

## АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ НАПРУЖЕНЬ У БАГАТОШАРОВІЙ СФЕРИЧНІЙ ПОСУДИНІ

Юрій Токовий<sup>1</sup>, Юрій Кульчицький-Жигайло<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, м. Львів,  
<sup>1</sup>tokovyy@gmail.com, <sup>2</sup>kulchytyskiyyura@gmail.com

Побудовано розв'язок задачі про пружну деформацію багат шарової сферичної посудини за дії рівномірно розподіленого тиску на внутрішній поверхні (рис. 1). Посудина складена з ідеально з'єднаних еластичних шарів  $r_{m-1} < r < r_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $r_0 = R_i/R_o$ ,  $r_M = 1$ , властивості матеріалу яких можуть довільно змінюватися за товщиною. Розв'язок побудовано за допомогою підходу, який тлумачить шарувату структуру як цілісне тіло, разом із модифікованою схемою методу безпосереднього інтегрування, що дає змогу розглядати багат шарову посудину як композиційну сферу з кусково-змінними профілями властивостей матеріалу:

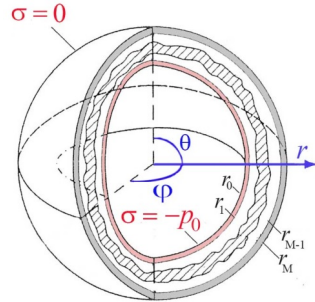


Рис. 1

$$f(r) = \sum_{m=1}^M f_m(r) S_m(r), \quad (1)$$

де  $f_m(r)$  – неперервна функція в межах  $m$ -го шару  $r_{m-1} < r < r_m$ ,  $S_m(r) = H(r - r_{m-1}) - H(r - r_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $H(r)$  – функція Гевісайда. Для визначеності припускаємо, що значення функції  $f_m(r)$  на межах шару  $r = r_{m-1}$  та  $r = r_m$  визначаються як односторонні границі відповідно при  $r \rightarrow r_{m-1}^+$  і  $r \rightarrow r_m^-$ .

Реалізація методу безпосереднього інтегрування [1] передбачає формулювання ключового рівняння в термінах напружень, що пов'язано з відповідним диференціюванням змінних коефіцієнтів, залучених до основних рівнянь закону Гука. Це висуває вимоги диференційованості для макроскопічних функціональних профілів властивостей матеріалу, що передбачає неперервність цих функцій та їх перших похідних. Вочевидь ця вимога не задовольняється при використанні подання (1). Щоб подолати цю перешкоду було використано апарат узагальненого диференціювання для формулювання ключових рівнянь у напруженнях [2]. У [3] запропоновано альтернативний алгоритм виведення ключового рівняння, який дає змогу уникнути

використання узагальненого диференціювання. Запропонована модифікація базується на застосуванні підходу безпосереднього інтегрування до рівнянь у термінах деформацій, які не залежать від властивостей матеріалу.

У результаті застосування такого підходу поставлену задачу зведено до розв'язування ключового інтегрального рівняння другого роду, розв'язок якого будується у вигляді явної залежності від внутрішнього тиску з використанням методу резольвентного ядра. Визначення резольвентного ядра є ключовим моментом при застосуванні запропонованого методу. Для побудови цієї функції використано алгоритм повторюваних ядер шляхом підсумовування нескінченного ряду ядер. У деяких випадках ці ряди можна підсумовувати аналітично або, якщо це не можливо, використовувати запропоновану спрощену формулу, ефективність якої продемонстровано розглянутими прикладами. Оскільки резольвента визначається за ядром ключового інтегрального рівняння, вона вербалізує «внутрішні властивості» задачі, що означає залежність лише від властивостей матеріалу шарів.

Розв'язок перевіряється шляхом порівняння з точними розв'язками, отриманими за допомогою використання методу «пошарових» розв'язків для конкретних тестових задач. Внаслідок того, що підхід передбачає підхід до одного твердого тіла (багатошарове тверде тіло розглядається як єдине ціле з поступовою зміною профілів властивостей матеріалу), він ефективний як для аналітичного, так і для чисельного застосування для довільної кількості неоднорідних шарів.

1. Tokovyy Y. V., Ma C.-C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – New Castle, Cambridge Scholars Pub., 2021. – 329 p.
2. Tokova L., Yasinskyi A., Ma C.-C. Effect of the layer inhomogeneity on the distribution of stresses and displacements in an elastic multilayer cylinder // Acta Mech. – 2017. – 228. – P. 2865–2877.
3. Tokovyy Y. Elastic and thermoelastic response of multilayer inhomogeneous hollow cylinders // Mech. Adv. Mater. Struc. – 2024. – 31, No. 17. – P. 3889–3901.

#### **ANALYTICAL DETERMINATION OF STRESSES IN A MULTILAYER SPHERICAL PRESSURE VESSEL**

*An explicit-form solution is constructed for a problem on elastic deformation of a multilayer spherical vessel due to uniform internal pressure. The solution is constructed through the use of the single solid approach along with the modified scheme of the direct integration method which allow for the consideration of the multilayer vessel as a composite sphere with piecewise-variable profiles of the material properties. As a result, the original problem is reduced to solving a governing integral equation of the second kind whose solution is constructed in the form of the explicit dependence on the internal pressure. The solution is verified by the comparison with exact solutions derived by making use the method of tailored solutions for specific benchmark problems.*