# ЧАСТКОВІ ТА ЗАГАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ У ДЕКАРТОВІЙ І ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Віктор Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
victorrev@ukr.net

Розглянуто систему рівнянь Нав'є тривимірної статичної теорії термопружності в декартовій системі координат [1, 2]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k=\overline{1,3}, \ \nabla^2 T = 0, \tag{1}$$

де $\nabla^2$ – оператор Лапласа. Загальний розв'язок системи рівнянь (1) подано у вигляді суми однорідного і часткового температурного розв'язків

$$u_j = u_j^e + u_j^\tau, \ j=\overline{1,3}. \tag{2}$$

**Означення**. Частковий розв'язок $u_j^\tau$ (2) називатимемо температурним, якщо він не містить в собі пружних переміщень.

**Теорема 1**. Для температурних розв'язків системи (1) маємо

$$e^\tau = 3\alpha T, \ \Theta^\tau = 0, \tag{3}$$

де $\Theta^\tau = \sigma_1^\tau + \sigma_2^\tau + \sigma_3^\tau$ – сума нормальних напружень, $e$ – об'ємне розширення.

На основі залежностей (3) знайдено частковий розв'язок системи рівнянь (1), який явно визначається температурою [1]

$$u_j^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \frac{4\alpha}{3}\Omega_j, \ j=\overline{1,3}, \tag{4}$$

де $T$, $\Omega_j = \int \mathrm{T} dx_j$ – гармонічні функції, $\vartheta(x,y,z) = -\alpha(x\Omega_1 + y\Omega_2 + z\Omega_3)/6$ – бігармонічна функція.

Розглянуто тривимірну температуру у циліндричній системі координат

$$T(r,\varphi,z) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} e^{-\beta_k z} J_n(\beta_k r)\cos n\varphi. \tag{5}$$

Використано співвідношення (3), (5), властивості функцій Бесселя і знайдено новий частковий розв'язок системи рівнянь Нав'є (1)

$$u_r^\tau = \frac{\alpha}{3}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n,k}}{\beta_k}\left\{\left[\frac{z}{2}\frac{n}{r} - \beta_k r\right]J_n(\beta_k r) + \left[(n+8) - \frac{z}{2}\beta_k\right]J_{n+1}\right\}e^{-\beta_k z}\cos n\varphi,$$

$$u_{\varphi}^{\tau}=\frac{\alpha}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}a_{n,k}\left[(8+n)J_{n+1}-z\frac{n}{2r}J_n\right]e^{-\beta_k z}\sin n\varphi\,, \qquad (6)$$

$$u_{z}^{\tau}=\frac{\alpha}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}\left\{rJ_{n+1}(\beta_k r)-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{\beta_k}+z\right)J_n(\beta_k r)\right\}e^{-\beta_k z}\cos n\varphi\,.$$

Знайдено частковий розв'язок у випадку осесиметричної температури [2]

$$u_r^t=\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\frac{8\alpha}{3}\Omega_r\,,\; u_z^t=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\frac{4\alpha}{3}\Omega_z\,,\; u_{\phi}^t=0\,, \qquad (7)$$

де $\Omega_r=\frac{1}{r}\int rTdr$ , $\Omega_z=\int \mathrm{T}dz$ , $\vartheta(r,z)=-\alpha(2r\Omega_r+z\Omega_z)/6$ – двомірні функції.

**Теорема 2.** Загальний розв'язок системи рівнянь (1) у циліндричній системі координат можна подати в такому вигляді:

$$u_r=\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}+u_r^{\tau},\quad u_z=\frac{\partial P}{\partial z}-4(1-\nu)\Phi+u_z^{\tau}\,,\; u_{\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\varphi}-\frac{\partial Q}{\partial r}+u_{\varphi}^{\tau}\,, \quad (8)$$

де $P=z\Phi+\Psi$ ; $\Phi(r,\varphi,z)$, $\Psi(r,\varphi,z)$ , $Q(r,\varphi,z)$ – гармонічні функції.

На основі співвідношень (4), (6)–(8) побудовані напруження.

1. *Revenko V.* Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory // Scientific Journal of TNTU. – 2022. – **108**, № 4. – P. 64–73.
2. *Ревенко В. П.* Розв’язування осесиметричних задач термопружності з використанням повних систем неортогональних функцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66,** № 1–2. – С. 249–258.

## PARTIAL AND GENERAL SOLUTIONS OF THE THEORY OF THERMAL ELASTICITY IN THE CARTESIAN AND CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEMS

*The general solution of the system of Navier differential equations is given in the form of a sum of homogeneous and partial solutions. The partial solution of the system of Navier equations, which is determined by the stationary temperature and does not contain elastic displacements, is called the temperature solution. It is proved that the sum of normal temperature stresses is zero. The temperature solution of the system of Navier equations in Cartesian and cylindrical coordinate systems and for axisymmetric temperature is constructed. Analytical formulas for expressing temperature movements and stresses in an explicit form are given. The general solution of the equations of the theory of thermoelasticity in the Cartesian and cylindrical coordinate system through four harmonic functions is recorded.*