ЗНАХОДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ СИСТЕМИ ПОЛІНОМІВ У ЗАДАЧІ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Володимир Макаров[1], Наталія Майко[2], Вячеслав Рябічев[3]

[1]Інститут математики НАН України, м. Київ, Makarovlmath@gmail.com
[2,3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, [2]mayko@knu.ua, [3]ryabichev@knu.ua

Одним із ефективних методів розв'язання абстрактних диференціальних рівнянь з необмеженим операторним коефіцієнтом є метод перетворення Келі [1]. Істотну роль у ньому відіграє система поліномів, яка входить у формули для реалізації методу. У випадку рівняння з похідною дробового порядку з постійним операторним коефіцієнтом виникають поліноми Лагерра–Келі [2]. Проілюструємо це на прикладі задачі Коші для абстрактного еволюційного рівняння з секторіальним оператором A у банаховому просторі X [3]:

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_t^{-\alpha} Au = 0,\ t>0,\\ u(0)=u_0,\end{aligned}\quad \text{де}\ (\partial_t^{-\alpha}u)(t)=\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}u(s)ds, & -1<\alpha<0,\\ \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(s)ds, & 0<\alpha<1.\end{cases} \tag{1}$$

Випадок $-1<\alpha<0$ відповідає моделюванню субдифузійного процесу, а випадок $0<\alpha<1$ становить інтерес для задач в'язкопружності. Розв'язок задачі (1) можна подати у вигляді

$$u(t)=E_{1+\alpha}(-t^{1+\alpha}A)u_0=\sum_{j=0}^{\infty}(-t^{1+\alpha}A)^j\frac{1}{\Gamma\big(1+j(1+\alpha)\big)}u_0,$$

де $E_{\mu}(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{z^j}{\Gamma(1+j\mu)}$, $z\in\mathbb{C}$ $(\mu>0)$, – функція Міттаг-Леффлера.

Означення 1 [2]**.** Функції $p_k^{(\alpha)}(t^{1+\alpha})$, які утворюються після розвинення в ряд Маклорена за степенями q функції

$$E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)^j\frac{1}{\Gamma\big(1+j(\alpha+1)\big)}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^{(\alpha)}(t^{1+\alpha})q^n,$$

$$p_n^{(\alpha)}(t^{1+\alpha})=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial q^n}E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)\Bigg|_{q=0},\quad \alpha>-1,$$

називаються *функціями Лагерра–Келі*, а поліноми $p_n^{(\alpha)}(x)$ – *поліномами Лагерра–Келі* (скорочено ПЛК).

Поліноми Лагерра–Келі $p_n^{(\alpha)}(x)$ можна подати в явному вигляді:

$$p_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{s+1}C_{n-1}^{s}}{\Gamma\left(1+(s+1)(\alpha+1)\right)}x^{s+1},\quad n=1,2,\dots,\quad p_0^{(\alpha)}(x)\equiv 1\,. \tag{2}$$

Замість ПЛК (2) доцільно розглядати *модифіковані* ПЛК (скорочено МПЛК)

$$v_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{x}\,p_{n+1}^{(\alpha)}(x)=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{s+1}C_{n}^{s}}{\Gamma\left(1+(s+1)(\alpha+1)\right)}x^{s},\quad n=0,1,\dots \tag{3}$$

Означення 2. *Звичайним диференціальним рівнянням (скорочено ЗДР) m-го порядку загального вигляду з поліноміальними коефіцієнтами над полем раціональних чисел* назвемо рівняння

$$L_m u(x)\equiv\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{p=0}^{j}a_p^{(j)}\,x^p\right)\frac{d^j u(x)}{dx^j}=0\,. \tag{4}$$

Справджується таке основне твердження.

Теорема. Нехай $\alpha=-k/(k+1)$ $(k\in\mathbb{N})$. Тоді система МПЛК (3) задовольняє ЗДР (4) порядку $m=k+2$

$$L_{k+2}\,u(x)\equiv x\frac{d^{k+2}u(x)}{dx^{k+2}}+\left(-(k+1)x^{k+1}+k+2\right)\frac{d^{k+1}u(x)}{dx^{k+1}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}C_{k+1}^{j}(k+1)\,(n-k)_j\,x^{k+1-j}\,\frac{d^{k+1-j}u(x)}{dx^{k+1-j}}=0.$$

Для виконання символьних перетворень було використано засоби системи комп'ютерної математики Maple.

1. *Gavrilyuk, I.P.*, *Makarov, V.L.* The Cayley transform and the solution of an initial value problem in Hilbert space // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 1994. – **15**, No. 5–6. – P. 583–598.
2. *Макаров В.Л.*, *Макаров С.В.* Функції і поліноми Келі // Допов. НАН України. – 2022. – № 5. – С. 3–9.
3. *Mclean, W., Thomée, V.* Numerical solution of a fractional order evolution equation // J. Integral Eq. Appl. – 2010. – **22**, No. 1. – P. 57–94.

THE RECONSTRUCTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE SYSTEM OF POLYNOMIALS IN THE PROBLEM WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

We develop the algorithm of reconstructing ODE of the minimum order with polynomial coefficients over the field of rational numbers for a given system of polynomials.