

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ВИПУСК 6

ЛЬВІВ 2024

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

ВИПУСК 6

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ЗА ЗАГАЛЬНОЮ РЕДАКЦІЄЮ
АКАДЕМІКА НАН УКРАЇНИ
Р.М. КУШНІРА

ТА ЧЛЕНА-КОРЕСПОНДЕНТА НАН УКРАЇНИ
Ю.В. ТОКОВОГО

ЛЬВІВ – 2024

Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. – 222 с.

Збірник містить наукові праці, присвячені актуальним проблемам математичного моделювання у механіці деформівних твердих тіл, математичних методів механіки та термомеханіки, механіки неоднорідних тіл, метаматеріалів та наноструктур, механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями, динаміки неоднорідних середовищ, оптимізації та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем, а також широкого кола питань, пов'язаних з проблемами, які стосуються оборони Держави та відновлення інфраструктури, методів та засобів навчання у галузі механіки та прикладної математики. Вони були предметом обговорення на 11-тій Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», яка проходила 24–26 вересня 2024 р. у Львові в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за підтримки Національного комітету України з теоретичної і прикладної механіки, Українського товариства з механіки руйнування матеріалів та Наукового товариства імені Шевченка.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Редактори:

Роман КУШНІР, Юрій ТОКОВИЙ

Заступники редакторів:

Олександр ГАЧКЕВИЧ, Георгій СУЛИМ

Відповідальні секретарі:

Віра ПАКОШ, Оксана ВОВК

Члени редколегії:

Олександр АНДРЕЙКІВ,
Олександр ГРИГОРЕНКО,
Ярослав ЖУК,
Михайло МАРЧУК,
Володимир НАЗАРЕНКО,
Всеволод ПОПОВ
Михайло САВРУК,

Михайло АНДРІЙЧУК,
Мирослав ДЕМИДЮК,
Володимир ЛОБОДА,
Валерій МАТУС,
Олексій НІКОЛАЄВ,
Ярослав П'ЯНИЛО,
Євген ЧАПЛЯ

Вячеслав БОГДАНОВ,
Ігор ДМИТРАХ,
Володимир МАКАРОВ,
Віктор МИХАСЬКІВ,
Ярослав ПАСТЕРНАК,
Ярема РУЩИЦЬКИЙ,
Михайло ЯДЖАК

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
PIDSTRYHACH INSTITUTE FOR APPLIED PROBLEMS
OF MECHANICS AND MATHEMATICS

MATHEMATICAL PROBLEMS OF MECHANICS OF NONHOMOGENEOUS STRUCTURES

SIXTH ISSUE

COLLECTION OF SCIENTIFIC PAPERS

EDITED BY
ACADEMICIAN OF NAS OF UKRAINE
R.M. KUSHNIR

ANDCORRESPONDING MEMBER OF NAS OF UKRAINE
YU.V. TOKOVYY

LVIV – 2024

Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures: collection of scientific papers of the 11th International Scientific Conference / Edited by R.M. Kushnir & Yu.V. Tokovyy // L'viv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. – 2024. – Issue 6. – 222 c.

This proceedings book contains scientific papers covering current trends in mathematics and mechanics, i.e., mathematical modelling in mechanics of deformable solids, mathematical methods of mechanics and thermomechanics, mechanics of nonhomogeneous solids, metamaterials, and nanostructures, mechanics of contact interaction, solids with cracks and thin inclusions, dynamics of nonhomogeneous media, optimization and design structural elements and biomechanical systems, as well as wide spectrum of problems concerned with the National defense and restoration of the infrastructure along with methods and means for the education in the areas of mechanics and applied mathematics. The papers were the subject matter of the discussions on the 11th International Conference «Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures», held on September 17–20, 2019 in Lviv at the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine under the support of the National Committee of Ukraine on Theoretical and Applied Mechanics, Ukrainian Society of the Fracture Mechanics of Materials, and Shevchenko Scientific Society.

The book may be useful to scientists, PhD students, post-graduate students, masters and students of relevant specialties.

Editors:

Roman KUSHNIR, Yuriy TOKOVYY

Associate Editors:

Oleksandr Hachkevych, Georgiy SULYM

Board Secretaries:

Vira PAKOSH, Oksana VOVK

Board Members:

Oleksandr ANDREYKIV,	Mykhailo ANDRIYCHUK,	Viatcheslav BOGDANOV,
Oleksandr GRIGORENKO,	Myroslav DEMYDYUK,	Igor DMYTRAKH,
Yaroslav ZHUK,	Volodymyr LOBODA,	Volodymyr MAKAROV,
Mykhailo MARCHUK,	Valeriy MATUS,	Victor MYKHASKIV,
Volodymyr NAZARENKO,	Oleksiy NIKOLAYEV,	Yaroslav PASTERNAK,
Vsevolod POPOV,	Yaroslav PYANYLO,	Jeremiah RUSHCHITSKY,
Mykhailo SAVRUK,	Yevhen CHAPLYA,	Mykhaylo Yadzhak

З М І С Т

Секція «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ
ТВЕРДИХ ТІЛ»

Вайсфельд Наталя, Журавльова Зінаїда: Просторова задача поро- пружності для півнескінченного клину.....	19
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0101.pdf	
Вайсфельд Наталя, Процеров Юрій, Толкачов Андрій: Осесиметрич- не поле напружень у пружному просторі зі сферичною порожни- ною.....	21
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0102.pdf	
Сенченков Ігор, Червінко Ольга: Вібродозігрів твердопаливних дви- гунів при транспортуванні у вертикальному положенні.....	23
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0103.pdf	
Стеблянко Павло, Петров Олександр, Черняков Юрій: Феноменоло- гічна теорія пластичної течії для матеріалів із зоною плинності.....	25
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0104.pdf	
Чернуха Ольга, Білушак Юрій, Чучвара Анастасія, Білушак Галина: Математичне моделювання процесів перенесення в шарі за наявності експериментальних даних на його поверхнях.....	27
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0105.pdf	
Юрчук Василь: Одна особливість еволюції початкового профілю нелі- нійно пружних хвиль.....	29
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0106.pdf	
Івасько Роман, Станік-Беслер Аніда, Івасько Наталія: Математичне моделювання фізико-механічних процесів у шарі за дії струмів, періодичних відносно поздовжньої координати.....	31
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0107.pdf	
Нагірний Тарас, Червінка Костянтин: Про вплив обробки поверхні на напружено-деформований стан тонких плівок.....	33
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0108.pdf	
Махоркін Микола, Махоркін Ігор: Визначення сингулярностей напру- жень в анізотропному композитному клині за поздовжнього зсуву.....	35
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0109.pdf	
Бардин Тетяна, Дробенко Богдан: Комп'ютерне моделювання проце- сів деформування біметалевих контактних термоперетворювачів.....	37
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0110.pdf	

Кононов Юрій: Про стабілізацію обертання у середовищі з опором вільного гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою обертання його частин.....	39
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0111.pdf	
Шинкаренко Георгій, Малашняк Павло: Аналіз h-адаптивних апроксимацій методу скінченних елементів в задачі статичної циліндричної оболонки.....	41
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0112.pdf	
Яковенко Ніна: Чисельне моделювання поверхневого зміцнення циліндра, опроміненого термічним імпульсом.....	43
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0113.pdf	
Чапля Євген, Гера Богдан: Задача теплопровідності для тіла з поверхневим покриттям при неоднорідному нагріві.....	44
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0114.pdf	
Шикіла Олена, Жукова Наталія: Прогнозування нелінійних деформативних властивостей просторово армованих волокнистих матеріалів.....	45
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0115.pdf	
Тучапський Роман: Розрахунок локально навантаженої шарнірно закріпленої тонкої секторальної кругової пластинки на основі класичної та деяких уточнених теорій.....	47
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0116.pdf	
П'янило Ярослав, Лянце Ганна, Лопатьєв Анатолій, Власов Андрій, Хоркавий Юрій: Моделювання процесу поширення крові в м'яких тканинах живих організмів з врахуванням деформації.....	48
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0117.pdf	
Гарт Етері, Шебанов Олександр: Про способи зниження концентрації напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці з кількома еліптичними включеннями.....	49
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0118.pdf	
Терьохін Богдан, Гарт Етері: Комп'ютерне моделювання впливу кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу на коефіцієнт концентрації напружень у циліндричній оболонці з квадратним отвором.....	51
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0119.pdf	
Сметанкіна Наталя: Математичне моделювання процесів пошкодження обтічника літака при зіткненні з птахами.....	53
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0120.pdf	

Barvitskyi Pavlo, Karpinos Boris, Prikhna Tetiana, Kulish Vitaliy: Improvement of the mechanical characteristics of impact-resistant and ultrahightemperature boride- and carbide-based ceramic composites.....	55
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0121.pdf	
Шинкаренко Георгій, Танчинець Василь, Вовк Олександр: Експоненціальний апостеріорний оцінювач похибок апроксимацій МСЕ для задач конвекції-дифузії.....	57
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0122.pdf	
Рушицький Ярема: Гіпопружний матеріал. Лінеаризована теорія. Хвилі. Підхід Крістоффеля.....	59
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0123.pdf	
Волчанські Томаш, Гачкевич Олександр, Козакевич Тереза: Математичні проблеми термомеханіки при високо температурному нагріві маловуглецевих низьколегованих сталевих тіл за врахування структурних залишкових деформацій.....	61
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0124.pdf	
Білушак Юрій, Гера Богдан, Чапля Євген, Чернуха Ольга: Процеси переносу в недеформівних пористих матеріалах, насичених водним електролітом.....	63
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0125.pdf	
Секція «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ»	
Бомба Андрій, Каштан Сергій, Кушнір Олекса: Методи комплексного аналізу моделювання глобальних процесів руху поверхневих та підземних вод.....	65
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0201.pdf	
Вовк Оксана: Дослідження термопружного стану контактуючих термочутливих тіл за складного теплообміну.....	67
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0202.pdf	
Ірза Євгеній: Застосування методу зважених залишків до задач нагріву структурно неоднорідних тіл.....	69
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0203.pdf	
Ревенко Віктор: Часткові та загальні розв'язки теорії термопружності у декартовій і циліндричній системах координат.....	71
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0204.pdf	
Ткаченко Ірина, Антоненко Ніна: Про один підхід до розв'язання тривимірної задачі термопружності для шаруватої основи з неідеальним тепловим контактом між шарами.....	73
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0205.pdf	

Краснопольська Тетяна: Хрестоподібні хвилі в рідині в частково заповненому «співаючому бокалі».....	75
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0206.pdf	
Григоренко Олександр, Борисенко Максим, Бойчук Олена: Чисельний аналіз вільних коливань тонкостінних та товстостінних циліндричних оболонок.....	77
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0207.pdf	
Андрійчук Михайло, Савенко Петро: Дослідження проблеми неєдності розв'язків інтегрального рівняння типу Урисона.....	79
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0208.pdf	
Шевчук Віктор: Наближений підхід до розв'язування задач нестационарної теплопровідності для тіл з тонкими неоднорідними покриттями.....	81
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0209.pdf	
Пастернак Вікторія, Сулим Георгій: Фундаментальний розв'язок та інтегральні рівняння просторової термовологопружності анізотропних тіл.....	82
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0210.pdf	
Гарматій Галина, Калиняк Богдан, Глобчак Михайло: Термонапруження у довгому порожнистому термочутливому циліндрі, виготовленому з функційно-градуйованого матеріалу.....	83
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0211.pdf	
Горечко Олександр, Заводовська Надія: Вплив пружності кріплення попередньо нагрітої круглої пластинки на її вібраційні характеристики.....	85
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0212.pdf	
Ніколаєв Олексій, Крайниченко Аліна: Періодичні системи антитріщин у трансверсально-ізотропному просторі.....	87
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0213.pdf	
Процюк Борис: Обернені квазістатичні задачі термопружності для багатошарового циліндра.....	88
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0214.pdf	
Dmytruk Anatolii, Torskyu Adrian: Convective drying the multi-component porous materials: software development.....	89
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0215.pdf	
Гусаревич Яніна, Дробенко Богдан: Оцінювання точності та збіжності різних скінченно-елементних розв'язків задачі Кірша.....	91
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0216.pdf	

