$\tau_{\rho\theta}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\Delta_n}\rho^{-n-1}\left\{a_{22}\left[n\frac{n-1-\mu_*(n+1)}{2n-1}-(n+1)\frac{\mu_0n-2\mu_*}{2n-1}-(n+1)\frac{n+2-\mu_*n}{(2n+3)\rho^2}-\right.\right.$$

$$\left.-(n+3)\frac{\mu_0(n+2)+2\mu_*}{(2n+3)\rho^2}\right]+a_{21}\left[\frac{2+\mu_0(n+1)}{(2n-1)\mu_*}+\frac{n-3-\mu_*^{-1}(n+1)}{2n-1}-\frac{2+\mu_0(n+3)}{\mu_*(2n+3)\rho^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\left(n+3\right)\frac{1-\mu_*^{-1}}{2n+3}\rho^{-2}\right]\right\}P_n^1\left(\cos\theta\right).$$

За отриманими формулами обчислено переміщення та напруження в пружному просторі в залежності від кута θ з різних значень ρ.

Дослідження виконано за підтримки грантів “Royal Society Wolfson Fellow” та Horizon 2020 Grant 101008140 Effect Fact “Effective Factorisation Techniques for Matrix-Functions: Developing, Theory, Numerical Methods and Impactful Applications”.

1. *Кіт Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех.поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 120–128.
2. *Мартиняк Р. М.* Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 5. – С. 59–66.

AXISYMMETRIC STRESS FIELD IN AN ELASTIC SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY

The paper considers the axisymmetric stress state of an elastic half-space weakened by a spherical cavity. It is assumed that normal stress is applied from the cavity to the surrounding material. The integral transforms method was used to solve the corresponding boundary value problem using Lame's equations expressed in terms of displacements. A numerical investigation of the stress field was conducted based on the exact solution derived for the problem.