ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ НЕЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ УРИСОНА

Михайло Андрійчук[1], Петро Савенко[2]

[1,2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
[1]andr@iapmm.lviv.ua, [2]posavnenko@gmail.com

Нелінійні інтегральні рівняння виникають у багатьох задачах сучасної математики, фізики й техніки [1 – 4]. Нелінійним інтегральним рівнянням типу Гаммерштейна та Урисона присвячено дослідження Богатова, Красносельського, Забрейка, Стеценка [2 – 4] та багатьох інших авторів. Фундаментальна теорія галуження розв'язків різних типів нелінійних рівнянь подається в монографії Вайнберга, Треногіна [3]. Одним з типів нелінійних інтег ральних рівнянь є рівняння Урисона [5]

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), \mu) dy . \tag{1}$$

У цій роботі подається більш загальне нелінійне інтегральне рівняння типу Урисона

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), c_1, c_2) dy , \tag{2}$$

яке на відміну від [3] залежить не від одного, а від двох дійсних числових параметрів, належних до деякої випуклої обмеженої області R^2 простору C.

Нехай при деяких значеннях $\mathbf{c}_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$ рівняння (2) має неперервний розв'язок $u_0(x)$, який називатимемо первинним. Розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$ і всіх відмінних від $u_0(x,_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ розв'язків $u_c\left(x, c_1, c_2\right)$ рівняння (2), які при $\left|\mathbf{c} -_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умову $\max\limits_{Q \in G} \left| u_c\left(x, c_1, c_2\right) - u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \right| \to 0$. Покладаємо, що підінтегральна функція в околі точки $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} \left(\mathbf{c}^{(0)}, u_0\left(x, \mathbf{c}^{(0)}\right)\right)$ при $|w| \le \rho_1$, $|\mu| \le \rho_\mu$ і $|\nu| \le \rho_\nu$ розкладається у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональним аргументом w й числовими параметрами μ, ν. На підставі відповідних перетворень одержимо рівняння типу Ляпунова – Шмідта [3]

$$F\left(x, y, u_0(y), c^{(0)}\right) = \sum_{m+n+p+q \ge 0} A_{mnp}\left(x, y, \mathbf{c}^{(0)}\right) w^m(y) \mu^p \nu^q .$$

Покладаючи $A_{100}(x,y,c^{(0)}) = K\left(x,y,u_0(y),c^{(0)}\right)$ – фредгольмове ядро, одержуємо інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = T(c_1,c_2)\varphi \equiv \int_G K(x,u_0(y);c_1,c_2)\varphi(y)dy\,, \qquad (3)$$

яке при подальшому вивченні розв'язків рівняння (2) грає ключову роль.

У залежності від типу розв'язків цього рівняння розглядають два випадки [3]. У випадку, коли множина значень параметрів $\mathbf{c}_1^{(0)}, c_2^{(0)} \in \Lambda_c$, при яких одиниця не є власним значенням рівняння (3), то нелінійне рівняння (2) має єдиний розв'язок. В іншому випадку, коли одиниця є власним значенням рівняння (3), то відповідна множина значень параметрів $\mathbf{c}_1^{(0)}, \mathbf{c}_2^{(0)} \in \Lambda_c$ є точками можливого галуження або біфуркації розв'язків рівняння (3) і відповідно рівняння (1). Задача знаходження власних значень $\mathbf{c}_1^{(0)}, \mathbf{c}_2^{(0)} \in \Lambda_c$ зводиться до знаходження коренів визначника n-го порядку $\Psi_n(\lambda) \equiv \det\left(t_{jk}(\lambda)\right)_{j,k=1}^n = 0,\ n \in \mathbb{N}$. Задача знаходження спектральних ліній типу $c_2 = c_2\left(c_1\right)$ $c_1 = c_1\left(c_2\right)$ зводиться до відповідної задачі Коші [4].

Теоретичні і обчислювальні аспекти проблеми розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, дослідження властивостей їхніх розв'язків, неєдиності і галужень розглянуто частково в монографії [1].

1. *Андрійчук М., Савенко П.* Нелінійні багато параметричні спектральні задачі. – Львів: ІППММ НАН України. – 2023. – 218 с.
2. *Богатов М.* Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности // Научные ведомости. Серия Математика. Физика. 2017. №6 (255). Выпуск 46. С.93-106.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
4. *Красносельский М. А.* Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов // Укр. матем. журн. – 1950. – **2**, № 3. – С. 70–86.
5. *Урысон П. С.* Труды по топологи и другим областям математики. Т. 1. – М.: Гостехиздат. – 1951.

**INVESTIGATIONS OF THE PROBLEM OF NON-UNITY SOLUTIONS
OF THE URISON-TYPE INTEGRAL EQUATION**

The generalization of the nonlinear integral equation of the Urison type is considered, which consists in introducing two real numerical parameters into the integral expression. This makes it possible to find a set of points of possible branching (bifurcation) of solutions in the form of spectral lines in a given domain by solving a nonlinear two-parameter spectral problem.