Жук Ярослав, Мельниченко Микола, Гусак Віталій: Поширення імпульсу напруження вздовж тонкого термопружного стержня при тепловому імпульсному збудженні.....	93
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0217.pdf	
Грицина Мар'ян, Грицина Ольга: Аналіз поведінки термопружного шару в умовах теплового удару на основі розширеної моделі Лорда–Шульмана.....	95
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0218.pdf	
Постолак Леся, Токовий Юрій: Визначення невідомих силових навантажень на внутрішній поверхні скінченного порожнистого циліндра.....	97
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0219.pdf	
Демидов Олександр, Попов Всеволод: Визначення хвильових полів у пружному циліндрі методом скінченних різниць за часом при нестационарному навантаженні.....	99
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0220.pdf	
Секція «МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ, МЕТАМАТЕРІАЛІВ ТА НАНОСТРУКТУР»	
Курпа Лідія, Шматко Тетяна, Лінник Ганна, Морачковська Ірина: Вільні коливання сендвич пластин з ауксетичним сотовим заповнювачем.....	101
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0301.pdf	
Калиняк Богдан: Забезпечення заданого розподілу термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі.....	103
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0302.pdf	
Марчук Михайло, Хом'як Микола: Алгоритмічні особливості комбінованого правила усереднення ефективних властивостей шаруватих композитів.....	105
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0303.pdf	
Сеник Юлія: Дослідження зміни ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на прикладі неоднорідного електропровідного шару.....	106
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0304.pdf	
Михаськів Віктор, Стасюк Богдан: Граничноелементне моделювання впливу контактних недосконалостей на пружні властивості тривимірних композитів.....	107
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0305.pdf	

- Токовий Юрій, Кульчицький-Жигайло Юрій:** Аналітичне визначення пружних напружень у багатошаровій сферичній посудині.....109
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0306.pdf
- Tokovyy Yuriy, Perkowski Dariusz, Augustyniak Jakub:** Elastic performance of a plane-deformed multilayer half-space.....111
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0307.pdf
- Юрій Токовий, Микола Юзв'як:** Застосування функції Вігака для дослідження напруженого стану неоднорідної прямокутної області...112
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0308.pdf
- Гришак Віктор, Король Вадим:** Дослідження анізотропних властивостей металевих сплавів методом SAFE.....113
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0309.pdf
- Гришак Віктор, Зіборов Кирило, Гаркавенко Дмитро:** Дослідження процесу утворення внутрішніх дефектів виливок методом Niyama...115
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0310.pdf

Секція «МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРИЩИНАМИ
ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ»

- Андрейків Олександр, Долінська Ірина, Настасяк Святослав, Любчак Микола:** Математичне моделювання впливу деградації матеріалу на залишкову довговічність елементів конструкцій довготривалої експлуатації.....117
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0401.pdf
- Кіпніс Олександр:** Стискання кусково-однорідного напівобмеженого тіла за різних умов з'єднання його компонентів вздовж міжфазної тріщини.....118
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0402.pdf
- Острик Володимир:** Контактна задача для міжфазного відшарованого включення.....119
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0403.pdf
- Попов Всеволод, Кирилова Ольга:** Ітераційний метод визначення двовимірному динамічного стану за наявності в пружному тілі системи тонких жорстких включень.....121
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0404.pdf
- Прокопшин Ігор, Середницька Христина:** Числове дослідження термопружної контактної взаємодії тіл за наявності поверхневої виїмки та нелінійного Вінклерівського шару.....123
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0405.pdf

- Богданов В'ячеслав, Назаренко Володимир, Кіпніс Олександр:** Руйнування кусково-однорідної півплощини при стисканні вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу середовищ..... 124
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0406.pdf
- Саврук Михайло, Кравець Володимир, Онишко Любов, Кваснюк Олексій:** Коефіцієнти інтенсивності напружень для криволінійної тріщини в кусково-однорідному анізотропному тілі за антиплоскої деформації..... 125
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0407.pdf
- Богданова Ольга, Дудик Михайло, Камінський Анатолій, Решітник Юлія:** Модель повороту міжфазної тріщини у квазікрихкий матеріал біматеріального тіла у кутовій точці ламаної межі поділу..... 127
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0408.pdf
- Дудик Михайло, Поліщук Тетяна:** Модель зони передруйнування біля кутової точки міжфазної зсувної тріщини..... 129
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0409.pdf
- Пастернак Ярослав, Сулим Георгій:** Інтегральні рівняння двовимірних задач термомагнітоелектропружності біматеріальних тіл за неідеального термомеханічного контакту складових..... 130
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0410.pdf
- Sylovanyuk Victor, Filipov Maksym:** Torsional crack healing in a nonhomogeneous cylinder..... 131
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0411.pdf
- Архипенко Костянтин, Кривий Олександр:** Змішана задача про міжфазні включення в анізотропній неоднорідній площині..... 133
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0412.pdf
- Кривий Олександр, Морозов Юрій:** Міжфазне кільцеве включення за умов повного зчеплення з кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором..... 135
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0413.pdf
- Пономаренко Олександр:** Напруження в безмежній тонкій пластині з круговим включенням і круговим отвором..... 137
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0414.pdf
- Васільєв Кирил, Сулим Георгій:** Поздовжній зсув тонкого тришарового анізотропного стрічкового включення..... 139
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0415.pdf
- Даляк Тарас, Маковійчук Микола:** Згин пологої циліндричної оболонки з поперечними тріщиною та щілиною..... 140
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0416.pdf

- Стецюк Сергій, Шацький Іван, Дорошенко Ярослав, Величкович Андрій:** Про фрикційну взаємодію деформівного поршня зі стінкою трубопроводу..... 141
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0417.pdf
- Шацький Іван, Петрашук Василь:** Про задачі згину функціонально градієнтних пластин з контактними тріщинами..... 142
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0418.pdf
- Чорненький Андрій, Саврук Михайло, Кравець Володимир:** Інтегральні рівняння двовимірної задачі теорії пружності для кусково-однорідного анізотропного тіла..... 143
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0419.pdf
- Соляр Ольга, Соляр Тетяна:** Фрикційна контактна задача для анізотропної смуги на закріпленій основі..... 145
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0420.pdf
- Кушнір Роман, Соляр Ольга:** Контактна задача для шару за врахування тертя..... 147
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0421.pdf
- Кушнір Роман, Сулим Георгій, Піскозуб Йосиф:** Структурно-модульний метод функцій стрибка дослідження деформування композитних структур з тонкими стрічковими включеннями за нелінійного фрикційного контакту..... 149
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0422.pdf
- Максимук Олександр, Васильків Іван, Широков Володимир:** Аналіз зношування тонкого покриття з двома коефіцієнтами постелі періодичними штампами канонічної форми методами імітаційного моделювання..... 151
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0423.pdf
- Loboda Volodymyr, Sheveleva Alla, Chapelle Frederic, Lapusta Yuriy:** A piezoelectric bimaterial with a system of electrically limited permeable interface cracks..... 152
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0424.pdf
- Sylovanyuk Viktor, Melnyk Vitalii:** Crack healing in anisotropic elastic-plastic plate under tensile load..... 153
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0425.pdf

- Бурлаєнко В'ячеслав, Веретельник Віктор, Дімітрова Світлана:** Дослідження власних коливань аксіально функціонально градієнтних балок криволінійно змінного перерізу.....155
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0501.pdf
- Глухов Андрій:** Про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.....157
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0502.pdf
- Глухов Юрій:** Вплив початкових напружень та швидкості навантаження на напружено-деформований стан стисливого півпростору.....159
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0503.pdf
- Drebotiy Roman:** Diffusion splitting method for non-stationary diffusion-advection-reaction problems.....161
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0504.pdf
- Михаськів Віктор, Жбадинський Ігор:** Вплив розпорядкування у каскаді з періодичних кругових тріщин на проходження пружних хвиль.....163
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0505.pdf
- Перепічка Василь:** Зворотні задачі для неударних навантажень пружного стержня зі зовнішнім в'язкопластичним тертям.....164
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0506.pdf
- П'янило Ярослав:** Дробові похідні в математичному моделювання фізичних процесів.....165
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0507.pdf
- Семенович Катерина:** Сумісний рух системи співвісний резервуар-рідина під дією зовнішнього гармонічного навантаження.....167
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0508.pdf
- Рабош Роман, Матус Валерій, Андрійчук Роман:** Розсіяння пружних SH-хвиль у п'єзоелектричному композиті з тонким включенням.....168
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0509.pdf

- Тужеляк Ольга:** Вплив зміни напрямку ортотропії на динамічну поведінку пластини з отворами за дії розподіленого навантаження на її поверхні.....169
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0510.pdf
- Максимів Юлія, Матус Валерій, Пороховський Василь, Турчин Павло:** Розсіяння SH-хвилі пружним волокном з тонким міжфазним пьезоелектричним включенням.....171
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0511.pdf
- П'янило Ярослав, Собко Валентина, П'янило Галина, Торський Адріан, Лопатьєв Анатолій:** Про один підхід до оброблення медико-біологічної інформації.....173
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0512.pdf
- П'янило Ярослав, Твардовська Софія:** Дослідження коливного процесу в пористих тілах з використанням дробових похідних за часом.....174
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0513.pdf
- Лопух Назарій, П'янило Ярослав:** Вибір параметрів просторових похідних для моделювання фільтрації газу.....175
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0514.pdf
- Marchuk Mykhailo, Bodnar Volodymyr, Pakosh Vira:** Refined mathematical model of flutter for composite plate-strip.....177
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0515.pdf
- Андрійчук Роман, Матус Валерій, Міщенко Віктор:** Поширення згинних хвиль у пластині із періодичною системою неконтрастних включень.....179
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0516.pdf
- Андрійчук Роман, Максимів Юлія, Рабош Роман:** Поширення SH-хвиль у пружній матриці із ґраткою тонких неконтрастних п'єзоелектричних включень.....180
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0517.pdf

Секція «ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЄКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ
І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»

- Бомба Андрій, Мороз Ігор:** Методи теорії збурень у моделюванні характеристик напівпровідникового P-I-N-діода (гідродинамічне наближення).....181
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0601.pdf

Гачкевич Олександр, Мусій Роман, Мельник Наталія: Прогнозування роботоздатності біметалевих пластин за їх індукційної термообробки.....	183
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0602.pdf	
Ніколаєв Олексій, Скічка Марія: Метод визначення оптимального керування термопружним станом кусково-однорідного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля.....	185
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0603.pdf	
Демидюк Мирослав, Проць Богдан: Аналіз субоптимального руху порталного робота з дволанковим маніпулятором.....	187
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0604.pdf	
Дзюба Анатолій, Іскандеров Раміз Азіз, Левитіна Лариса, Сіренко Володимир: Вагова оптимізація змінної товщини стінки оболонок обертання як задача оптимального керування.....	189
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0605.pdf	
Сатокін Валерій: Застосування «методу часу» при виготовленні конструкції адитивними технологіями для підвищення їх міцнісних та експлуатаційних властивостей.....	191
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0606.pdf	
Харченко Володимир, Клименко Дмитро: Дослідження сили затягування шпилькового з'єднання.....	193
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0607.pdf	

