

## ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ТА ЗБІЖНОСТІ РІЗНИХ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КІРША

Яніна Гусаревич<sup>1</sup>, Богдан Дробенко<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, <sup>1</sup>yanina.husarevych@gmail.com, <sup>2</sup>drobenko@ukr.net

Метод скінченних елементів (МСЕ) широко використовують при дослідженні міцності та експлуатаційної надійності реальних інженерних конструкцій. Побудова стандартної скінченно-елементної (СЕ) моделі включає три основні кроки: конструювання функцій форми, оцінювання поля деформацій та застосування співвідношень у слабкій формі для формування алгебраїчної системи рівнянь. При побудові моделей згладженого методу скінченних елементів (ЗМСЕ) передбачають додатковий крок – оцінювання згладженого поля деформацій, що дозволяє підняти точність отримуваних розв'язків. Це особливо важливо у випадках складної геометричної конфігурації конструкції і наявності локальних концентрацій напружень.

Стандартний МСЕ завжди завищує жорсткість конструкції (отримуємо занижені значення переміщень, а, отже, деформацій і напружень). Крім цього для багатьох задач це веде до так званого замикання числових розв'язків. Явище завищеної жорсткості властиве для всіх стандартних СЕ моделей і є особливо критичним для лінійних трикутних СЕ. ЗМСЕ може цю проблему подолати і завжди призводить до «м'якших» моделей.

Інша вагома проблема стандартного МСЕ – неточність у напруженнях, особливо за використання трикутних (чотиригранних у просторовому випадку) СЕ. Ця проблема в чомусь пов'язана із завищеною жорсткістю СЕ моделей, але більше вона стосується поелементної оцінки деформацій, використовуючи кусково неперервно-диференційовані поля переміщень. Такі деформації є розривними на поверхнях елементів, що і призводить до більших похибок при обчисленні напружень. ЗМСЕ моделі пропонують способи усунення цієї розривності на стадії формулювання, внаслідок чого істотно зростає точність визначення переміщень і напружень.

Третя проблема – втрата точності за використання сильно спотворених СЕ поділів (тому стандартний МСЕ вимагає якісних СЕ поділів). Ця проблема стосується ізопараметричних елементів з використанням відображення розглядуваного СЕ на відповідний базовий елемент. За сильно спотворених СЕ матриця Якобі стає погано обумовленою, що в результаті призводить до відхилень в точності розв'язку.

Моделі ЗМСЕ природно долають ці проблеми, оскільки не використовують процедури відображення. Тому спотворення сітки СЕ

істотно менше впливає на розв'язки. Деякі ЗМСЕ моделі можуть працювати з у край спотвореними СЕ-поділами.

Добре відомо, що стандартні СЕ моделі потребують чотирикутних (шестигранних) СЕ поділів хорошої якості. В той же час дослідники віддають переваги трикутним (чотиригранним) лінійним СЕ, оскільки такі поділи можна будувати відносно легко навіть для складних областей. На додаток при виконанні адаптивного аналізу необхідна автоматична перебудова СЕ поділів. На сьогоднішній день лише СЕ поділи на основі лінійних трикутних елементів можуть автоматично перебудовуватись. Тому в майбутньому охочіше використовуватимуть переважно ці СЕ. Виявилось, що деякі ЗМСЕ моделі чудово працюють з такими СЕ поділами. З їхньою допомогою на таких поділах отримують набагато точніші розв'язки, ніж стандартним МСЕ.

Оцінка точності розв'язків має важливе значення. На жаль МСЕ може дати лише обмеження розв'язку знизу, а тому похибка стосовно точного розв'язку невідома. За допомогою деяких ЗМСЕ моделей можна отримувати оцінку розв'язку згори, що разом зі стандартним МСЕ дає обмеження для точного розв'язку.

Розглянуто різні варіанти ЗМСЕ і виконано порівняльний аналіз між ЗМСЕ та класичним МСЕ з погляду ефективності, точності та збіжності розв'язків задачі Кірша, для якої характерна істотна концентрація напружень. Використано декілька варіантів ЗМСЕ та класичний МСЕ.

Досліджено точність та збіжність отримуваних розв'язків за енергетичними нормами. Використано різні СЕ поділи області з чотирикутними елементами та полігональними елементами для ЗМСЕ. Для МСЕ використано класичні СЕ поділи з чотирикутними елементами.

Показано, що ЗМСЕ забезпечує істотно швидшу збіжність до аналітичного розв'язку задачі. Похибка ЗМСЕ розв'язків значно менша за похибку класичних схем МСЕ, навіть при меншій кількості ступенів вільності.

Завдяки згладженню деформаційного поля, ЗМСЕ забезпечує плавніший розподіл напружень, що зменшує ризик виникнення штучних піків у зонах з високою концентрацією напружень.

#### **ACCURACY AND CONVERGENCE EVALUATION OF DIFFERENT FINITE ELEMENT SOLUTIONS OF THE KIRSCH PROBLEM**

*The study focuses on comparing the efficiency and accuracy of the Smoothed Finite Element Method (SFEM) with the classical Finite Element Method (FEM) for the Kirsch problem – an infinite plate with a circular hole under tension. The results show that SFEM provides faster convergence, better accuracy, and requires fewer degrees of freedom (DOF) compared to FEM, particularly when dealing with complex geometries and stress concentrations. SFEM's advantage implies smoothing the deformation field, which allows for more accurate stress distributions around holes and reduces artificial stress peaks often seeing FEM. These results demonstrate SFEM's potential for solving complex mechanical problems where precision is crucial.*