ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ СИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА ВНУТРІШНІЙ ПОВЕРХНІ СКІНЧЕННОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Леся Постолакі, Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,
lesya.postolaki@gmail.com

Розглянуто обернену осесиметричну задачу для скінченного порожнистого циліндра $\{r_{\text{in}} \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ |z| \le b\}$, де $r_{\text{in}} = R_{\text{in}} / R_{\text{out}}$ та $b = B / R_{\text{out}}$. Торцеві поверхні $z = \pm b$ та зовнішня поверхня $r = 1$ циліндра є вільними від силових навантажень:

$$\sigma_{zz}(r, \pm b) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, \pm b) = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{rr}(1, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(1, z) = 0. \tag{2}$$

Розглянуто випадок, коли напруження в скінченному циліндрі створюють a priori невідомі навантаження, які діють на його внутрішній поверхні r_{in}. Замість цього використовується допоміжна інформація про розполід радіальних та осьових переміщень на зовнішній поверхні циліндра:

$$u_r(1, z) = u_{\text{out}}^{\text{e}}(z), \quad u_z(1, z) = \boldsymbol{v}_{\text{out}}^{\text{e}}(z). \tag{3}$$

Зауважимо, що функції $u_{\text{out}}^{\text{e}}(z)$ та $\boldsymbol{v}_{\text{out}}^{\text{e}}(z)$ можна визначити емпірично, використовуючи, наприклад, оптичний метод вимірювання [1].

Метою задачі є знаходження напружень $\sigma_{rr}(r_{\text{in}}, z)$ та $\sigma_{rz}(r_{\text{in}}, z)$ на внутрішній поверхні циліндра.

Для знаходження розв'язку сформульованої задачі використано метод функції Лява χ, яка задовольняє бігармонічне рівняння:

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0, \tag{4}$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Розроблено варіаційний метод однорідних розв'язків розв'язування задачі (1) – (4) [2]. Розв'язок подано у вигляді розвинення за повними системами функцій – однорідними розв'язками. Реалізація варіаційного методу приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої мають нульову асимптотику зі збільшенням номера, що дає змогу прямого використання методу редукції. Такий підхід з використанням методу редукції дає змогу побудови достатньо точних числових розв'язків задачі для обмежених тіл, зокрема – поставленої оберненої осесиметричної задачі для скінченного порожнистого циліндра.

Для оцінки ефективності запропонованого алгоритму розв'язування оберненої задачі були зроблені наступні верифікаційні дії.

1. Спочатку була сформульована та розв'язана пряма задача з граничними умовами на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра та вільними від навантажень торцями.

2. Розв'язавши пряму задачу з використанням варіаційного підходу, обчислили нормальні та дотичні переміщення на зовнішній поверхні циліндра. Застосували лінійну апроксимацію до знайдених наборів даних і реалізувалии їх як вхідні дані для формулювання оберненої задачі.

3. Розв'язали обернену задачу за запропонованим алгоритмом, порівняли розраховані значення радіальних і дотичних напружень по внутрішньому колу циліндра з навантаженнями, що прикладаються в прямій задач.

4. Внесли невеликі випадкові похибки в набори даних для переміщень на зовнішній поверхні, що моделює недосконалість емпіричних вимірювань з метою перевірки стійкості запропонованого алгоритму щодо малих збурень у вхідних даних.

1. *Aben H*. Integrated photoelasticity. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 203 p.
2. *Postolaki L., Tokovyy Y.* Identification of force loadings on the inner circumference of a finite-length elastic cylinder // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2023. – 103. – e202300435.

DETERMINATION OF THE UNKNOWN LOADINGS ON THE INNER SURFACE OF A FINITE-LENGTH HOLLOW CYLINDER

An inverse problem is solved for identifying unknown force loadings on the inner surface of a finite-length hollow cylinder using the variational method of homogeneous solutions. The problem is considered within the axisymmetric formulation, and the radial and axial displacements of the outer surface of the cylinder are used as the auxiliary data for solving the inverse problem. The accessible surfaces of the cylinder (the end-faces and the outer surface) are assumed to be free of force loading. By making use of the variational method of homogeneous solutions, the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The solution is verified numerically and its stability with respect to small errors in the input data is analyzed.