Секція «ДОСЛІДЖЕННЯ З МЕХАНІКИ ДЛЯ ОБОРОНИ ДЕРЖАВИ
ТА ВІДНОВЛЕННЯ ІНФРАСТРУКТУРИ»

Gayvas Bogdana, Dmytruk Veronika: Influence of hydrogen on the strength of metals.....	195
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0701.pdf	
Поліщук Олександр: Масштабність та класифікація уражень складних мережевих систем.....	197
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0702.pdf	
Поліщук Олександр: Оптимізація засобів активного захисту складних мережевих систем.....	199
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0703.pdf	
Середницька Христина, Шевцов Микола, Пушкарик Олексій, Ковальчук Олександр: Система виявлення місцезнаходження поранених військовослужбовців.....	201
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0704.pdf	

- Акімов Дмитро, Клименко Дмитро:** Аналіз зусиль та моментів в інтерфейсних точках космічний апарат (КА) - ракета носій (РН), визначення їх термопружних, монтажних та інерційних складових з моменту збирання до відділення КА від РН.....203
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0705.pdf
- Бабуров Володимир:** Аналіз напружено-деформованого стану та прогнозування руйнівного навантаження скоби при змінних умовах закріплення та навантаження.....205
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0706.pdf
- Андрейків Олександр, Долінська Ірина, Болкот Петро, Ванкевич Петро:** Математичні моделі і технічні технології для підвищення ресурсу стволів артилерійських систем.....206
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0707.pdf
- Марчук Михайло, Дробенко Богдан, Лопух Назарій, Клименко Дмитро, Пакош Віра, Сіренко Володимир, Харченко Володимир, Хом'як Микола:** Математичне й комп'ютерне моделювання стосовно проблеми конструкційної міцності корпусів двигунів ракетної та ракетно-космічної техніки.....207
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0708.pdf

Секція «ПЕРСПЕКТИВНІ МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ НАВЧАННЯ У ГАЛУЗІ МЕХАНІКИ
ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ»

- Вдович Ростислав, Яджак Михайло:** Аналіз реалізації деяких паралельних алгоритмів цифрової фільтрації даних на багатоядерному комп'ютері.....209
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0801.pdf
- Яджак Михайло:** Використання задач та алгоритмів цифрової фільтрації для викладання основ паралельного програмування.....211
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0802.pdf
- Венгринюк Олег, Звірко Ольга:** Застосування фізико-інформованих нейронних мереж для моделювання наводнювання стінки труби газопроводу.....213
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0803.pdf
- Жук Петро:** Моделювання розпізнавання ситуацій з використанням семантичного поля.....215
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0804.pdf

- Тютюнник Марія:** Оптимізація прогностичного оцінювання об'єктів складних систем.....217
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0805.pdf
- Макаров Володимир, Майко Наталія, Рябічев Вячеслав:** Знаходження диференціального рівняння для системи поліномів у задачі з дробовою похідною.....219
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0806.pdf
- Біляковська Ольга, Соляр Тетяна:** Інтерактивні методи навчання в процесі підготовки майбутніх фахівців у галузі прикладної математики.....221
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0807.pdf

ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО КЛИНУ

Наталя Вайсфельд¹, Зінаїда Журавльова²

¹Королівський Колледж, м. Лондон, natalya.vaaysfeld@kcl.ac.uk

²Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса, z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглянуто задачу поропружності для півнескінченного клину ($0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \omega$, $0 < z < h$), верхню грань якого навантажено так:

$$\sigma_z|_{z=0} = L(r, \varphi), \quad \tau_{zr}|_{z=0} = R(r, \varphi), \quad \tau_{z\varphi}|_{z=0} = T(r, \varphi), \quad p|_{z=0} = P(r, \varphi). \quad (1)$$

Тут $p(r, z)$ – тиск рідини, що знаходиться у порах клину, $\sigma_z, \tau_{zr}, \tau_{z\varphi}$ – нормальні та дотичні напруження клина, залежні від (r, φ, z) .

Бічні грані $\varphi = 0$, $\varphi = \omega$ клина перебувають в умовах ідеального контакту та є непроникними [1]:

$$v|_{\varphi=0,\omega} = 0, \quad \tau_{\varphi r}|_{\varphi=0,\omega} = 0, \quad \tau_{\varphi z}|_{\varphi=0,\omega} = 0, \quad \partial p / \partial \varphi|_{\varphi=0,\omega} = 0, \quad (2)$$

а нижня грань $z = h$ є проникною та жорстко закріпленою [2]:

$$u|_{z=h} = 0, \quad v|_{z=h} = 0, \quad w|_{z=h} = 0, \quad p|_{z=h} = 0, \quad (3)$$

де u, v, w – переміщення твердого каркасу шару, залежні від (r, φ, z) .

Потрібно знайти переміщення та напруження твердого каркасу та тиск рідини у клині, що задовольняють умови (1) – (3) та рівняння рівноваги [3]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{2}{\kappa - 1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right] - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{2}{\kappa - 1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial z} \right] - \frac{\alpha}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial z} \right] - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{k} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{S_p}{k} p = 0,$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ – стала Мусхелішвілі, μ – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт Біо, G – модуль зсуву, S_p – пам'ять простору пор, k – коефіцієнт проникності.

До вихідної задачі застосовано перетворення Фур'є за змінною φ :

$$\begin{bmatrix} u_\gamma(r, z) \\ v_\gamma(r, z) \\ w_\gamma(r, z) \\ p_\gamma(r, z) \end{bmatrix} = \int_0^\omega \begin{bmatrix} u(r, \varphi, z) \cos \gamma\varphi \\ v(r, \varphi, z) \sin \gamma\varphi \\ w(r, \varphi, z) \cos \gamma\varphi \\ p(r, \varphi, z) \cos \gamma\varphi \end{bmatrix} d\varphi, \quad \gamma = \gamma_n = \frac{\pi n}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Замість двох переміщень уведено дві нові функції $W_{1,\gamma} = u_\gamma + v_\gamma, W_{2,\gamma} = u_\gamma - v_\gamma$. До крайової задачі у трансформантах (5) застосовано півнескінченне перетворення Ганкеля за змінною r .

У результаті отримано одновимірну крайову задачу у просторі трансформант. Цю задачу сформульовано у векторному вигляді, її аналітичний розв'язок побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення [4]. Застосування формул обернення інтегральних перетворень завершує побудову точного розв'язку вихідної задачі.

Дослідження підтримано грантами Horizon 2020 Grant Agreement number 101008140 EffectFact "Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications", Royal Society Wolfson Visiting Fellowship R3/233003, стипендією Кабінету Міністрів України для молодих вчених.

1. Kubik J., Kachmaryk M., Chaplya E. Methods for the determination of the characteristics of porous saturated media // Materials Science. – 2001. – 37. – P. 92–102.
2. Nahirnyj T., Tchervinka K. Mathematical modeling of the coupled processes in nanoporous bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – 12, No. 3. – P. 196–203.
3. Cheng A. H.-D. Poroelasticity. – Cham: Springer, 2016. – 877 p.
4. Попов Г. Я. Точні розв'язки деяких крайових задач механіки деформованого твердого тіла. – Одеса: Астропринт, 2013. – 424 с.

SPATIAL POROELASTICITY PROBLEM FOR A SEMI-INFINITE WEDGE

A spatial poroelasticity problem is formulated for a semi-infinite pie-shaped wedge. It is solved analytically with the help of the Fourier and Hankel integral transforms, and the matrix differential calculation apparatus.

ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ПОЛЕ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ ЗІ СФЕРИЧНОЮ ПОРОЖНИОЮ

Наталія Вайсфельд¹, Юрій Процеров², Андрій Толкачов³

¹Королівський Колледж, м. Лондон, natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk,
^{2,3}Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса,
²protserov@onu.edu.ua, ³andr.tolkach@gmail.com

Пружна рівновага півпростору з порожнинами розглядалася багатьма авторами [1, 2]. У зв'язку з великою кількістю практичних застосувань потреба в точних розв'язках такого класу задач залишається актуальною.

Тут у сферичній системі координат розглянуто пружний простір (μ – коефіцієнт Пуасона, G – модуль зсуву), що містить сферичну порожнину радіуса R з центром у початку координат. З боку порожнини до пружного простору прикладено осесиметричне нормальне навантаження інтенсивності $f(\theta)$ на ділянці $r = R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \alpha$. У безрозмірних координатах (ρ, θ, φ) , де $\rho = r/R$, з урахуванням осьової симетрії, задачу сформульовано для переміщень $u = u_\rho(\rho, \theta)$ і $v = u_\theta(\rho, \theta)$ у вигляді системи рівнянь Ляме

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - 2u + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) -$$

$$(2 + \mu_0) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (v \sin \theta)}{\partial \theta} + \mu_0 \frac{\rho}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \mu_* \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right] + \mu_0 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} + 2\mu_* \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

в області $1 < \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, де $\mu_0 = 1/(1-2\mu)$, $\mu_* = 1 + \mu_0$ за виконання крайових умов

$$\sigma_\rho \Big|_{\rho=1} = 2G \left[-\frac{\mu_*}{2} \frac{\partial u}{\partial \rho} + 2 \frac{\mu \mu_0}{\rho} u + \frac{\mu \mu_0}{\rho \sin \theta} \frac{\partial (v \sin \theta)}{\partial \theta} \right]_{\rho=1} = \begin{cases} Rf(\theta), & 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ 0, & \alpha \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

$$\tau_{\rho\theta} \Big|_{\rho=1} = G \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} \right]_{\rho=1} = 0$$

та умов спадання на нескінченності, коли $\rho \rightarrow \infty$.

До рівнянь Ляме та крайових умов застосовано інтегральне перетворення Лежандра за змінною θ

$$\begin{bmatrix} u_n(\rho) \\ v_n(\rho) \end{bmatrix} = \int_0^\pi \begin{bmatrix} u(\rho, \theta) P_n(\cos \theta) \\ v(\rho, \theta) P_n^1(\cos \theta) \end{bmatrix} \sin \theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

з оберненнями $u = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho)(2n+1)P_n(\cos \theta)$, $v = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\rho) \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta)$.

