ЗМІШАНА ЗАДАЧА ПРО МІЖФАЗНІ ВКЛЮЧЕННЯ В АНІЗОТРОПНІЙ НЕОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ

Костянтин Архипенко[1], Олександр Кривий[2]

[1,2] Національний університет «Одеська Морська Академія», м. Одеса,
[1] k_arkhipenko@ukr.net, [2] krivoy-odessa@ukr.net

Розглянуто задачу про міжфазні тонкі включення, розташовані на лінії з’єднання (вісь Oy) двох різних анізотропних півплощин. На берегах першого включення $L_1=\{x=0, y\in[-a;0]\}$ реалізовані умови гладкого контакту, на $L_2=\{x=0, y\in[b;c]\}$ – повного зчеплення. На нескінченості прикладено сили, які призводять виникнення напружень на включеннях, що зводяться до результуючих сил $P^{(j)}=\left(P_1^{(j)},P_2^{(j)}\right)$, $j=1,2$ з моментами сил $P_0^{(j)}$, $j=1,2$ відносно центрів включень.

Інтегральні співвідношення [1] дозволяють задачу звести до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) відносно невідомих стрибків нормального $H_1^-(y)$, $y\in L=L_1\cup L_2$ та дотичного $H_2^-(y)$, $y\in L_2$ напружень і стрибка дотичного переміщення $H_3^-(y)$, $y\in L_1$:

$$\begin{cases} a_{11}^k H_1^-(y)+b_{11}^k\cdot\Gamma\left[H_1^-\right](y)+\sum\limits_{j=2}^{3} b_{1j}^k\cdot\Gamma_{4-j}\left[H_j^-\right](y)=0 \\ a_{22}^k H_{4-k}^-(y)+b_{21}^k\cdot\Gamma\left[H_1^-\right](y)+\sum\limits_{j=2}^{3} b_{2j}^k\cdot\Gamma_{4-j}\left[H_j^-\right](y)=2l\delta_k \end{cases} y\in L_k \tag{1}$$

$$\Gamma[f](y)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{f(t)}{t-y}dt,\ \Gamma_j[f](y)=\frac{1}{\pi}\int_{L_j}\frac{f(t)}{t-y}dt,\ \ j=1,2,$$

де b_{kj}, c_{kj}, l – сталі, що залежать від пружних властивостей анізотропних півплощин, а $\delta_j, j=1,2$ – невідомі кути повороту включень. Умови рівноваги включень завершують постановку задачі.

Використовуючи метод, застосований у роботах [2-4], системи СІР (1) зведено до систем СІР, які наведемо у матричній формі:

$$\mathbf{J}^{(k)}\cdot\mathbf{G}^{(k)}(y)+\Gamma\left[\mathbf{G}^{(k)}\right](y)+\mathbf{M}^{(k)}\Gamma\left[\mathbf{G}^{(3-k)}\right](y)=\mathbf{F}^{(k)},\ \ y\in L_k,\ k=1,2 \tag{2}$$

де $\mathbf{J}^{(k)}, k=1,2$ – жорданові матриці, а $\mathbf{G}^{(k)}(y), k=1,2$ – матриці лінійних комбінацій невідомих стрибків напружень і переміщень. Аналіз розв'язків СІР (2) дозволив встановити, що невідомі функції $\mathbf{G}^{(1)}(y)$ мають у вершинах L_1 степеневу особливість, а $\mathbf{G}^{(2)}(y)$ мають у вершинах L_2 кореневу особливість підсилену осциляцією. Останнє дозволяє шукати невідомі функції у вигляді рядів за многочленами Якобі:

$$g_j^{(k)}(t)=(1-t)^{-\gamma_j^{(k)}}(1+t)^{-1+\gamma_j^{(k)}}\sum_{n=0}^{\infty} q_{jn}^{(k)} P_n^{-\gamma_j^{(k)},-1+\gamma_j^{(k)}}(t),\ k,j=1,2 \qquad (3)$$

Методом ортогональних многочленів системи СІР (3) зведено до нескінченої системи лінійних рівнянь відносно $q_{jn}^{(k)}$, наближений розв'язок якої отримано методом редукції. Отримано формули для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) у вершинах включень:

$$K1_1^{\pm}=\frac{\sqrt{a}}{2l}\left|\left(r_{14}^{+}\cdot S_{11}^{(1)}+r_{24}^{+}\cdot S_{21}^{(1)}\right)\left(\sqrt{1-\alpha_{02}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{1n}^{(1)}\left(0.5\mp i\alpha_{01}\right)_n}{(\pm 1)^n\, n!}\pm\frac{2P_1^{(1)}}{\pi a}\right)\right|, \qquad (4)$$

Формули (4) дозволяють дослідити залежність узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень від прикладених зовнішніх сил, анізотропних сталих півплощин і відстані між включеннями.

1. *Кривой А.Ф., Радиолло М.В.* Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости // Изв. Ан СССР, МТТ. – 1984.– С.84-92.
2. *Кривий О.Ф., Архипенко К.М.* Тріщина, що виходить на лінію з'єднання двох різних анізотропних півплощин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –2005. – **48**, № 3. – С. 110-116.
3. *Кривой А.Ф., Попов Г.Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С.36–45.
4. *Arkhypenko K., Kryvyi O.* Arbitrary oriented defects in anisotropic quarter plane // Proceedings of the First ICTAEM – 2019. – **5**. – P. 392–393.

MIXED PROBLEM ABOUT INTERFACE INCLUSIONS IN ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS PLANE

Has been solved the problem about the interface inclusions in anisotrpic nonhomogeneous plane. The problem was reduced to the systems of SIE, the solution of which was found by the method of orthogonal polynomials. For the generalized stress intensivity factors the numerical formulai were deduced. Were investigated the relations of GSIFs from the applied forces, anisotropic constants and distance between the inclusions.