ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИЙ АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Георгій Шинкаренко[1], Василь Танчинець[2], Олександр Вовк[3]

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів;
[1]heorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua, [2]vasyl.tanchynets@lnu.edu.ua, [3]vovk@windowslive.com

Розглянемо варіаційну задачу конвекції-дифузії [1-2], яка полягає у знаходженні $u \in V$ такого, що $a(u,v) = <l,v> \;\; \forall v \in V$, де

$$\begin{gathered} a(u,v) := \int_\Omega [(\mu \nabla u).\nabla v + v\beta.\nabla u]dx + \int_{\Gamma_q} \alpha uv d\gamma \quad \forall u,v \in V, \\ <l,v> := \int_\Omega fv dx + \int_{\Gamma_q} gv d\gamma \;\; \forall u,v \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \partial\Omega\}, \end{gathered} \tag{1}$$

з метою обчислити її наближений розв'язок із заданою похибкою.

(i) Застосовано апроксимації методу скінченних елементів (МСЕ) $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_n \varphi_n(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ з кусково лінійними базисними функціями, побудованими на конформній тріангуляції $\Im_h(\mathbf{x}) = \{K\}$, $\bigcup_{K \in \Im_h} K = \Omega$. За допущення про коректність задачі (1), розв'язок системи рівнянь Гальоркіна

$$\begin{cases} \text{задано } \; \Im_h = \{K\} \; \text{ і } \; V_h = span[\{\varphi_i\}_{i=1}^N] \subset V, \;\; \dim V_h = N < +\infty \\ \text{знайти коефіцієнти розвинення } u_h = \sum_{n=1}^N q_n \varphi_n \in V_h \;\text{ такі, що} \\ \qquad \sum_{n=1}^N a(\varphi_n, \varphi_i) q_n = <l, \varphi_i> \quad i = 1,\dots,N, \end{cases} \tag{2}$$

однозначно визначає кожне $q_n \in \mathbb{R}$ як наближення до $u(A_n)$, де A_n – вершина трикутника K така, що $A_n \notin \Gamma_u$, за дет. див. [1, 2].

(ii) Щоб одержати змістовну оцінку похибки $e_h := u - u_h \in V / V_h$, її наближення $\varepsilon_h \notin V_h$ – апостеріорний оцінювач похибки (АОП) – для кожного скінченного елемента $K = \Delta A_i A_j A_m \in \Im_h$ описується індикаторами вигляду

$$\begin{gathered} \varepsilon_h(\mathbf{x})\big|_K \equiv \varepsilon_K(\mathbf{x}) := u_h(\mathbf{x}) - U_K(\mathbf{x}) \;\; \forall \mathbf{x} \in K, \\ U_K(\mathbf{x}) := c_0 + \sum_{i=1}^2 c_i \exp[\mu^{-1}(\mathbf{x}^K)\beta_i(\mathbf{x}^K)(x_i - x_i^K)] \\ + [\sum_{i=1}^2 \beta_i(\mathbf{x}^K)]^{-1} f(\mathbf{x}^K)(x_1 + x_2) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in K, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\mathbf{x}^K = (x_1^K, x_2^K)$ – центр ваги трикутника K, а коефіцієнти $\{c_i\}_{i=0}^2$ є розв'язками СЛАР $U_K(A_n) = u_h(A_n), \;\; n = i, j, m$.

Список норм $\{\| \varepsilon_K \|_{1,K}\}_{K\in\Im_h}$ характеризує розподіл похибок МСЕ на біжучій тріангуляції і разом з нормою $\| \varepsilon_h \| := \| \varepsilon_h \|_{1,\Omega} = (\sum_{K\in\Im_h} \| \varepsilon_K \|_{1,K}^2)^{1/2}$ слугують надійною основою для аналізу якості наближення $u_h \in V_h$.

(iii) Надійність та ефективність АОП ілюструється результатами експериментів, зокрема, з сингулярно збуреною задачею Діріхле в $\Omega = (0,1)^2$, $Pe \cong 140$ і розв'язком $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2 [1-\chi_1(\mathbf{x})][1-\chi_2(\mathbf{x})]$, $\chi_i(\mathbf{x}) = \exp[-(1-x_i)\mu^{-1}]$, див. [3].

Таблиця: Збіжність апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних сітках до рівня похибки $\delta_h = \|\varepsilon_h\| / \|u_h\| 100\% \le 3\%$, $\delta = \|e_h\| / \|u\| 100\%$, $\kappa_h = \|\varepsilon_h\| / \|e_h\|$, $p_h = \ln[\| \varepsilon_h \| / \| \varepsilon_{h/2} \|] / \ln(N_{h/2} / N_h)$, $N = N(\Im_h)$ і $Card(\Im_h)$ – кількість вузлів та елементів тріангуляції $\Im_h$ відповідно,.

h^{-1}	$N(\Im_h)$	$Card(\Im_h)$	$\|e_h\|$	$\|\varepsilon_h\|$	δ	δ_h	κ_h	p_h
20	841	1 600	4.272	4.795	75.9	85.2	1.12	0.5
40	3 281	6 400	2.860	3.104	50.8	55.2	1.09	0.6
80	12 961	25 600	1.612	1.709	28.6	30.4	1.06	0.9
160	51 521	102 400	0.835	0.878	14.8	15.6	1.05	1.0
320	205 441	409 600	0.422	0.442	7.5	7.9	1.05	1.0
640	820 481	1 638 400	0.211	0.221	3.8	3.9	1.05	1.0
1280	3 279 361	6 553 600	0.106	0.111	1.9	2.0	1.05	1.0

Перегляд даних таблиці свідчить, що пропонований АОП $\| \varepsilon_h \|$ здатний надійно обчислювати верхню межу похибки апроксимацій МСЕ з індексом ефективності $\kappa_h \cong 1$ і відтворює її асимптотичний порядок збіжності $p_h \cong 1$.

1. *Шинкаренко Г., Танчинець В., Вовк О.* Апостеріорні оцінювачі похибок та *h*-адаптивні кусково-поліноміальні апроксимації на трикутних скінченних елементах // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. мат. та інф. – 2023. – Вип. 31. – С. 87–104.
2. *Ostapov O.Yu., Shynkarenko H.A., Vovk O.V.* A posteriori error estimator and *h*-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems. Recent Advances in Computational Mechanics, London, Taylor&Francis Group. – 2014. – P. 329–337.
3. *Zhang. Z.* Finite element superconvergence on Shishkin mesh for 2-D convection-diffusion problems // Math. Comp. – 2003. – **72**. – P. 1147–1177.

EXPONENTIAL A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR OF FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS

We propose an a posteriori error estimator capable of calculating the upper bound for linear piecewise finite element approximations in 2D convection-diffusion problems on triangular meshes