У просторі трансформант отримано одновимірну крайову задачу

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} = & \frac{f_0}{2\rho^3} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nf_n}{\Delta_n \rho^{n+1}} \left\{ a_{22} \left[\frac{n-1-\mu_*(n+1)}{2n-1} (\mu_*n - 4\mu\mu_0) + 2\mu\mu_0(n+1) \frac{\mu_0n - 2\mu_*}{2n-1} + \right. \right. \\ & + \frac{n+1}{n} \frac{n+2-\mu_*n}{2n+3} \frac{4\mu\mu_0 - \mu_*(n+2)}{\rho^2} + 2\mu\mu_0(n+1) \frac{\mu_0(n+2) + 2\mu_*}{(2n+3)\rho^2} \left. \right] + \\ & + a_{21} \left[\frac{2+\mu_0(n+1)}{n(2n-1)} \left(n - 4 \frac{\mu\mu_0}{\mu_*} \right) - 2\mu\mu_0 \frac{n-3-\mu_*^{-1}(n+1)}{2n-1} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2+\mu_0(n+3)}{n(2n+3)} \frac{4\mu\mu_0\mu_*^{-1} - n - 2}{\rho^2} + 2\mu\mu_0(n+1) \frac{1-\mu_*^{-1}}{2n+3} \rho^{-2} \right] \right\} P_n(\cos \theta), \\ \tau_{\rho\theta} = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\Delta_n} \rho^{-n-1} \left\{ a_{22} \left[n \frac{n-1-\mu_*(n+1)}{2n-1} - (n+1) \frac{\mu_0n - 2\mu_*}{2n-1} - (n+1) \frac{n+2-\mu_*n}{(2n+3)\rho^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. -(n+3) \frac{\mu_0(n+2) + 2\mu_*}{(2n+3)\rho^2} \right] + a_{21} \left[\frac{2+\mu_0(n+1)}{(2n-1)\mu_*} + \frac{n-3-\mu_*^{-1}(n+1)}{2n-1} - \frac{2+\mu_0(n+3)}{\mu_*(2n+3)\rho^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. -(n+3) \frac{1-\mu_*^{-1}}{2n+3} \rho^{-2} \right] \right\} P_n^1(\cos \theta). \end{aligned}$$

За отриманими формулами обчислено переміщення та напруження в пружному просторі в залежності від кута θ з різних значень ρ .

Дослідження виконано за підтримки грантів “Royal Society Wolfson Fellow” та Horizon 2020 Grant 101008140 Effect Fact “Effective Factorisation Techniques for Matrix-Functions: Developing, Theory, Numerical Methods and Impactful Applications”.

1. *Kim Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // *Мат. методи та фіз.-мех.поля.* – 2008. – **51**, № 4. – С. 120–128.
2. *Мартиняк Р. М.* Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – **39**, № 5. – С. 59–66.

AXISYMMETRIC STRESS FIELD IN AN ELASTIC SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY

The paper considers the axisymmetric stress state of an elastic half-space weakened by a spherical cavity. It is assumed that normal stress is applied from the cavity to the surrounding material. The integral transforms method was used to solve the corresponding boundary value problem using Lamé's equations expressed in terms of displacements. A numerical investigation of the stress field was conducted based on the exact solution derived for the problem.

ВІБОРОЗІГРІВ ТВЕРДОПАЛИВНИХ ДВИГУНІВ ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ ПОЛОЖЕННІ

Ігор Сенченков, Ольга Червінко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, term@inmech.kiev.ua

У роботі ракетний двигун на твердому паливі (РДТП) розглянуто як порожнистий циліндр з в'язкопружного матеріалу, підкріпленій тришаровою пружною оболонкою (рис.1).

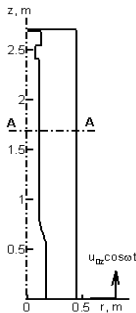


Рис.1

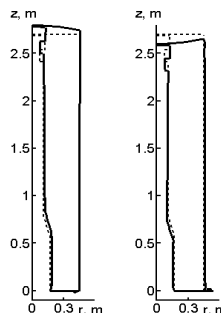


Рис.2

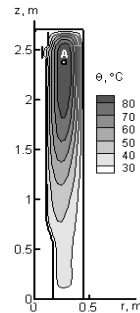
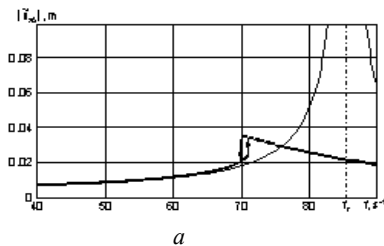
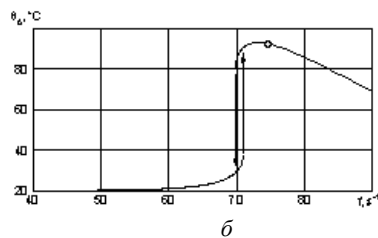


Рис.3

Використано осесиметричну постановку задачі в'язкопружності для могоармонічних коливань. Механічні властивості матеріалу заряду описано комплексними модулями, що залежать від температури і частоти [1–3]. Задачу теплопровідності розв'язано методом покрокового інтегрування за часом, а нелінійну крайову задачу механіки – ітераційним методом у поєднанні з МСЕ. На рис. 2 наведена форма коливань для першого лінійного резонансу $f \approx 85$ Гц. На рис. 3 показано поле температури поблизу резонансу. На рис. 4а, б наведено амплітудно і температурно частотні характеристики при $u_{0z} = 0.05$ мм в точці А максимуму температури (рис. 3).



а



б

Рис. 4

На рис. 5 показано залежність максимальної температури розігріву від амплітуди навантаження u_{0z} і частоти f на час транспортування 10 годин.

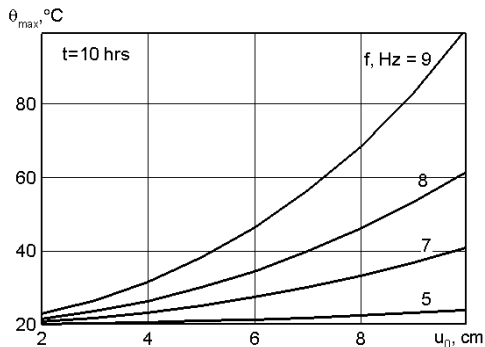


Рис. 5

Наведені результати дозволяють визначити область параметрів навантаження, при яких максимальна температура розігріву не перевищує заданого значення при заданому часі транспортування. Ці та подібні дані можуть бути використані для оцінки термічної довговічності двигуна за температурним критерієм.

1. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. Думка, 1985. – 281 с.
2. Шенери Р. А. Термомеханическое поведение вязкоупругих сред с переменными свойствами при циклическом нагружении // Тр. Американского о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. – Прикл. механика. – 1963. – 32, № 3. – С. 150-161.
3. Renganahan K., Nageswara Rao B., Jana M. K. Slump estimation of cylindrical segment grains of a typical rocket motor under vertical storage conditions // Trends in Applied Sciences Research. – 2006. – 1, No. 1. – P. 97–104.

VIBRATION HEATING OF SOLID FUEL ENGINES DURING TRANSPORTATION IN A VERTICAL POSITION

The heating and stress-strain state under harmonic forced excitation of the solid fuel engine with a vertical displacement, which simulates the loading during vertical transportation, are numerically investigated. The concentration of dissipative heating temperature in the charge volume is determined. The temperature curves are plotted as a function of loading parameters.

ФЕНОМЕНОЛОГІЧНА ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ ДЛЯ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ЗОНОЮ ПЛИННОСТІ

Павло Стеблянко¹, Олександр Петров², Юрій Черняков²

¹Інститут механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, caf-vmi@ukr.net,
²Дніпровський національний університет імені О. Гончара, м. Дніпро

Для формування визначальних співвідношень використано теорію пластичної течії з комбінованим зміцненням. Швидкість деформації подано сумою пружної і пластичної частин; швидкість пружної деформації відповідає закону Гука; пластична деформація виникає при умові плинності з комбінованим зміцненням $f = \sqrt{\frac{1}{2}(s - \alpha) : (s - \alpha) - \tau_r - \bar{r}(\tau_e, \lambda)} = 0$, де α – девіатор залишкових напружень, який визначає кінематичне зміцнення, $s = \sigma - \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma)e$ – девіатор тензора напружень Коші, $\sqrt{\frac{1}{2}s : s}$ – інтенсивність дотичних напружень, $r(\tau_e, \lambda)$ – функція, що характеризує ізотропне зміцнення і визначає поточний опір руху дислокацій.

Оскільки метою є дослідити поведінку матеріалу із зоною плинності, потрібно врахувати особливості такого деформування. Ці особливості можуть бути пов'язані з поведінкою функцій $r(\tau_e, \lambda)$. Для визначення поведінки цієї функції розглянемо наступні проміжки зміни параметра довжини траєкторії пластичної деформації: $0 < \lambda \leq \lambda_s$, $\lambda > \lambda_s + \lambda_L$ та $\lambda_s < \lambda \leq \lambda_s + \lambda_L$, де λ_s – деформація, яка відповідає досягненню межі плинності $\tau_e(\lambda_s) = \tau_s$, λ_L – деформація Людерса. Функцію $r(\tau_e, \lambda)$ задано наступним чином: $\bar{r}(\tau_e, \lambda) = r(\lambda) - \eta(\tau_e, \lambda)$, де функція $r(\lambda)$ характеризує зміцнення і є однаковою для всіх значень $\lambda \geq \lambda_s$, а функція $\eta(\tau_e, \lambda)$ буде характеризувати зменшення міцності. Зрозуміло, що конкретний вигляд функції $\eta(\tau_e, \lambda)$ залежить від властивостей матеріалу.

З урахуванням зроблених припущень умова плинності набуває вигляду:

$$\rho(s - \alpha) = \begin{cases} \tau_r + r(\lambda), & \text{при } 0 < \lambda \leq \lambda_s \text{ і } \lambda > \lambda_s + \lambda_L; \\ \tau_r - \eta(\lambda - \lambda_1), & \text{при } \lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_s + \lambda_L, \end{cases}$$

Тут ρ – інтенсивність активних напружень $s - \alpha$.

Швидкість пластичної деформації підпорядковується принципу градієнтальності $\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial s}$, де $\dot{\lambda}$ – інтенсивність швидкості пластичної деформації зсуву.

Розглянуто наступні проміжки зміни λ : $0 \leq \lambda < \lambda_s$ та $\lambda \geq \lambda_s + \lambda_T$. Тоді знайдемо $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{s - \alpha}{2\rho} = n$, де n – направляючий девіатор. У такому випадку $\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} n$.

Рівняння еволюції параметрів ізотропного і кінематичного зміцнення на проміжках зміни $\dot{\lambda}$, подамо у вигляді $\dot{r} = 2G_r(r)\dot{\lambda}$, $\dot{\alpha} = 2G_\alpha(\alpha)\dot{\lambda}$, де G_r та G_α – функції ізотропного та кінематичного зміцнення. Величину $G_p = n : G_\alpha + G_r$ назвемо пластичним модулем. Таким чином, остаточна побудови визначальних співвідношень на зазначених вище проміжках зміни λ зводиться до задання функцій G_r , G_α , тобто законів розвитку ізотропного і кінематичного зміцнень.

PHENOMENOLOGICAL THEORY OF PLASTIC FLOW FOR MATERIALS WITH A LIQUID FIELD

To form the governing relationships, we use the theory of plastic flow with combined strengthening. Since we want to investigate the behavior of a material with a yield point, we must take into account some features of such deformation. These features can obviously be related to the behavior of functions $r(\tau_e, \lambda)$. To determine the behavior of this function, consider the following intervals of change in the length parameter of the plastic deformation trajectory: $0 < \lambda \leq \lambda_s$ and $\lambda_s < \lambda \leq \lambda_s + \lambda_L$, where λ_s is the deformation that corresponds to reaching the yield point, λ_L is Lueders deformation.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ШАРІ ЗА НАЯВНОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ НА ЙОГО ПОВЕРХНЯХ

Ольга Чернуха^{1,2,a}, Юрій Білуцак^{1,2,b}, Анастасія Чучвара^{1,c}, Галина Білуцак^{2,f}

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,
^acher@cmm.lviv.ua, ^bbil@cmm.lviv.ua, ^cdavydoka@gmail.com

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, ^fhalyna.i.bilushchak@lpnu.ua

Розвиток підходів і методів математичного опису нерівноважних процесів різної фізичної природи в природних або штучних об'єктах спричинений необхідністю побудови ефективних методик і оцінок для достовірного прогнозування процесів та явищ для вчасного запобігання їх негативного розвитку. Проте не завжди є можливим коректно задати крайові умови на поверхні на основі фізичних міркувань навіть у доволі загальному вигляді. У цій доповіді розглянуто крайову задачу параболічного типу, що описує процеси перенесення тепла, маси, заряду, тощо, в шарі, коли на одній з поверхонь наявні експериментальні дані щодо шуканої функції.

