

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ АКсіАЛЬНО ФУНКціОНАЛЬНО ГРАДіЕНТНИХ БАЛОК КРИВОЛіНіЙНО ЗМіННОГО ПЕРЕРіЗУ

В'ячеслав Бурлаєнко<sup>1</sup>, Віктор Веретельник<sup>2</sup>, Світлана Дімітрова<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Національний технічний університет «ХПІ», м. Харків, <sup>1</sup>burlayenko @yahoo.com, <sup>2</sup>veretelnyk.victor@gmail.com, <sup>3</sup>s.dimitrovaburlayenko @gmail.com

Використання балок змінного перерізу дає змогу оптимізувати спів відношення ваги та міцності. Поєднання функціонально градієнтних матеріалів з різноманітною геометрією забезпечує необхідні характеристики при заданій вазі та адаптує балкові конструкції до специфічних вимог.

Динаміка матеріально неоднорідних балок зі змінним поперечним перерізом активно досліджується [4]. Проте, комплексні та систематичні дослідження модальних характеристик аксіально функціонально градієнтних балок з криволінійним змінним перерізом досі недостатньо розроблені [2].

Поточне дослідження зосереджується на аналізі власних коливань балок із аксіально функціонально градієнтних матеріалів (АФГМ) з криволінійно змінними поперечними перерізами вздовж їхньої довжини. Розглядаються балки різних форм, включаючи форми увігнутих та опуклих конічних перерізів, як показано на Рис. 1.

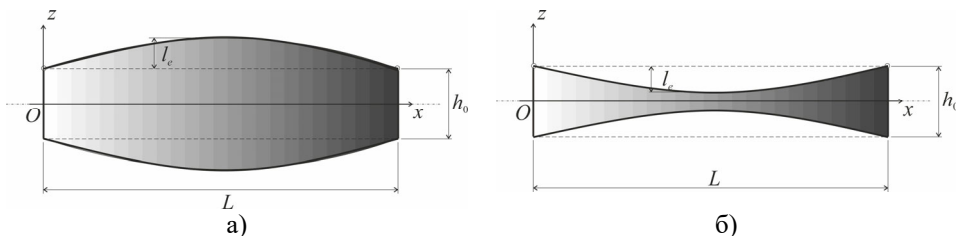


Рис. 1. Геометрії АФГМ балок змінного перерізу: (а) опукла форма; (б) увігнута форма.

Припускається також, що матеріальні властивості балки, зокрема модуль Юнга, модуль зсуву та щільність матеріалу, змінюються вздовж поздовжньої осі за експоненціальною (1) або поліноміальною (2) функцією:

$$P(x) = P_0 V_e, \quad V_e = e^{\gamma_e(1-a(1-x/L))} \quad (1)$$

та

$$P(x) = P_c + (P_m - P_c) V_c, \quad V_c = (1 - b(1 - x/L))^{\gamma_c} \quad (2)$$

де  $P(x)$  - будь-яка з матеріальних властивостей,  $P_0$  - її значення при  $x = 0$ , а  $P_c$  і  $P_m$  - властивості металевих і керамічних складових функціонально

градієнтного матеріалу відповідно.

Рівняння руху балки виведено на основі принципу Гамільтона в рамках теорії балки Тимошенка. Ці рівняння зі змінними коефіцієнтами та різними граничними умовами розв'язуються методом диференціального перетворення (МДП) [3].

Запропонований підхід перевірено шляхом порівняння розрахованих власних частот із даними з літератури та результатами тривимірного аналізу, проведеного в пакеті ABAQUS. Для врахування матеріальних градієнтів у скінченно-елементних моделях використано користувацьку підпрограму матеріалу (UMAT) [1].

У дослідженні детально вивчено вплив різних факторів на власні частоти АФГМ балок, зокрема параметрів матеріальних законів, форм поперечного перерізу, коефіцієнта струнності та граничних умов. Це дозволяє глибше зрозуміти модальну динаміку таких балок і надає цінну інформацію для оптимізації проектування балкових конструкцій з функціонально градієнтних матеріалів.

1. *Burlayenko, V.N., Kouhia, R., Dimitrova, S.D.* One-dimensional vs. three-dimensional models in free vibration analysis of axially functionally graded beams with non-uniform cross-sections // *Mech. Compos. Mater.* – 2024. – **60**, No. 1. – P. 83–102.
2. *Burlayenko, V.N., Kouhia, R., Dimitrova, S.D.* Free vibration analysis of curvilinearly tapered axially functionally graded material beams. *Appl. Sci.* – 2024. – **14**, No. 1. – P. 1–22.
3. *Pukhov, G. E.* differential transformations of functions and equations. – Kyiv: Naukova Dumka, 1980. – 420 p.
4. *Trapezon, K., Trapezon, A.* Analytical study of the natural bending oscillations of a concave beam with parabolic change in thickness // *East.-Eur. J. Enterp. Technol.* – 2021. – **3/7**, No. 111. – P. 15–23.

#### **ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS IN AXIALLY FUNCTIONALLY GRADED BEAMS WITH CURVILINEAR VARIABLE CROSS-SECTIONS**

*This study investigates the free vibration behavior of beams made of axially functionally graded materials (AFGM) with curvilinear variable along their length cross-sections. The beams feature a range of geometries, including concave and convex conic sections, and different material properties that vary according to axial polynomial and exponential profiles. The equations of motion are derived using Hamilton's principle within the framework of Timoshenko beam theory. These equations, under various boundary conditions, are solved using the differential transform method (DTM). A comprehensive analysis is conducted to explore the effects of multiple factors on the natural frequencies of functionally graded beams, including material law parameters, variable beam geometries, slenderness ratios, and boundary conditions.*