ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ДИНАМІЧНОГО СТАНУ ЗА НАЯВНОСТІ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ СИСТЕМИ ТОНКИХ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Всеволод Попов, Ольга Кирилова

Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса

Розглядається пружне ізотропне тіло, що знаходиться у стані плоскої деформації та містить N тонких жорстких смугових включень. Ці включення в координатній площині Oxy розміщуються на відрізках довжиною $2d_k$ з центрами у точках $O_k\left(a_k, b_k\right)$, $k=1,2,...N$ (Рис.1). Включення знаходяться під дією нормальних і зсувних сил $Q_k e^{-i\omega t}$, $T_k e^{-i\omega t}$, а також моментів $M_k e^{-i\omega t}$ (Рис.2).

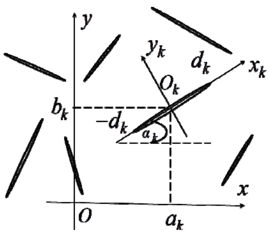

Рис.1

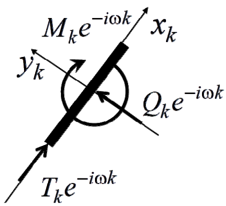

Рис. 2

Нехай $u(x,y)$ і $v(x,y)$ – переміщення, викликані рухом включень. За умов плоскої деформації, вони мають задовольняти наступним рівнянням руху:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\Delta u=-\rho\omega^2 u,$$
$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\Delta v=-\rho\omega^2 v. \quad (1)$$

В рівняннях (1) і далі часовий множник $e^{-i\omega t}$ відкинуто.

Для формулювання умов на включеннях з кожним з них пов'язано локальну систему координат $O_k x_k y_k$ (Рис.1) і з огляду на малу товщину включень, граничні умови формулюються на серединній поверхні включень $y_k=0$. Нехай $u^k\left(x_k,y_k\right)$, $v^k\left(x_k,y_k\right)$, $\sigma_x^k\left(x_k,y_k\right)$, $\sigma_y^k\left(x_k,y_k\right)$, $\tau_{yx}^k\left(x_k,y_k\right)$ – переміщення і напруження у системі $O_k x_k y_k$. Тоді за умов повного зчеплення включення з зовнішнім середовищем мають виконуватись рівності

$$v^k\left(x_k,0\right)=h_{1k}+\beta_k x_k,\ u^k\left(x_k,0\right)=h_{2k},\ -d_k<x_k<d_k, k=1,2,...,N \quad (2)$$

Окрім того, наявність включень спричиняє розриви напружень, стрибки яких позначено

$$\begin{gathered}\sigma_{yy}^{k}\left(x_k,+0\right)-\sigma_{yy}^{k}\left(x_k,-0\right)=\chi_{1k}\left(y\right),\\ \tau_{yx}^{k}\left(x_k,+0\right)-\tau_{yx}^{k}\left(x_k,-0\right)=\chi_{1k}\left(y\right),\\ -d_k<x<d_k;k=1,2,...N.\end{gathered}\tag{3}$$

Невідомі амплітуди коливань руху включень визначаються з рівняння руху, які при гармонічному коливанні мають вигляд

$$-\omega^2 h_{1k}m_k=\int\limits_{-d_k}^{d_k}\chi_{1k}\left(\eta\right)d\eta+Q_k,\ -\omega^2 h_{2k}m_k=\int\limits_{-d_k}^{d_k}\chi_{2k}\left(\eta\right)d\eta+T_k,$$

$$-\frac{4}{3}\omega^2 d_k^2\beta_k m_k=\int\limits_{-d_k}^{d_k}\eta\chi_{1k}\left(\eta\right)d\eta+M_k,\ \ k=1,2,...,N,$$

де m_k – маса включення.

Метод розв’язання ґрунтується на використанні розривних розв’язків рівнянь (1) зі стрибками (3) [2]. В результаті вихідна задача приводиться до визначення невідомих стрибків (3) з системи $2N$ інтегральних рівнянь. Щоб уникнути необхідності розв’язання цієї системи великої розмірності, пропонується ітераційний метод аналогічно до [1]. Це приводить до розв’язання на кожному кроці ітерацій сукупності рівнянь для окремих включень.

Розглянуті приклади показують добру узгодженість з результатами, отриманими іншими методами та демонструють стійкість і збіжність цього методу і у випадку систем щільно розміщених включень.

1. *Попов В.Г., Кирилова О.І.* Ітераційний метод визначення напруженого стану при дії хвилями на систему тріщин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 1-2. – С. 178-187.
2. *Попов В.Г., Улановский А.Э.* Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // МТТ.– 1995. – № 4. – С. 99–109.

THE ITERATIVE METHOD OF DETERMINATION TWO DIMENSION STRESS STALE IN THE PRESENCE SYSTEM OF THIN RIGID INCLUSIONS IN AN ELASTIC BODY

The problem of determining dynamic stress state in elastic body with system thin rigid inclusions has been soluted. The initial problem is reduced to the system of integral equations with logariphmic singularity. The iterative method of solving this system is proposed in which zero approximation is the solution of ecuations for alones inclusion.