Розглядається процес перенесення в шарі $\rho \partial f(t, x) / \partial t = d \partial^2 f(t, x) / \partial x^2$, де ρ , d – сталі коефіцієнти. Початкова умова є нульовою і на верхній поверхні шару діє стале джерело $f(t, x)|_{t=0} = 0$, $f(t, x)|_{x=0} = f_* \equiv \text{const}$.

На нижній поверхні задано експериментальні дані в N моментах часу, як наведено у таблиці.

Табл. 1. Експериментальні дані на нижній границі шару

t	t_1	t_2	...	t_i	...	t_N
$f(t) _{x_0}$	$f_{x_0}(t_1)$	$f_{x_0}(t_2)$...	$f_{x_0}(t_i)$...	$f_{x_0}(t_N)$

За експериментальними даними методом найменших квадратів побудовано лінійну регресію, яка розглядається як гранична умова [1]. Розв'язок сформульованої крайової задачі отримано за допомогою скінченного інтегрального перетворення Фур'є.

Проаналізовано вплив таких статистичних характеристик вибірки експериментальних даних як обсяг вибірки, коваріація, дисперсія часової змінної і дисперсія відгуків, а також коефіцієнт кореляції на коефіцієнти лінійної регресії, побудованої за цими даними [2]. Визначена двостороння статистична оцінка розв'язку крайової задачі через коефіцієнти лінійної регресії, яку проаналізовано відносно впливу обсягу вибірки і коваріації.

Встановлено надійні інтервали для коефіцієнтів рівняння регресії із заданим рівнем надійності. Визначено відповідні надійні інтервали для шуканої функції на основі отриманого розв'язку крайової задачі, причому їх межі виз-

начено за межами надійних інтервалів для коефіцієнтів лінійної регресії. Показано, що чим більші абсолютні значення набуває шукана функція тим більшою є ширина надійного інтервалу. Відзначено, що чим меншою є дисперсія вибірки експериментальних даних, тим меншою є ширина надійного інтервалу для розв'язку сформульованої крайової задачі.

Отримано та проаналізовано формулу для визначення на основі критерію Фішера двосторонньої критичної області. Досліджено на конкретних прикладах вплив статистичних характеристик вибірки експериментальних даних щодо шуканої функції на нижній границі шару. Розглянуто випадок вибірок великого і малого обсягів, які характеризуються великою або малою дисперсією, на великих або малих часових інтервалах. На рис.1 проілюстровано розв'язки крайової задачі $f(t,x)$ та відповідні двосторонні критичні області для малих (рис. а) і великих моментів часу (рис. б) для вибірки з малою дисперсією для великого часового інтервалу вимірів, $N = 12$.

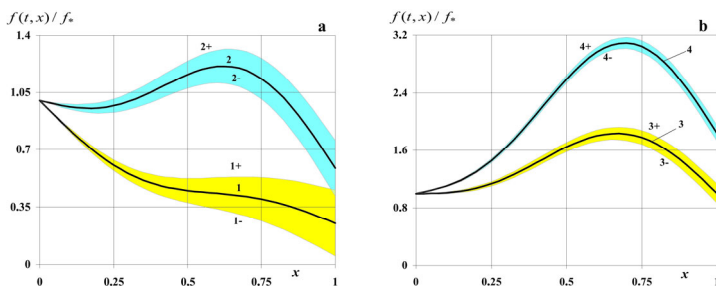


Рис. 1. Розв'язки крайової задачі $f(t,x)$ та відповідні двосторонні критичні області для малих (рис. а) і великих моментів часу (рис. б)

Проведений чисельний аналіз розв'язку крайової задачі залежно від статистичних характеристик вибірки. Встановлено, що для більшої дисперсії часової змінної характерно зменшення значень розв'язку задачі в усій області тіла, а для більших значень дисперсії відгуків – збільшення значень шуканої функції. Збільшення коефіцієнта кореляції призводить до зростання значень розв'язку задачі і утворення його локального або глобального максимуму у нижній половині шару.

1. Probability Theory and Mathematical Statistics / Edited by *B. Grigelionis*. – Publisher: De Gruyter. 2020. – 624 p.
2. *Бахрушин В.С.* Методи аналізу даних. – Запоріжжя: КПУ. 2011. – 268 с.

MATHEMATICAL MODELING OF TRANSFER PROCESSES IN A LAYER UNDER EXPERIMENTAL DATA AT THE BODY BOUNDARY

The mathematical model of the transfer processes in a layer is proposed in the case of presence only experimental data on the desired function at certain moments. Using the LSM, a linear regression is built, investigated and considered as a boundary condition.

ОДНА ОСОБЛИВІСТЬ ЕВОЛЮЦІЇ ПОЧАТКОВОГО ПРОФІЛЮ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ХВИЛЬ

Василь Юрчук

Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, м. Київ, vasil_2008@ukr.net

У доповіді наведено огляд праць, які стосуються вивчення нелінійних хвиль в пружних матеріалах. Сформульовано і проаналізовано задачу про еволюцію чотирьох типів хвиль з різними початковими профілями: плоскої поздовжньої гармонічної хвилі і циліндричної крутильної хвилі з профілем у вигляді косинусоїдальної функції та двох поодиноких хвиль (плоска та циліндрична) з профілями у вигляді функцій Гаусса і Макдональда. Нелінійність усіх розглянутих типів хвиль визначається застосуванням нелінійно пружної п'ятиконстантної моделі Мернагана [1].

Хвильове рівняння для плоскої поздовжньої хвилі за умови поширення хвилі вздовж осі абсцис Ox_1 є таким [1]:

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}. \quad (1)$$

Для циліндричної радіальної хвилі у відповідній системі це рівняння має вигляд [1]

$$v_L^2 (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (2)$$

У випадку циліндричної крутильної хвилі, яка поширюється вздовж координати z , хвильове рівняння набуває вигляду [2]

$$\left\{ v_T^2 \left[1 - \frac{B}{2\mu} \right] \left[(\tilde{u}_{\vartheta,r})^2 + \frac{1}{r} \tilde{u}_{\vartheta,r} \tilde{u} + \frac{2}{r^2} \tilde{u}_{\vartheta}^2 + (\tilde{u}_{\vartheta,z})^2 \right] \right\} \times \\ \times \left(\tilde{u}_{\vartheta,rr} + \frac{1}{r} \tilde{u}_{\vartheta,r} \left(-\frac{1}{r^2} + \omega^2 \right) \tilde{u}_{\vartheta} + \tilde{u}_{\vartheta,zz} \right) = 0. \quad (3)$$

Досліджено особливості еволюції початкових профілів хвиль.

а) Плоска поздовжня гармонічна хвиля (профіль – косинусоїдальна функція).

На рис. 1 показані початковий і актуальний профілі і особливість, яка є предметом уваги даної доповіді. Особливість полягає в перетворенні одного верхнього максимуму у два.

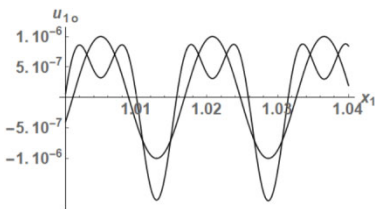


Рис. 1

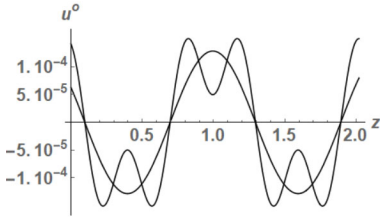


Рис. 2

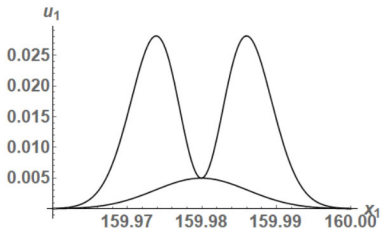


Рис. 3

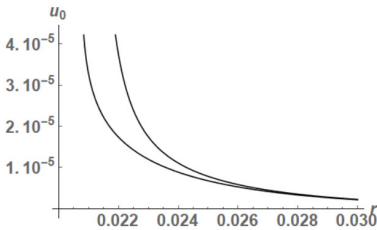


Рис. 4

б) Крутильна гармонічна хвиля (профіль – косинусоїдальна функція).

На рис. 2 показано початковий профіль у вигляді першої гармоніки і актуальний профіль з двома локальними максимумами. Отже, в актуальному профілі з'являються два максимума замість одного в початковому профілі.

в) Плоска поздовжня хвиля Гаусса (початковий профіль – функція Гаусса).

На рис. 3 нижня крива відповідає початковому профілю, а верхня – актуальному профілю. Виявлена особливість полягає у появі в актуальному профілі двох локальних максимумів замість одного в початковому профілі.

г) Циліндрична радіальна хвиля за умови поширення хвилі вздовж радіуса (початковий профіль функція Макдональда).

На рис. 4 верхня крива відповідає актуальному профілю, а нижня – початковому профілю. Тут виявлена на попередніх рисунках особливість появи другого локального максимуму не спостерігається.

Показано, що три з проаналізованих типів хвиль утворюють в актуальному профілі новий локальний максимум, а четверта хвиля з монотонно спадаючим профілем не породжує такого ефекту.

1. *Rushchitsky J. J.* Nonlinear elastic waves in materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
2. *Rushchitsky J. J., Sinchilo S. V., Yurchuk V. M.* New nonlinear wave equations for analysis of torsional elastic waves and modeling // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, No. 6. – С. 641 – 651.

A FEATURE OF EVOLUTION OF THE INITIAL PROFILE OF NONLINEAR ELASTIC WAVES

A scenario of four types of nonlinear elastic waves in materials is analyzed. It is shown that three of the analyzed waves have a feature in the graphs of the evolution of the initial profile, which consists in the formation of a new hump. An initial profile in the form of a monotonically decreasing function without a hump does not generate humps in the profile.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРІ ЗА ДІЇ СТРУМІВ, ПЕРІОДИЧНИХ ВІДНОСНО ПОЗДОВЖНЬОЇ КООРДИНАТИ

Роман Івасько¹, Аніда Станік-Беслер², Наталія Івасько³

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, roman_ivasko@ukr.net,

²Політехніка Опольська, м. Опольце, a.stanik-besler@po.edu.pl,

³Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, natalia.ivasko@lnu.edu.ua

Вплив електромагнітного поля (ЕМП) на тіло зазвичай супроводжується появою в ньому температурного поля, деформацій і напружень. Ці чинники істотно впливають як на параметри окремих технологічних процесів у виробках, так і на умови їх експлуатації. Тому для адекватного опису фізико-механічних процесів у тілах за дії ЕМП треба враховувати (в рамках відповідних моделей) взаємозв'язок електромагнітних, теплових і механічних процесів.

У роботах [2, 3] побудовано математичну модель для кількісного опису та методика дослідження термонапруженого стану феритових тіл, спричиненого дією слабких зовнішніх квазіусталених ЕМП високої несучої частоти. Вони ґрунтуються на загальній теорії взаємодії ЕМП з матеріальним континуумом (що може бути одночасно намагніченим і поляризованим у певних ділянках частотного спектру ЕМП), в якій вплив електромагнітного випромінювання враховується через тепловиділення і пондеромоторні сили.

