

ГІПОПРУЖНИЙ МАТЕРІАЛ. ЛІНЕАРИЗОВАНА ТЕОРІЯ. ХВИЛІ. ПІДХІД КРІСТОФФЕЛЯ

Ярема Рушицький

Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, м. Київ, rushch@inmech.kiev.ua

Доповідь складається з 8 розділів. Розділ 1 містить історичну довідку щодо вивчення гіпопружності вченими-механіками. Розглядаючи гіпопружні матеріали, необхідно згадати про внесок К. Трусделла в цей напрямок механіки матеріалів. Фактично, дві відомі в механіці публікації К.Трусделла 1955 [4] (розлога) та 1963 [5] (лаконічна) років створили основи для подальшого вивчення гіпопружності як частини науки про пружне деформування матеріалів. Саме К. Трусделл описав триваючу пару століть історію створення науки про гіпопружне деформування. У розділі 2 гіпопружність розглядається як одна із форм прояву властивості пружності в матеріалах. Тут наголошується принципова відмінність між гіперпружними і гіпопружними матеріалами. Вона полягає в застосуванні суттєво відмінних між собою принципів побудови конституційних рівнянь. В гіперпружності закладено принцип функціональної залежності напружень від деформацій, тоді як в гіпопружності – принцип функціональної залежності швидкостей напружень від швидкостей деформацій. У розділі 3 коментуються деякі сучасні публікації щодо хвиль в гіпопружних матеріалах. Розділ 4 включає необхідні в гіпопружності основні поняття континуальної механіки [2, 3]. Увага акцентується на понятті похідної Яуманна

$$\sigma_{ik}^{\nabla} = (D\sigma_{ik}/Dt) - \sigma_{in}v_{[k,n]} - \sigma_{kn}v_{[i,n]}, \quad \vec{v} = \{v_k\} = \left\{ \left(\partial x_k / \partial t \right) \right\}. \quad (1)$$

У розділі 5 конкретизується модель гіпопружного тіла. Варіант моделі гіпопружного матеріалу (тіла) визначає прийнята форма конститутивних рівнянь. У загальному випадку ці рівняння зв'язують тензор швидкості напружень з тензором напружень і швидкостей деформацій

$$\sigma^{\nabla} = f(\sigma, V) \quad \text{або} \quad \sigma_{ik}^{\nabla} = C_{iklm}(\sigma_{rs})V_{lm} \quad (\text{простіший варіант}). \quad (2)$$

Зазначимо, що гіпопружність допускає наявність початкових напружень в лінійному підході і нескінченно малі деформації гіпопружних матеріалів зворотні щодо початкових напружень. Перша особливість відсутня в пружних і гіперпружних матеріалах. Для ізотропних тіл формула (2) конкретизується

$$\sigma^{\nabla} = \delta g_0 1 + g_1 V + \delta g_2 \sigma + \delta g_5 \sigma^2 + (1/2)g_4 (V\sigma + \sigma V) + (1/2)g_8 (V\sigma^2 + \sigma^2 V) + Mg_3 1 + Mg_6 \sigma + Mg_9 \sigma^2 + Ng_7 1 + Ng_{10} \sigma + Ng_{11} \sigma^2, \quad (3)$$

де $g_K = g_K(I, II, III)$ є аналітичними функціями трьох перших інваріантів тензора деформації. Зберігаючи в (3) різну кількість доданків, отримують моделі різної степені. Нульова і перша моделі задаються такими формулами

$$\left(\delta_{jn} + u_{j,n}^o \right) \left[\sigma_{in}^o u_{[k, nit]} + \sigma_{in,i} u_{[k, nt]}^o + \sigma_{kn}^o u_{[i, nit]} + \sigma_{kn,i} u_{[i, n]}^o + C_{iklm} u_{(l, mit)} \right] + \sigma_{in}^o u_{j, nit} - \rho u_{j, tt} = 0. \quad (4)$$

Отже, рівняння (4) містить як відомі параметри початкоав напруження σ_{in}^o і початкові обертаня $u_{[k, nt]}^o$.

Розділ 7 присвячений класичному підходу Крістоффеля в аналізі плоских хвиль [1]. У розділі 8 цей підхід використано для аналізу гармонічних плоских хвиль в гіпопружному матеріалі. У простому випадку, коли задане лише початкове напруження σ_{11}^o , лінеаризовані рівняння руху мають вигляд

$$\left(\lambda + 2\mu + 2\sigma_{11}^o \right) u_1^o + \rho \left(v_{ph} \right)^2 u_1^o = 0, \quad \left(\mu + 2\sigma_{11}^o \right) u_{2(3)}^o + \rho \left(v_{ph} \right)^2 u_{2(3)}^o = 0.$$

1. Fedorov F.I. Theory of elastic waves in crystals. – New York: Plenum Press, 1968. – 388 p.
2. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer Verlag, 1999. – 555 p.
3. Rushchitsky J.J. Foundations of mechanics of materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 270 p.
4. Truesdell C. Hypo-elasticity // J. Rat. Mech. Anal. – 1955. – 4, – P.83-133, P.1019-1020.
5. Truesdell C. Remarks on hypo-elasticity // J. Research Nation. Bureau Stand. – B. Mathematics and Mathematical Physics. – 1963. – 67B, No. 3. – P.1–3.

HYPOELASTIC MATERIAL. LINEARIZED THEORY. WAVES. CHRISTOFFELS APPROACH

The report includes 8 chapters. Section 1 provides historical background on the study of hypoelasticity by mechanical scientists. In Chapter 2, hypoelasticity is considered as one of the forms of manifestation of the property of elasticity in materials. Section 3 comments on some modern publications on waves in hypoelastic materials. Chapter 4 includes the basic concepts of continuum mechanics necessary in hypoelasticity. Chapter 5 specifies the hypoelastic body model. Chapter 6 describes the general linearization scheme of the equation of motion and its concrete implementation in the hypoelastic body model. Chapter 6 describes the general linearization scheme of the equation of motion and its concrete implementation in the hypoelastic body model. Chapter 7 is devoted to Christoffel's classical approach in the analysis of plane waves. This approach is used in Chapter 8 when analyzing harmonic plane waves in a hypoelastic material.