ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ірина Ткаченко[1], Ніна Антоненко[2]

[1]Запорізький національний університет, м. Запоріжжя, tig.phd81@gmail.com,
[2]Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, antonenkonina.ua@gmail.com

Розглянемо пакет із n пружних однорідних та ізотропних шарів, що лежать на абсолютно жорсткому півпросторі, на стиках шарів виконуються умови ідеального механічного та неідеального теплового контактів. На поверхні основи задано закон розподілу температури та напружень, на межі пакету та півпростору підтримується нульова температура. У кожному шарі вводиться декартова система координат $O_j xyz_j$ з початком на верхній межі шару, вісі z_j співпадають та напрямлені вниз.

Умови на стиках шарів:

$$u_j\left(x,y,h_j\right)=u_{j+1}\left(x,y,0\right),\ v_j\left(x,y,h_j\right)=v_{j+1}\left(x,y,0\right),\ w_j\left(x,y,h_j\right)=w_{j+1}\left(x,y,0\right),$$

$$\sigma_{z,j}\left(x,y,h_j\right)=\sigma_{z,j+1}\left(x,y,0\right),$$

$$\tau_{yz,j}\left(x,y,h_j\right)=\tau_{yz,j+1}\left(x,y,0\right),\ \tau_{xz,j}\left(x,y,h_j\right)=\tau_{xz,j+1}\left(x,y,0\right),$$

$$\frac{1}{R_j}\left[T_{j+1}\left(x,y,0\right)-T_j\left(x,y,h_j\right)\right]=k_{T,j}\frac{\partial T_j}{\partial z}\left(x,y,h_j\right),$$

$$k_{T,j}\frac{\partial T_j}{\partial z}\left(x,y,h_j\right)=k_{T,j+1}\frac{\partial T_{j+1}}{\partial z}\left(x,y,0\right),\ j=\overline{1,n}.$$

Крайові умови:

$$T_1\left(x,y,0\right)=f\left(x,y\right),\ \sigma_{z,1}\left(x,y,0\right)=h\left(x,y\right),$$

$$\tau_{yz,1}\left(x,y,0\right)=l\left(x,y\right),\ \tau_{xz,1}\left(x,y,0\right)=g\left(x,y\right),$$

$$T_n\left(x,y,h_n\right)=0,\ u_n\left(x,y,h_n\right)=v_n\left(x,y,h_n\right)=w_n\left(x,y,h_n\right)=0.$$

Треба визначити компоненти термо-напружено-деформованого стану (ТНДС) точок шарів основи.

Задачу розв'язано за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є та методу функцій податливості. У просторі трансформант компоненти ТНДС шару представлено у вигляді лінійних комбінацій його допоміжних функцій:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi,\zeta,0),\ \beta = \mu p \bar{w}(\xi,\zeta,0),\ \gamma = \mu\left(-i\xi\bar{u}(\xi,\zeta,0) - i\zeta\bar{v}(\xi,\zeta,0)\right),$$

$$\tilde{\gamma} = -\mu\left(-i\zeta\bar{u}(\xi,\zeta,0) + i\xi\bar{v}(\xi,\zeta,0)\right),\ \delta = -\frac{1}{p}\left[i\xi\bar{\tau}_{xz}(\xi,\zeta,0) + i\zeta\bar{\tau}_{yz}(\xi,\zeta,0)\right],$$

$$\tilde{\delta} = -\frac{1}{p}\left[i\zeta\bar{\tau}_{xz}(\xi,\zeta,0) - i\xi\bar{\tau}_{yz}(\xi,\zeta,0)\right],\ \eta = \bar{T}(\xi,\zeta,0),\ \varepsilon = \frac{1}{p}\frac{d\bar{T}}{dz}(\xi,\zeta,0),$$

де $p^2 = \xi^2 + \zeta^2$, ξ, ζ – параметри інтегрального перетворення.

Використовуючи умови на стиках шарів, отримано рекурентні формули, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів основи:

$$\bar{\alpha}_{j+1} = M_{11,j}\bar{\alpha}_j + M_{12,j}\bar{\beta}_j + M_{13,j}\eta_j,\ \bar{\beta}_{j+1} = M_{21,j}\bar{\alpha}_j + M_{22,j}\bar{\beta}_j + M_{23,j}\eta_j, \quad (1)$$

де $\bar{\alpha}_j = \left(\alpha_j, \delta_j, \tilde{\delta}_j\right)^t$, $\bar{\beta}_j = \left(\beta_j, \gamma_j, \tilde{\gamma}_j\right)^t$, $M_{kl,j}$ – відомі матриці, $j = \overline{1,n}$.

У роботі [1] доведено, що $\varepsilon_j = -r_j\eta_j$, де $r_j = \dfrac{\Delta_j S_j + r_{j+1}\left(C_j + L_j p S_j\right)}{\Delta_j C_j + r_{j+1}\left(S_j + L_j p C_j\right)}$,

$r_n = \operatorname{cth} p_n$, $L_j = R_j k_{T,j}$, $\Delta_j = \mu_j / \mu_{j+1}$, $S_j = \operatorname{sh} p_j$, $C_j = \operatorname{ch} p_j$, $p_j = p h_j$.

Доведено, що допоміжні функції шару пов'язані співвідношеннями:

$$\bar{\beta}_j = \tilde{A}_j\bar{\alpha}_j + \tilde{B}_j\eta_j,\ j = \overline{1,n}, \quad (2)$$

де $\tilde{A}_j$, $\tilde{B}_j$ – матриці податливості, компоненти яких залежать від механічних і геометричних характеристик шарів та коефіцієнтів теплового опору R_j.

Схема розв'язання: з умов на верхній межі основи знаходимо чотири допоміжні функції першого шару основи; обчислюємо функції податливості; за формулами (2) та (1) знаходимо невідомі допоміжні функції шарів основи і підставляємо їх у вирази для трансформант ТНДС; знаходимо оригінали компонент ТНДС.

1. *Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г.* Тривимірна задача теплопровідності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2023. – № 3. – С. 53–59.

METHOD FOR SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTIC PROBLEM FOR A LAYERED FOUNDATION WITH IMPERFECT THERMAL CONTACT BETWEEN LAYERS

Using the two-dimensional Fourier integral transform and the compliance function method, a method for solving the three-dimensional thermoelastic problem with imperfect thermal contact between layers has been proposed.