У даній роботі для оцінки впливу важливого технологічного чинника нерівномірності розподілу зовнішнього електричного струму на параметри низькотемпературного нагрівання плоских феритових елементів з урахуванням напруженого стану (міцнісних характеристик) розглянуто модельну задачу про визначення та дослідження термомеханічної поведінки феритового шару за дії квазіусталеного ЕМП, створюваного струмом, що протікає у струмовідній площині, густина якого має синусоїдальний характер зміни за поздовжньою координатою. Відповідно до результатів, отриманих в [2, 3] для залежності процесу нагрівання від частоти зовнішньої електромагнітної дії, прийнято, що кругова несуча частота ЕМП лежить поза околами резонансних (коли термонапружений стан має практично квазістатичний характер). При цьому розрахункова схема складається з 3-х етапів послідовного визначення параметрів, які описують електромагнітне, температурне і механічні поля [1].

Досліджено розподіли напруженостей полів, тепловиділень, пондеромоторних сил і температури в шарі залежно від його товщини, амплітудно-частотних характеристик зовнішнього ЕМП і частоти синусоїдальної зміни густини індукційного струму.

Аналіз отриманих результатів дозволив зробити висновки про вплив періодичності розподілу за координатою зовнішнього електричного струму на термонапружений стан феритового шару, основними з яких є: 1) гармонічний

характер розподілу за координатою густини електричного струму суттєво впливає на значення пондеромоторних сил і температури в шарі i , як наслідок, на його термонапружений стан. Зокрема, такий розподіл може спричинити значне підвищення температури в локальних за поперечною координатою підобластях шару більш, ніж на порядок порівняно з рівномірним; 2) значення частоти синусоїдальної зміни густини струму, за якого в локальних підобластях відбуваються найбільші прирости пондеромоторної сили і температури, зростає зі збільшенням частоти зовнішнього ЕМП.

Можливість знехтування динамічними ефектами для всіх частот ЕМП, окрім резонансних, разом із наявністю дуже вузьких околів резонансних частот дозволяє ефективно керувати (при застосуванні частот, розташованих поза околами резонансних) термічною обробкою феритових виробів за допомогою зовнішніх ЕМП, використовуючи важливий технологічний фактор нерівномірності розподілу зовнішнього електричного струму. У цьому випадку частота ЕМП забезпечує стабільність (монотонність) процесів нагрівання та деформування.

1. *Hachkevych O., Ivas'ko R., Ivas'ko N., Torskyi A.* Thermally stressed state of the layer under the influence of currents periodic with respect to the longitudinal coordinate // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2024. – **11**, No. 2. – Pp. 394–403.
2. *Hachkevych O., Ivas'ko R., Kushnir R., Stanik-Besler A.* Selected aspects of thermo-mechanics of ferrite bodies under electromagnetic actions // Selected problems of solid mechanics and solving methods / Ed. by: *H. Altenbach, V. Bogdanov, A.Y. Grigorenko, R.M. Kushnir, V.M. Nazarenko, V.A. Eremeyev* / *Advanced Structured Materials*, vol. 204. – Chapter 16. – Springer, Cham., 2024. – Pp. 221–232.
3. *Hachkevych O., Ivas'ko R., Stanik-Besler A.* Selected mathematical problems of thermomechanics of ferrite solids [in Russian]. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, 2022. – 212 p.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE PHYSICAL AND MECHANICAL PROCESSES OCCURRING IN A LAYER SUBJECTED TO CURRENTS PERIODIC WITH RESPECT TO THE LONGITUDINAL COORDINATE

To evaluate the impact of the important non-uniformity technological factor of the external electric current distribution on the low-temperature heating parameters of flat ferrite elements, taking into account the stressed state (strength characteristics), a model problem is considered to determine and study the thermomechanical behavior of the ferrite layer under the influence of a quasi-steady electromagnetic field created by the current flowing in the current-carrying plane, the density of which changes sinusoidally along the longitudinal coordinate. In accordance with the earlier results regarding the dependence of the heating process on the frequency of external electromagnetic influence, it is accepted that the circular carrier frequency of the electromagnetic field is outside the vicinity of the resonant ones (when the thermally stressed state has an almost quasi-static character). In this case, the calculation scheme consists of three stages for sequentially determining the parameters that describe the electromagnetic, temperature, and mechanical fields.

ПРО ВПЛИВ ОБРОБКИ ПОВЕРХНІ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКИХ ПЛІВОК

Тарас Нагірний¹, Костянтин Червінка²

¹Університет Зельноної Гури, м. Зельона Гура, t.nahirny@iim.uz.zgora.pl,

²Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua

Стан поверхні твердих тіл є важливим чинником впливу на напруження, деформації та експлуатаційні характеристики. Шорсткість та мікронерівності поверхні впливають на локальний розподіл механічних полів, зносостійкість і коефіцієнт тертя, міцність тіла тощо. Ці ефекти виразно проявляються у тонких плівках, товщина яких порівнянна з розмірами поверхневих нерівностей. Моделюванню та дослідженню такого впливу присвячено чимало робіт, зокрема [1 – 3]. Описуючи тонкі плівки, зокрема отримані напиленням на плоску поверхню, слід урахувувати різні умови на поверхнях таких плівок. У рамках термомеханіки локально неоднорідного твердого тіла [1] це можна моделювати різними крайовими умовами на густину маси та несиметричними джерелами маси у модифікованому рівнянні для густини.

У термінах густини маси ρ , компонент тензора напружень σ_{ij} одновимірною за координатою x ситуація у вільному від силового навантаження шарі (область $|x| \leq l$) описується такою системою рівнянь [1]

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} = \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2} = -2\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2\rho}{dx^2},$$
$$\frac{d^2\rho}{dx^2} - \xi_m^2 (\rho - \rho_*) = -\xi_m^2 \left(A e^{\xi_m(x-l)} + B e^{-\xi_m(x+l)} \right), \quad (1)$$

умовами на поверхнях $x = \pm l$

$$\rho(+l) = \rho_a^+, \quad \sigma_{xx}(+l) = 0, \quad \rho(-l) = \rho_a^-, \quad \sigma_{xx}(-l) = 0, \quad (2)$$

а також умовами

$$\int_{-l}^l \sigma_{yy} dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_{yy} dx = 0, \quad \int_{-l}^l \sigma_{zz} dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_{zz} dx = 0. \quad (3)$$

Вираз у дужках у правій стороні другого рівняння (1) пов'язаний з джерелами маси, які разом із крайовими умовами для густини дозволяють моделювати спосіб формування поверхні. Такий вигляд джерел маси не враховує області піків опорної кривої профілю реальної шорсткої поверхні. Узагальнення джерел маси спрямоване на врахування усіх закономірностей кривої

Аббота-Фаєрстоуна представлено у [3]. Параметри A та B визначаємо із рівностей джерел маси на поверхнях $x = \pm l$ тіла збуренням $\rho_a^+ - \rho_*$.

Рисунки 1, 2 ілюструють розподіл приведених напружень σ_{yy} / σ_0 по товщині тонкої плівки для $\rho_a^- = 0$, $\rho_a^+ = \rho_* / 2$, $\xi_m l = 3, 20$ (рис. 1 і 2 відповідно), $\sigma_0 = -2\mu a_m \rho_* (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + 2\mu)$, $\xi_- / \xi_m = 1.8$, $\xi_+ / \xi_m = 0.2; 0.6; 1.8$ (криві 1–3). Для ідентичних поверхонь шару розподіл напружень є симетричним відносно серединної поверхні шару.

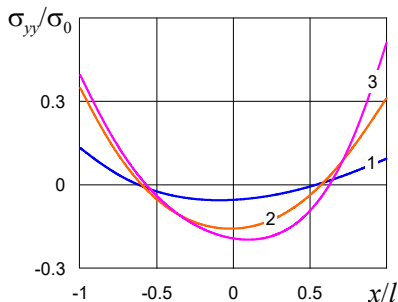


Рис.1

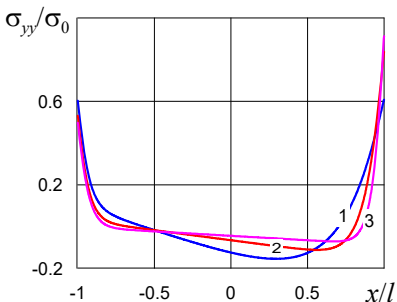


Рис. 2

На основі виконаних досліджень можна стверджувати, що розподіл та значення напружень суттєво залежать від способу формування та обробки поверхні тіла. Тому стан реальних поверхонь твердих тіл є важливим фактором, який слід враховувати при моделюванні напружено-деформованого стану і прогнозуванні експлуатаційних, у тому числі міцнісних, характеристик елементів конструкцій та приладів.

1. *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл.– Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // Int. J. Eng. Sci. – 2015. – **91**. – P.49–62.
3. *Nahirnyj T., Saşıadek M., Tchervinka K.* Modeling the effect of surface roughness on mechanical fields in an elastic solid bounded by nominally flat surfaces // Int. J. Sol. Struct. – 2024. – **302**. – 112979.

ON INFLUENCE OF SURFACE TREATMENT ON THE STRESSES AND STRAIN IN THIN FILMS

Within the model of a locally inhomogeneous elastic body, the effect of roughness (the method of surface formation) on the stresses in a thin film is illustrated. The topography of the real surface of the body is taken into account by the choice of mass sources in the equation for the mass density and the corresponding boundary conditions. The research was carried out neglecting the profile peaks zone of material ratio curve for various roughness parameters of the thin film surfaces.

ВИЗНАЧЕННЯ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ НАПРУЖЕНЬ В АНІЗОТРОПНОМУ КОМПОЗИТНОМУ КЛИНІ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Микола Махоркін^{1,2}, Ігор Махоркін¹

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН Україна, м. Львів,
²Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів

Розглянуто поздовжній зсув складеного анізотропного клину, утвореного сполученням довільної кількості різнорідних клинів, виготовлених із матеріалів з циліндричною анізотропією. Подібна задача для двокомпонентного клину розглянута у роботі [1]. Запропоновано алгоритм побудови виразів, що описують напружено-деформований стан в композитному клині з довільної кількості елементів. Алгоритм ґрунтується на використанні апарату узагальнених функцій і перетворення Мелліна та успішно використовувався при вивченні багатоклинових систем, елементи яких виготовлені з ізотропних матеріалів.

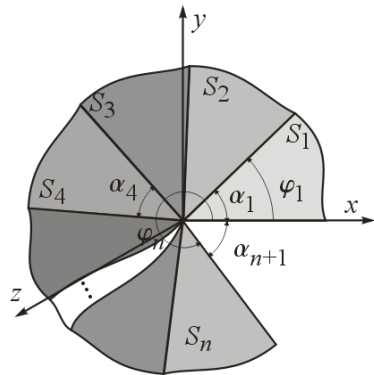


Рис. 1

Анізотропний клин (рис. 1) складено із довільної кількості n різнорідних клинів S_i , $i = \overline{1, n}$ з кутами розхилу α_i , $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$ виконаних із ортотропних матеріалів з циліндричною анізотропією, з'єднаних по своїх бокових поверхнях. Задачу з'ясування напружено-деформованого стану такого клину розв'язуватимемо в циліндричній системі координат (ρ, φ, z) , вважаючи при цьому, що зсув відбувається у напрямку осі Oz , початок якої збігається із вершиною композитного клину, а площина відліку кута (площина $\varphi = 0$) збігається з його відповідною боковою поверхнею. На бічних сторонах клину ($\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_n$), задані умови першої, другої або змішаної задачі теорії пружності. Поверхням з'єднання суміжних клинів S_j та S_{j+1} , $j = \overline{1, n-1}$ відповідають поверхні $\varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j$.

