ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Андрій Чорненький, Михайло Саврук, Володимир Кравець

Фізико-механічний інститут імені Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів, A.B.Chornenkyi@gmail.com

Розглянемо двовимірну задачу теорії пружності для анізотропної площини S_0 (матриці), із гладким криволінійними анізотропними включеннями $S_j\ (j=1,...,J)$, коли за переходу їх контурів L_j напруження неперервні

$$[N(t)+iT(t)]^{+}=[N(t)+iT(t)]^{-},\ t\in L_j,\ j=\overline{1,J}\ ; \tag{1}$$

і стрибки похідної вектора переміщень рівні нулю:

$$(d/dt)\{[u_x(t)+iu_y(t)]^{+}-[u_x(t)+iu_y(t)]^{-}\}=0,\ t\in L_j,\ j=\overline{1,J}\ . \tag{2}$$

Тут верхні індекси «+» і «–» вказують на граничні значення відповідних величин, коли $z=x+iy\to t\in L_j$ відповідно зліва (+) та справа (–) щодо вибраного додатного напряму обходу контуру L_j. Анізотропна площина S_0 на нескінченності знаходиться під дією двовісного розтягу та зсуву

$$\sigma_y^{\infty}=p,\quad \sigma_x^{\infty}=q,\quad \tau_{xy}^{\infty}=\tau\,. \tag{3}$$

Комплексні потенціали напружень для матриці та включень є кусково-аналітичні функції у допоміжних математичних площинах $z_k^j=x+\mu_k^j y$ (μ_k^j – корені характеристичного рівняння для j-го анізотропного матеріалу, k=1;2) і можуть бути подані через інтеграли типу Коші [1]

$$\Phi_k^j(z_k^j)=\Gamma_k^j+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k^j}\frac{\phi_k'^j(\tau_k^j)}{\tau_k^j-z_k^j}d\tau_k^j=\Gamma_k^j+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\phi_k'^j(\tau_k^j)}{\tau_k^j-z_k^j}\frac{d\tau_k^j}{d\tau}d\tau,\ \ z\in S_j,\ \ j=\overline{0,J}\ ; \tag{4}$$

де Γ_k^j – комплексні сталі [1], що описують однорідний напружений стан матриці та включень за навантаження (3), $L=L_j$ – для включень S_j (j=1,…,J), $L=\cup L_j$ – для матриці S_0. Використавши відомий зв'язок між густинами потенціалів (4) та стрибком похідної переміщень на контурі тріщини в анізотропній площині [2], отримаємо:

$$\Phi_k^j(z_k^j)=\Gamma_k^j+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{c_{1k}^j g'^j(\tau)d\tau+c_{2k}^j\overline{g'^j(\tau)d\tau}}{\tau_k^j-z_k^j},\ k=1;2,\ z\in S_j,\ \ j=\overline{0,J}\ , \tag{5}$$

де коефіцієнти c_{ik}^j (для j-го анізотропного матеріалу) знайдено зі системи двох комплексних лінійних алгебричних рівнянь [2].

Задовольнивши за допомогою граничних значень комплексних потенціалів напружень (5) крайові умови (1), (2), отримаємо систему $2J$ сингулярних інтегральних рівнянь першого та другого родів. Для одного включення (J=1, $L = L_1$) вона матиме вигляд:

$$\int_L \left\{ \left[K^1(\tau,t) g'^1(\tau) + K^0(\tau,t) g'^0(\tau) \right] d\tau + \left[L^1(\tau,t) \overline{g'^1(\tau)} + L^0(\tau,t) \overline{g'^0(\tau)} \right] d\bar{\tau} \right\} = 0 ;$$

$$-4\{a_{11}^0 g'^0(t) + a_{11}^1 g'^1(t)\} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[M^1(\tau,t) g'^1(\tau) + M^0(\tau,t) g'^0(\tau) \right] d\tau + \right.$$
$$\left. + \left[N^1(\tau,t) \overline{g'^1(\tau)} + N^0(\tau,t) \overline{g'^0(\tau)} \right] d\bar{\tau} \right\} = -i\Gamma_*(t), \quad t \in L. \tag{6}$$

Ядра $K^j(\tau,t),\ L^j(\tau,t),\ M^j(\tau,t),\ N^j(\tau,t),\ j = 0;1$ визначаються механічними та геометричними параметрами задачі, поданими у комплексних площинах z^0, z^1; a_{11}^0, a_{11}^1 – пружні сталі анізотропних матриці (j=0) та включення (j=1).

$$\Gamma_*(t) = [(p_1^1 + iq_1^1)\frac{dt_1^1}{dt}\Gamma_1^1 - (p_1^0 + iq_1^0)\frac{dt_1^0}{dt}\Gamma_1^0] + [(\bar{p}_1^1 + i\bar{q}_1^1)\frac{d\bar{t}_1^1}{dt}\bar{\Gamma}_1^1 - (\bar{p}_1^0 + i\bar{q}_1^0)\frac{d\bar{t}_1^0}{dt}\bar{\Gamma}_1^0] +$$
$$+[(p_2^1 + iq_2^1)\frac{dt_2^1}{dt}\Gamma_2^1 - (p_2^0 + iq_2^0)\frac{dt_2^0}{dt}\Gamma_2^0] + [(\bar{p}_2^1 + i\bar{q}_2^1)\frac{d\bar{t}_2^1}{dt}\bar{\Gamma}_2^1 - (\bar{p}_2^0 + i\bar{q}_2^0)\frac{d\bar{t}_2^0}{dt}\bar{\Gamma}_2^0],$$

де $p_k^j, q_k^j, j = 0;1, k = 1;2$ визначено через пружні сталі матеріалів [1].

На основі числового розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь (6) визначено розподіли контурних $\sigma_s^+(t), \sigma_s^-(t)$ та контактних напружень $N^+(t) + iT^+(t) = N^-(t) + iT^-(t)$ зі сторони включення (+) та матриці (-). Розглянуто різні рівні ортотропії та жорсткості анізотропних матеріалів матриці та включення для низки форм гладких контурів включення.

1. *Savruk M. P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.
2. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Curvilinear cracks in anisotropic plane and limit passage to the degenerate material // Materials Science. – 2014. – **50**, № 2. – P. 189–200.

INTEGRAL EQUATIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS ANISOTROPIC BODY

The plane problem of the theory of elasticity for an anisotropic body with anisotropic inclusions is considered. For the one inclusion the obtained system of singular integral equations of the first and second kind is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations by the quadrature method. The distributions of contour and contact stresses at the contour of inclusion of various shapes were determined.