КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ

Роман Кушнір, Ольга Соляр

[1,2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
[1]roman.kushnir.54@gmail.com, [2]solyarolya@gmail.com

Розглядається контактна задача для шару $0 < z < h$, який розміщений на жорсткій гладкій основі при $z = 0$. Приймемо, що до верхньої межі прикладено штамп, причому взаємодія відбувається з тертям. Дотичні напруження в області контакту, яка наперед незадана, описуються за законом Кулона. Позначимо модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона шару через G, ν, форма штампа, який приймаємо жорстким, в області контакту описується рівнянням $z = f(x, y)$. В області контакту діють нормальні напруження σ_z та дотичні напруження $\tau_{xz} = -k\sigma_z$ де $k -$ коефіцієнт тертя. Для запису інтегрального рівняння задачі попередньо знайдено переміщення верхньої межі шару, зумовлені зосередженими силами $(0, 0, Z)$ та $(X, 0, 0)$, які прикладені в довільній точці верхньої межі (ξ, η, h) ,

Для їх знаходження спочатку використано операторний метод Лур'є. В результаті переміщення записано у вигляді рядів з коефіцієнтами, які містять функції Макдональда. Ці ряди швидкозбіжні при знаходженні переміщень на великих відстанях від сил. Для знаходження переміщень в точках близьких до прикладених сил використано інтегральне перетворення Ханкеля.

Приймаючи відомими нормальні напруження і інтегруючи по області контакту, для визначення нормальних переміщень межі $z = h$, отримуємо

$$w(x, y, h) = \gamma h \int_D \sigma_z(\xi, \eta, h) K(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \tag{1}$$

де $\gamma = \dfrac{1-\nu}{2\pi G}$, $K(\alpha, \beta) = F_0(\alpha, \beta) + F_1(\alpha, \beta)$. $F_0 = \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k \dfrac{x-\xi}{h\rho^2}$,

$$F_1 = \begin{cases} f_Z(\rho) - 2\dfrac{x-\xi}{h\rho} f_X(\rho), \ \rho \le 3, \\ -\dfrac{1}{\rho} - 2\operatorname{Re}\sum_i tg^2\alpha_i K_0(\alpha_i\rho) - k\dfrac{x-\xi}{h\rho}\left(\dfrac{1}{2\rho} + 2\operatorname{Re}\left[\dfrac{\alpha_1}{\cos^2\alpha_1} K_1(\alpha_1\rho)\right]\right), \ \rho > 3. \end{cases} \tag{2}$$

$\rho = R/h$, $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, $K_{0,1}(z) -$ функції Макдональда, $\alpha_i -$ корені з додатною дійсною частиною рівняння $\sin 2\alpha / 2\alpha + 1 = 0$.

Функції $f_{Z,X}(\rho)$, які визначені на основі перетворення Ханкеля на проміжку $\rho \le 3$, апроксимовані поліномами. Коефіцієнти поліномів знайдено методом найменших квадратів. Розглянуто випадок, коли дотичні напруження діють в напрямку дії осі Ox. При заданих переміщеннях штампа рівняння (1) є інтегральним рівнянням відносно невідомих контактних напружень.

Для фрикційних задач області контакту, як правило наперед невідомі і тому для їх розв'язування використано числовий метод, який грунтується на рівностях-нерівностях Сіньйоріні та методі квадратичного програмування.

У підході Сіньоріні вводиться в розгляд область S, яка вміщує в собі область контакту *D*. Довизначаємо функцію $\sigma(x,y)=\sigma_z(x,y,h)$ в області S поза областю *D* нулем. Для відшукання контактних напружень приходимо до задачі знаходження мінімуму величини

$$J=\int_S\int_S \sigma(x,y)\sigma(\xi,\eta)K(x-\xi,y-\eta)dS_{\xi\eta}dS_{xy}-\int_S \sigma(x,y)f(x,y)dS-w_0\int_S \sigma(\xi,\eta)dS\,, \quad (3)$$

за умови

$$\int_S \sigma(\xi,\eta)K(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta - f(x,y)-w_0\le 0,\ \text{при}\ \ \sigma\le 0,\ (x,y)\in S\,, \qquad (4)$$

де w_0 – вертикальне зміщення штампа.

При виконанні умов (4) величина J є додатною і дорівнює нулю на точному розв'язку контактної задачі. Сформульована задача є задачею квадратичного програмування, розв'язавши її отримуємо розподіл контактних тисків на всіх ділянках контакту, причому між ділянками контакту отримуємо нульові напруження. З використанням розробленого алгоритму розглянуто фрикційну контактну задачу про взаємодію шару з штампами різної форми. Широке коло контактних задач для шару зводяться до випадку, коли функція, яка описує геометрію основи штампа має вигляд $f(x,y)=Ax^2+By^2$. Розрахунки проведено при різних A і B, різних значеннях взаємного проникнення (w_0), різних значеннях коефіцієнтів тертя (k) та Пуассона (ν).

Отже, побудовано чисельний алгоритм розв'язування фрикційної контактної задачі про взаємодію шару з штампами складної форми. Алгоритм грунтується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування. Проведена оцінка достовірності отриманих результатів. Показано, що алгоритм є ефективним і дає змогу розв'язувати фрикційні контактні задачі з контрольованою точністю.

A CONTACT PROBLEM FOR A LAYER WITH FRICTION EFFECTS

A numerical algorithm has been developed to solve the frictional contact problem involving the interaction of a layer with stamps of complex shapes. The algorithm combines the method of integral equations and inequalities with quadratic programming. It is shown that the developed algorithm is efficient and allows solving frictional contact problems with controlled accuracy.