Використовуючи методики постановки узагальненої задачі спряження для багатоклинової системи [2] задача визначення напружено-деформованого стану анізотропного пружного композитного клина зведена до відшукування

розв'язку частково виродженого диференціального рівняння з відповідними крайовими умовами першої, другої чи змішаної задачі теорії пружності. Як і в праці [2], використовуючи для розв'язування отриманого рівняння перетворення Мелліна, записано загальні вирази для опису напружено-деформованого стану клину.

У випадку двохелементного композитного клину побудовано характеристичні рівняння, для з'ясування порядку сингулярності поля напружень $\lambda = p - 1$ поблизу точки сходження клинів матимуть таку структуру:

для першої крайової задачі –

$$\begin{aligned} & \sin[a_2^* p (\varphi_1 - \varphi_2)] \left\langle a_2^* b_{11} \left((a_1^*)^2 + d_1^2 \right) \cos[a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1)] \sin[a_1^* p \varphi_1] - \right. \\ & \left. - \left[(a_1^*)^2 b_{11} d_2 + d_1 (b_{11} d_1 d_2 - b_{12} \left((a_2^*)^2 + d_2^2 \right)) \right] \sin[a_1^* p \varphi_1] \right\rangle = 0; \end{aligned}$$

для другої крайової задачі –

$$\begin{aligned} & (a_1^* b_{11} \cos[a_1^* p \varphi_1] + (b_{11} d_1 - b_{12} d_2) \sin[a_1^* p \varphi_1] + \\ & + a_2^* b_{12} \cos[a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1)] \sin[a_1^* p \varphi_1]) \sin[a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1)] = 0. \end{aligned}$$

Використовуючи описану методику, отримано співвідношення для випадку систем, складених із двох та трьох клинів. Здійснено дослідження залежності порядку сингулярності напружень в околі вершини двокомпонентного композитного клина від механічних та геометричних характеристик його складових.

1. Акоюн В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Гитутюн, 2014. – 322 с.
2. Makhorkin M., Makhorkina T., Pukach P. Математичне моделювання напружено-деформованого стану композитних клиноподібних елементів конструкцій // Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження. – 2021. – 24. – Р. 121–130.

DETERMINATION OF STRESS SINGULARITIES IN AN ANISOTROPIC COMPOSITE WEDGE UNDER LONGITUDINAL SHEAR

The longitudinal shear of a composite anisotropic wedge is considered. Based on the use of the apparatus of generalized functions and Mellin transform, an algorithm for constructing expressions of the stress-strain state in in this wedge is proposed. The singularity of stresses in two- and three-component orthotropic wedges is studied.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ БІМЕТАЛЕВИХ КОНТАКТНИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Тетяна Бардин¹, Богдан Дробенко²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹tetyana.v@i.ua, ²drobenko@ukr.net

В інженерній практиці використовують термочутливий елемент, який містить дві з'єднані в один пакет пластини з різних металів. Внаслідок різних фізико-механічних характеристик його складників, передусім коефіцієнта температурного розширення, біметалевий термоперетворювач під час нагрівання відхиляється в бік елемента з меншим його значенням. Такі термочутливі елементи дають можливість достатньо точно визначати температуру досліджуваних об'єктів за невисокої вартості та незначних затрат на обслуговування. Однак істотний їх недолік – недостатня надійність, позаяк температурні напруження, що виникають під час їх експлуатації, призводять до порушення міцності зчеплення між пластинами і часткового або повного розриву між ними.

Аби уникнути швидкого виходу з ладу біметалевого термоперетворювача, запропоновано таку його конструкцію, за якої пластина з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення виконана із окремих сегментів, а інша – на одній із бокових сторін містить бурти (див. рис. 1; 1 та 2 – пластини з більшим і меншим коефіцієнтом лінійного температурного розширення, відповідно; 3 – бурти; 4 – проміжки між пластинами). Сегменти пластини з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення встановлені між буртами пластини з меншим. Для пом'якшення контакту між пластинами передбачено проміжки; водночас торцеві поверхні буртів пластини з меншим коефіцієнтом лінійного температурного розширення та сегменти пластини з більшим, які до них прилягають, виконано конічними з однаковими кутами нахилу α , які вибирають з умови збереження цілісності термоперетворювача за його згину під час експлуатації. Проміжок 4 між пластинами 1 та 2 усуває тертя між ними.

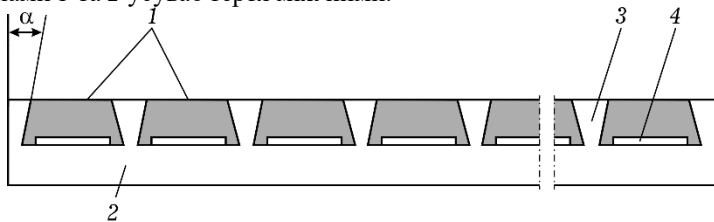


Рис. 1

Досліджено напружено-деформований стан такого термоперетворювача за умов експлуатації в межах загальної задачі термопружності з використанням методу скінченних елементів [1].

Досліджено термоперетворювач з міді ($\alpha_{T_1} = 17.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $E_1 = 100 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0.34$) і сталі-45 ($\alpha_{T_2} = 13.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $E_2 = 195 \text{ ГПа}$, $\nu_2 = 0.3$) [11]; товщини пластин $h_1 = h_2 = 0.0005 \text{ м}$; довжина сегментів $l_0 = 0.005 \text{ м}$; ширина буртів $h_0 = 0.0005 \text{ м}$; проміжок між пластинами $\delta_0 = 0.001 \text{ м}$.

За перебування в середовищі з температурою $T = 5 \text{ К}$ термоперетворювач деформується (див. рис. 2, на якому подано осьові напруження).

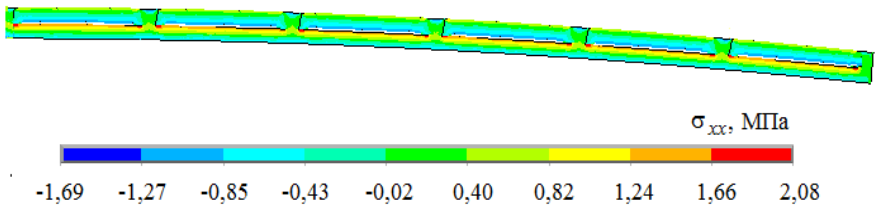


Рис. 2

Напружений стан у термоперетворювачі практично не залежить від кількості секцій (аналогічні результати отримано при 200 секціях). При наближенні до буртів у мідних секціях маємо незначну концентрацію напружень. В центральних частинах сегментів маємо сталий рівень. На нижніх поверхнях пластин маємо стиск, на верхніх поверхнях – розтяг. Завдяки проміжку між пластинами напруження на внутрішній поверхні мідних секцій і верхній поверхні сталевій пластини не працюють на розрив.

Важливо, аби термоперетворювач працював у пружній області, позаяк залишкові температурні деформації внаслідок його пластичного деформування можуть суттєво впливати на параметри роботи вимірювальної апаратури. Виконаний обчислювальний експеримент показав, що у разі виготовлення розглядуваного термоперетворювача з використанням твердого сплаву міді, при відносно повільних швидкостях зміни температури (до $10 \text{ }^\circ\text{C} / \text{с}$) прилад працюватиме в пружній області до температур порядку $850 \text{ }^\circ\text{C}$.

COMPUTER SIMULATION OF DEFORMATION PROCESSES OF BIMETALLIC CONTACT THERMOCONVERTERS

Temperature stresses caused a violation of the bond between the component plates of the bimetallic thermoconverter and cause partial lamination or a complete break between them. It is suggested to make a gap between the plates, and to make the plate with a higher coefficient of thermal expansion in the form of sections that abut against the edges made on a plate with a lower coefficient of thermal expansion. The strength of such design of the bimetallic thermoconverter was investigated.

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ВІЛЬНОГО ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБЕРТАННЯ ЙОГО ЧАСТИН

Юрій Кононов

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ

Розглянуто задачу про можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором вільного гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою обертання його частин. На підставі відомих рівнянь руху системи зв'язаних гіростатів П.В. Харламова і функції стану С.Л. Соболева для ідеальної рідини виведено рівняння обертання у середовищі з опором вільної системи двох і трьох пружно зв'язаних гіроскопа Лагранжа, один із яких має порожнину, повністю заповнену ідеальною нестисловою рідиною. Тверді тіла з'єднані пружними відновлюваними сферичними шарнірами. Отримано трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання для двох ($n = 2$) і трьох ($n = 3$) гіроскопів Лагранжа, один із яких має довільну осесиметричну порожнину з ідеальною рідиною. З урахуванням основного тону коливання рідини отримано характеристичне рівняння п'ятого порядку для $n = 2$ і сьомого порядку для $n = 3$. На підставі критерію Льенара – Шіпара, записаного в іншому вигляді, вписані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа та рідини відносно коефіцієнтів пружності шарнірів і кінетичних моментів його частин, що обертаються. Виконано аналітичні дослідження цих умов. Отримані умови стабілізації є точними для еліпсоїдальної порожнини і наближеними для всіх інших осесиметричних порожнин. Наприклад, для $n = 2$ доведено, що коли перший тон коливання рідин є більшим за одиницю, то це є достатнім, щоб при зростанні коефіцієнта пружності шарніру була можлива стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором вільного гіроскопа Лагранжа з рідиною за допомогою обертання його частини. Для еліпсоїдальної порожнини це означає, що вона повинна бути стиснута вздовж осі обертання. Проведено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості при відсутності дисипативних і постійних моментів.

Характеристичні рівняння при $n = 2$ і $n = 3$ відповідно мають вигляд [1–3]:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 \lambda^2 \\ \mu_1 \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{і} \quad \begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 \lambda^2 & \mu_2 \lambda^2 \\ \mu_1 \lambda^2 & F_2 & \mu_3 \lambda^2 \\ \mu_2 \lambda^2 & \mu_3 \lambda^2 & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

Тут $F_2 = A'_2 \lambda^2 + (iC_2 \omega_0 + D_2) \lambda + k_1 + k_2 - \lambda^2 (i\lambda - \omega_0) \sum_{l=1}^{\infty} E_l / (i\lambda - \tilde{\lambda}_l)$, $E_l = 2a_l^2 / N_l^2$,

$\tilde{\lambda}_l = \omega_0 - \lambda_l = \omega_0 \lambda'_l$, $\lambda'_l = 1 - 2/\kappa_l$ (для $n = 2$ маємо $k_2 = 0$); $F_i = A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i) \lambda + k_{i-1} + k_i$, $k_0 = k_3 = 0$, $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$ ($i = 1, 3$). При $n = 3$ буде:

$$A'_1 = A_1 + m_1 m_{23} c_1^2 / m,$$

$$A'_3 = A_3 + m_3 m_{12} c_3^2 / m, \mu_1 = m_1 c_1 (m_2 c_2 + m_3 s_2) / m, \mu_2 = m_1 m_3 c_1 c_3 / m, \quad (1)$$

$$\mu_3 = m_3 c_3 [m_1 s_2 + m_2 (s_2 - c_2)] / m, m = m_1 + m_2 + m_3, m_{kl} = m_k + m_l,$$

а при $n = 2$ у коефіцієнтах (1) слід покласти масу третього гіроскопа з рідиною $m_3 = 0$.

