ДРОБОВІ ПОХІДНІ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Ярослав П´янило

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,
danylo794@gmail.com

Основою побудови математичних моделей ріного роду процесів є диференціальні рівняння або системи диференціальних рівнянь як звичайних, так і в частинних похідних. Як правило, такий підхід дозволяє описувати процеси в даний час і в даній точці. В такому випадку не враховується вплив сусідніх областей та історії процесу. Одним ііз методів вирішення цього питання є застосування дробового інтегрального числення, зокрема похідних дробового порядку [1,2]. На цей час найбіль вживаними є похідні дробового порядку у термінах Капуто

$$ {}^{c}D_{\tau}^{\delta} = \frac{{}^{c}\partial^{\delta}}{\partial\tau^{\delta}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\delta)}\int_{0}^{\tau}\frac{\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\delta-m}}d\xi , $$

де $m=[\alpha]$, $[\cdot]$ – ціла частина дійсного числа, та Ріммана-Ліувіля -

$$ D_{\tau}^{\delta} = \frac{{}^{c}\partial^{\delta}}{\partial\tau^{\delta}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\delta)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\int_{0}^{\tau}\frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\delta-m}}d\xi . $$

Між похідними Капуто і Ріммана-Ліувіля має місце наступний зв’язок [12]

$$ {}^{C}D_{\tau}^{\delta}\varphi = D_{\tau}^{\delta}\varphi - \sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^{k-\delta}}{\Gamma(k-\delta+1)}\frac{\partial^{k}}{\partial\tau^{k}}\varphi . $$

Однак в багатьох роботах є узагальнення цих операторів на різні види інтегральних ядер: У 2014 році Гарра та ін. ввів дробову похідну у виду

$$ D_{+}^{(\alpha)}f(x) = \int_{a}^{x}(\tau-t)^{\mu+n-\beta-1}\,E_{\alpha,\mu+n-\beta}^{\varphi}\left(\varpi(x-t)^{\alpha}\right)\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)\,dt , $$

де $E_{\alpha,\mu+n-\beta}^{\varphi}\left(\varpi(x-t)^{\alpha}\right)$ — узагальнена функція Міттаг-Леффлера

У 2015 році Капуто і Фабріціо представили дробову похідну з показникова функція у вигляді

$$ D_{+}^{(\alpha)}f(x) = \frac{(2-\alpha)\Im(\alpha)}{2(1-\alpha)}\int_{a}^{x}\exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-t)\right)\frac{df(t)}{dt}dt , $$

де $\Im(\alpha)$ - параметр.

В літературі відомо значно більше узагальнень диференціального числення дробового порядку [2]. Незважаючи на велику кількість похідних дробового порядку застосування їх в математичному моделюванні фізичних процесів пов´язане з певною кількістю недоліків, зокрема: 1) ядра інтегродиференціальних рівнянь не містять параметрів середовища та процесів, які вивчаються; 2) невідомі критерії вибору виду похідної дробового порядку та її порядку тощо.

Застосування похідних дробового порядку до математичного моделювання масопереносу в складних пористих середовищах підтверджує ефективність їх ефективність – отримані результати відповідають якісній картині процесу та підтримують балансові співвідношення незалежно від параметру порядку похідної. Однак вказані вище недодліки залишаються. Слід відмітити, що поряд в вказаними недоліками у випадку моделювання фізичних процесів є наявними і інші проблеми, як методичні, так і обчислювальні.

Відзначимо, що для розв´язування крайових задач в термінах похідних дробових порядків побудовано значну кількість методів, в основному числових: дискретизація інтегродиференціальних рівнянь; застосування квадратурних формул; інтерполяція в базисі ортогональних многочленів; застосування вейвлет методу тощо.

Ефкетивне застосування дробового числення пов´язане з вирішенням ряду задач, основними з яких є:

- оптимальний вибір виду дробової похідної;
- критерій вибору порядку дробової похідної;
- вибір методу розв´язування сформульованих крайових задач, який би враховував точність час обчислення.

1. *Lopuh N. B., Pyanylo Ya. D.* Mathematical modeling of gas filtration in the bottomhole zone of underground gas storage wells using fractional derivatives // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – **279**, No. 2. – P. 282–292.
2. *Yang X.-J.* General fractional derivatives theory, methods and applications**.** – Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2019. – 361 p.

FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES

Derivatives of fractional orders are considered in the paper in relation to mathematical modeling of various kinds of processes. The main types of derivatives of fractional order, the methods of solving the corresponding integrodifferential equations are presented, the main advantages and unsolved problems are noted. The effectiveness of the application of derivatives of fractional orders in mathematical modeling of mass transfer processes in complex porous structures is shown.