

НАПРУЖЕННЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ З КРУГОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ І КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Олександр Пономаренко

Львівський національний університет природокористування, alexanderponomarenko54@gmail.com

Розглянуто нескінченну тонку пластину, що містить кругове включення з іншого матеріалу та круговий отвір. Приймаємо, що пластина, включення та отвір перебувають у загальному плоскому напруженому стані. Осі декартової системи координат x, y направлено вздовж осей симетрії. Задачу сформульовано в біполярних координатах α, β , які пов'язано з декартовими координатами x, y співвідношенням $x = J \operatorname{sh} \alpha$, $y = -J \sin \beta$, де $J = a / (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)$ – масштаб перетворення, a – віддаль від полюса до осі симетрії.

Задача полягає у визначенні розподілу напружень всередині і на спільній межі пластини і включення та на контурі отвору за двовісного розтягу на нескінченності пластини паралельно до x і y . Позначимо спільну межу пластини і включення $\alpha = +c$, контур отвору $\alpha = -c$. Центр включення розташуємо в точці $x = +\operatorname{arctg} c$, а отвору – $x = -\operatorname{arctg} c$.

Тоді крайові умови даної задачі подаємо для компонент напружень і зміщень наступним чином: $\sigma_\alpha = pT$, $\sigma_\beta = qT$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ – на нескінченності; $\sigma_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha$, $\tau_{\alpha\beta} = \hat{\tau}_{\alpha\beta}$, $u_\alpha = \hat{u}_\alpha$, $u_\beta = \hat{u}_\beta$ – на спільній межі пластини і включення; $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, $u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$ – на контурі отвору. Тут “шапочка” позначає величини, які відносяться до включення, а без “шапочки” – до пластини поза включенням.

Задаємо:

$$p = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \quad i \quad q = \begin{cases} 1 & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } y; \\ 0 & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } x; \\ 1 & \text{для всестороннього розтягу.} \end{cases}$$

Розглянемо функції напружень χ і $\hat{\chi}$ у формі $\chi / J = \alpha T (\chi_0 / J + \chi_1 / J)$ та $\hat{\chi} / J = \alpha T \hat{\chi}_1 / J$, в яких χ_0 / J відповідає розв'язку для суцільної нескінченної пластини без включення та отвору, і може бути записана у вигляді:

1) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y :

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} - \operatorname{sh} \alpha ;$$

2) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі x :

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} ;$$

3) для випадку всестороннього розтягу:

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} - \operatorname{sh} \alpha .$$

Аналіз здійснено на основі функцій напружень Ері для загального плоского напруженого стану з використанням біполярних координат. Для визначення невідомих коефіцієнтів функції напружень застосовано метод збурення за параметром. Отримано розподіл максимальних напружень на спільній межі включення і пластини та на контурі отвору для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y в залежності від r/d , де r – радіус включення та отвору, d – віддаль від центру включення чи отвору до осі симетрії та залежно від співвідношень модулів пружності матеріалу пластини E та включення \hat{E} .

Результати, отримані в роботі, дають змогу теоретично визначити коефіцієнт концентрації напружень біля включень та отворів і можуть бути використані в інженерній практиці при проектуванні деталей в кораблебудуванні, авіабудуванні та машинобудуванні [1].

1. Калоеров С.А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинах / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко. Министерство образования и науки Украины – Донецкий национальный университет, 2013. – 440с.

STRESSES IN INFINITE PLATE WITH CIRCULAR INCLUSION AND CIRCULAR HOLE

An analytical solution is constructed to a problem for an infinite plate containing circular hole filled with elastic inclusion of another material and circular hole, and subjected to the uniform tension in the direction of the x and y axes. The analysis is performed on the basis of the Airy stress function in the generalized plane stress and by applying the bipolar coordinates. The perturbation method is adopted for the determination of unknown coefficients in the solution.