АНАЛІЗ Н-АДАПТИВНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧІ СТАТИКИ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Георгій Шинкаренко[1], Павло Малашняк[2]

[1,2]Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
[1]heorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua, [2]pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua

На засадах моделі оболонок Тимошенка [3] у цьому дослідженні встановлено: *i*) достатні (і цілком вживані для практики) умови коректності варіаційного формулювання крайової задачі статики циліндричної оболонки під дією осесиметричних навантажень; *ii*) структуру векторів жорстких зміщень такої оболонки; *iii*) критерій сингулярної збуреності крайової задачі; *iv*) апостеріорний оцінювач похибок (АОП) кусково лінійних апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) вектора узагальнених зміщень оболонки; *v*) стратегію локального згущення сіток для економного обчислення наближень МСЕ із заздалегідь заданим рівнем допустимої похибки.

Розв'язуємо задачу знаходження вектора узагальнених пружних зміщень $\boldsymbol{\psi} = \{u, w, \gamma\} \in \boldsymbol{\Phi} := \{\boldsymbol{\varphi} = \{v, y, \xi\} \in [H^1(0,L)]^3 : \boldsymbol{\varphi}(0) = 0\}$ такого, що задовольняє рівняння $\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$, де

$$\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_0^L \begin{bmatrix} B(u'v' + R^{-2}wy) + D\gamma'\xi' \\ +\nu R^{-1}B\left(wv' + u'y\right) + B_c\left(w' + \gamma\right)(y' + \xi) \end{bmatrix} dz \,, \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi},$$

$$\langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_0^L \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} dz + \boldsymbol{\sigma}^L \cdot \boldsymbol{\varphi}(L) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi},$$

$\boldsymbol{f} = \{f_u, f_w, f_\gamma\}$, $\boldsymbol{\sigma}^L = \{\sigma_u, \sigma_w, \sigma_\gamma\}$ – задані навантаження, B, B_c, D і ν – фізичні параметри оболонки довжини L, радіуса R і товщини t. Аналіз цієї задачі з детальною характеристикою сталих неперервності та еліптичності показав, що її складові виконують умови теореми Лакса-Мільграма-Вишика, тому задача має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від її даних.

Встановлено критерій подібності $\delta = 3LR(\nu t^2)^{-1}$, великі значення якого вказують на сингулярну збуреність розглядуваної задачі. Показано, що множина векторів жорстких зміщень оболонки має структуру $\boldsymbol{\varphi}_0 = \{v_0, 0, 0\} \notin \boldsymbol{\Phi} \quad \forall v_0 \in R$. Задача еквівалентна до задачі мінімізації: знайти вектор зміщень $\boldsymbol{\psi} = \{u, w, \gamma\} \in \boldsymbol{\Phi}$ такий, що $J(\boldsymbol{\psi}) \le J(\boldsymbol{\varphi}) = \Pi(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) - 2\langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$, що дає можливість використання процедур Гальоркіна або Рітца для їхнього числового розв'язання.

Для реалізації цих процедур використано кусково лінійні базисні функції МСЕ $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^N \subset \boldsymbol{\Phi}$, побудовані на сітці скінченних елементів

$T_h = \{K_{i+1}\}_{i=0}^{N-1}$, утвореній вузлами $0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = L$, $K_{i+1} = (z_i, z_{i+1})$, $h_{i+1} = z_{i+1} - z_i, h = \max\limits_{0 \le i \le N-1} h_{i+1}$ [1, 2]. Тоді апроксимація МСЕ $\psi_h \in \Phi_{\boldsymbol{h}} \subset \Phi$ є розв'язком задачі, як полягає у знаходженні коефіцієнтів $\{\boldsymbol{q}_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathbb{R}^3$ розвинення $\psi_h(z) = \sum\limits_{n=1}^{N} \varphi_n(z)\boldsymbol{q}_n$ таких, що $\Pi(\psi_{\boldsymbol{h}}, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_{\boldsymbol{h}} =$ $\mathrm{span}[\{\{\varphi_n, 0, 0\}, \{0, \varphi_n, 0\}, \{0, 0, \varphi_n\}\}_{n=1}^{N}]$. Застосовуючи методику [1,2,4], оцінюємо похибки наближення кусково квадратичним апостеріоним оцінювачем похибок (АОП), локальні індикатори якого на кожному скінченному елементі визначено в такий спосіб:

$$\varepsilon_{n+1}(z) = 4\varphi_n(z)\varphi_{n+1}(z)\boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad \forall z \in K_{n+1} = (z_n, z_{n+1}), \tag{1}$$

де компоненти вектора $\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \{\lambda_{n+1}^u, \lambda_{n+1}^w, \lambda_{n+1}^\gamma\}$ обчислюються як

$$\lambda_{n+1}^u = h_{n+1}^2 \left[f_u + (\nu B)/R \times (w_{n+1} - w_n)/h_{n+1} \right] / (8B),$$

$$\lambda_{n+1}^w := \frac{5R^2 h_{n+1}^2}{4\left(10B_c R^2 + B h_{n+1}^2\right)} \left(f_w - \frac{\nu B}{R} \frac{u_{n+1} - u_n}{h_{n+1}} - \frac{B}{R^2} \frac{w_{n+1} + w_n}{2} + B_c \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{h_{n+1}} \right),$$

$$\lambda_{n+1}^\gamma = 5h_{n+1}^2 \left[2h_{n+1} f_\gamma - B_c \left(2(w_{n+1} - w_n) + h_{n+1}(\gamma_{n+1} + \gamma_n) \right) \right] / (4(10D + B_c h_{n+1}^2)).$$

Доповнення обчислень апроксимацій МСЕ індикаторами АОП (1) та стратегією локального покращення сітки скінченних елементів [1,2], дозволило створити ітераційну процедуру h-адаптивного відшукання наближень із заздалегідь гарантованою точністю.

1. *Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А.* Кусково лінійні апроксимації h-адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2005. – Вип. 11. – С. 3–18.
2. *Квасниця Г., Малашняк П., Шинкаренко Г.* Порівняння h-адаптивних схем МСЕ різних порядків для одновимірних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та. інф. – 2022. – Вип. 30. – С. 45–59.
3. *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вища школа, 1973. – 159 с.
4. *Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М.* Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти і застосування. –Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 396 с.

ANALYSIS OF H-ADAPTIVE FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS IN STATIC PROBLEM OF CYLINDRICAL SHELLS

Based on Timoshenko's shell model [3], this study establishes: (i) sufficient (and quite applicable in practice) conditions for the correctness of the variational formulation of the boundary value problem of the statics of a cylindrical shell under axisymmetric loads; (ii) the structure of the rigid displacement vectors of such shell; (iii) a criterion for the singular perturbation of the boundary value problem; (iv) an a posteriori error estimator of piecewise linear approximations of the finite element method (FEM) for the generalized displacement vector of the shell; (v) a strategy for local mesh refinement to efficiently compute FEM approximations with a predetermined acceptable error level.