Слід зазначати, що задача про обертання у середовищі з опором системи пружно зв'язаних твердих тіл з рідиною (СПЗТТР) має їй самостійний науковий і практичний інтерес, оскільки багато об'єктів сучасної техніки можуть бути представлені та досліджені у вигляді СПЗТТР.

Дослідження виконані в рамках конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) та були частково підтримана грантом від Фонду Сімонса (PD-Ukraine-00010584, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

1. *Kononov Yu. M., Sviatenko Ya. I. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, No. 2. – P. 207 – 217.*
2. *Кононов Ю.М. Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи двох твердих тіл, зв'язаних пружним сферичним шарніром і маючих порожнини з рідиною // Український математичний вісник – 2024. – 21, № 2. – С. 38 – 52.*
3. *Кононов Ю.М. Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи трьох пружно зв'язаних твердих тіл // Прикладна механіка – 2024. – 60, № 5 (у друці).*

ON THE STABILIZATION OF ROTATION IN A MEDIUM WITH RESISTANCE OF A FREE LAGRANGE GYROSCOPE WITH AN IDEAL FLUID USING THE ROTATION OF ITS PARTS

Based on the well-known equations of P. V. Kharlamov and the state function of S. L. Sobolev, the possibility of stabilizing the unstable rotation in a resisting medium of a Lagrange gyroscope with an ideal fluid due to the rotation of its elements is considered.

АНАЛІЗ Н-АДАПТИВНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧІ СТАТИКИ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Георгій Шинкаренко¹, Павло Малашняк²

^{1,2}Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
¹theorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua, ²pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua

На засадах моделі оболонки Тимошенка [3] у цьому дослідженні встановлено: *i*) достатні (і цілком вживані для практики) умови коректності варіаційного формулювання крайової задачі статки циліндричної оболонки під дією осесиметричних навантажень; *ii*) структуру векторів жорстких зміщень такої оболонки; *iii*) критерій сингулярної збуреності крайової задачі; *iv*) апостеріорний оцінювач похибок (АОП) кусково лінійних апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) вектора узагальнених зміщень оболонки; *v*) стратегію локального згущення сіток для економного обчислення наближень МСЕ із заздалегідь заданим рівнем допустимої похибки.

Розв'язуємо задачу знаходження вектора узагальнених пружних зміщень $\boldsymbol{\psi} = \{u, w, \gamma\} \in \Phi := \{\boldsymbol{\varphi} = \{v, y, \xi\} \in [H^1(0, L)]^3 : \boldsymbol{\varphi}(0) = 0\}$ такого, що задовольняє рівняння $\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi$, де

$$\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_0^L \left[B(u'v' + R^{-2}w\gamma) + D\gamma'\xi' + vR^{-1}B(wv' + u'y) + B_c(w' + \gamma)(y' + \xi) \right] dz, \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \Phi,$$

$$\langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_0^L \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} dz + \boldsymbol{\sigma}^L \cdot \boldsymbol{\varphi}(L) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi,$$

$\boldsymbol{f} = \{f_u, f_w, f_\gamma\}$, $\boldsymbol{\sigma}^L = \{\sigma_u, \sigma_w, \sigma_\gamma\}$ – задані навантаження, B, B_c, D і v – фізичні параметри оболонки довжини L , радіуса R і товщини t . Аналіз цієї задачі з детальною характеристикою сталих неперервності та еліптичності показав, що її складові виконують умови теореми Лакса-Мільграма-Вишика, тому задача має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від її даних.

Встановлено критерій подібності $\delta = 3LR(vt^2)^{-1}$, великі значення якого вказують на сингулярну збуреність розглядуваної задачі. Показано, що множина векторів жорстких зміщень оболонки має структуру $\boldsymbol{\varphi}_0 = \{v_0, 0, 0\} \notin \Phi \quad \forall v_0 \in R$. Задача еквівалентна до задачі мінімізації: знайти вектор зміщень $\boldsymbol{\psi} = \{u, w, \gamma\} \in \Phi$ такий, що $J(\boldsymbol{\psi}) \leq J(\boldsymbol{\varphi}) = \Pi(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) - 2\langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi$, що дає можливість використання процедур Гальоркіна або Рітца для їхнього числового розв'язання.

Для реалізації цих процедур використано кусково лінійні базисні функції МСЕ $\{\boldsymbol{\varphi}_n(z)\}_{n=1}^N \subset \Phi$, побудовані на сітці скінченних елементів

$T_h = \{K_{i+1}\}_{i=0}^{N-1}$, утвореній вузлами $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$, $K_{i+1} = (z_i, z_{i+1})$, $h_{i+1} = z_{i+1} - z_i$, $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_{i+1}$ [1, 2]. Тоді апроксимація МСЕ $\Psi_h \in \Phi_h \subset \Phi$ є розв'язком задачі, як полягає у знаходженні коефіцієнтів $\{q_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ розвинення $\Psi_h(z) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(z) q_n$ таких, що $\Pi(\Psi_h, \Phi) = \langle l, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in \Phi_h = \text{span}[\{\{\varphi_n, 0, 0\}, \{0, \varphi_n, 0\}, \{0, 0, \varphi_n\}\}_{n=1}^N]$. Застосовуючи методику [1,2,4], оцінюємо похибки наближення кусково квадратичним апостеріорним оцінювачем похибок (АОП), локальні індикатори якого на кожному скінченному елементі визначено в такий спосіб:

$$\varepsilon_{n+1}(z) = 4\varphi_n(z)\varphi_{n+1}(z)\lambda_{n+1} \quad \forall z \in K_{n+1} = (z_n, z_{n+1}), \quad (1)$$

де компоненти вектора $\lambda_{n+1} = \{\lambda_{n+1}^u, \lambda_{n+1}^w, \lambda_{n+1}^\gamma\}$ обчислюються як

$$\lambda_{n+1}^u = h_{n+1}^2 [f_u + (vB) / R \times (w_{n+1} - w_n) / h_{n+1}] / (8B),$$

$$\lambda_{n+1}^w := \frac{5R^2 h_{n+1}^2}{4(10B_c R^2 + B h_{n+1}^2)} \left(f_w - \frac{vB}{R} \frac{u_{n+1} - u_n}{h_{n+1}} - \frac{B}{R^2} \frac{w_{n+1} + w_n}{2} + B_c \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{h_{n+1}} \right),$$

$$\lambda_{n+1}^\gamma = 5h_{n+1}^2 [2h_{n+1} f_\gamma - B_c (2(w_{n+1} - w_n) + h_{n+1}(\gamma_{n+1} + \gamma_n))] / (4(10D + B_c h_{n+1}^2)).$$

Доповнення обчислень апроксимацій МСЕ індикаторами АОП (1) та стратегією локального покращення сітки скінченних елементів [1,2], дозволило створити ітераційну процедуру h -адаптивного відшукування наближень із заздалегідь гарантованою точністю.

1. Абрамов Є., Ліліна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А. Кусково лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2005. – Вип. 11. – С. 3–18.
2. Квасниця Г., Малашияк П., Шинкаренко Г. Порівняння h -адаптивних схем МСЕ різних порядків для одновимірних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та. інф. – 2022. – Вип. 30. – С. 45–59.
3. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вища школа, 1973. – 159 с.
4. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти і застосування. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 396 с.

ANALYSIS OF H-ADAPTIVE FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS IN STATIC PROBLEM OF CYLINDRICAL SHELLS

Based on Timoshenko's shell model [3], this study establishes: (i) sufficient (and quite applicable in practice) conditions for the correctness of the variational formulation of the boundary value problem of the statics of a cylindrical shell under axisymmetric loads; (ii) the structure of the rigid displacement vectors of such shell; (iii) a criterion for the singular perturbation of the boundary value problem; (iv) an a posteriori error estimator of piecewise linear approximations of the finite element method (FEM) for the generalized displacement vector of the shell; (v) a strategy for local mesh refinement to efficiently compute FEM approximations with a predetermined acceptable error level.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВОГО ЗМІЦНЕННЯ ЦИЛІНДРА, ОПРОМІНЕНОГО ТЕРМІЧНИМ ІМПУЛЬСОМ

Ніна Яковенко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, term@inmech.kiev.ua

Розглянуто динамічну осесиметричну зв'язану задачу про імпульсне термічне навантаження сталевго циліндра. Враховано мікроструктурні перетворення через термотрансформаційну деформацію та залежність непружних характеристик матеріалу від фазового складу. В постановку задачі входять: кінематичні співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, де враховуються термопружна, термотрансформаційна та динамічна зв'язаності, а також початкові та граничні умови. Для опису нелінійної поведінки матеріалу використовується модель течії Боднера – Партома, яку узагальнено на випадок урахування залежності параметрів моделі від мікроструктури [1]. Задачу розв'язано за допомогою скінченно-елементної методики. Чисельну реалізацію здійснено шляхом покрокового інтегрування за часом [2]. Досліджено напружено-деформований та мікроструктурний стани циліндра. Надано кількісні та якісні оцінки механізмам поверхневого зміцнення матеріалу.

1. *Senchenkov I. K., Oksenchuk N. D.* Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material // *J. Math. Sci.* – 2013. – **190**, No. 6. – P. 796-803.
2. *Zhuk Y. A., Senchenkov I. K., Kozlov V. I., Tabieva G. A.* Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, No.10. – P. 1311–1317.

NUMERICAL SIMULATION OF THE SURFACE HARDENING OF A CYLINDER UNDER THERMAL PULSE IRRADIATION

In the present work we solve the axially symmetric problem of a cylinder of steel under thermal loading. The statement of the problem includes: Cauchy relations, equations of motion, heat conduction equation, initial conditions, thermal and mechanical boundary conditions. The nonlinear behavior of an isotropic material is described by the flow model generalized to the case of taking into account the influence of the microstructural transformation on the inelastic properties of the material. The problem is solved with using the finite element technique. The numerical realization of our problem is performed with the help of step-by-step time integration. The stress-strain state as well as microstructural state is described. The qualitative and quantitative estimate of the surface hardening of the material is given.

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТІЛА З ПОВЕРХНЕВИМ ПОКРИТТЯМ ПРИ НЕОДНОРІДНОМУ НАГРІВІ

Євген Чапля¹, Богдан Гера²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів;
¹evgen.czaplaj@gmail.com, ²gera-zen@ukr.net

Тонкостінний конструктивний елемент на поверхні тривимірного тіла, у випадку, коли один з його розмірів (товщина) значно менший за інші, часто моделюють тонкостінною оболонкою Розв'язок рівняння теплопровідності в оболонці приводить до умов на поверхні контакту її з теплопровідним тілом. Методи отримання таких умов у вигляді рівнянь на поверхні тіла приведено, зокрема, в роботах [1, 2].

Отримано узагальнені граничні умови для задачі теплопровідності при неоднорідному нагріві з торця півсмуги і отримано розв'язок задачі з цими умовами. Досліджено розв'язки для різних значень теплофізичних характеристик тіла та його покриття. У випадку стрибкоподібної зміни температури вздовж поверхні нагріву наявність покриття приводить до згладжування функції теплового потоку безпосередньо на поверхні тіла.

Інший приклад задачі теплопровідності для півпростору із тонким покриттям постійної товщини на його поверхні. Температура зовнішнього середовища біля поверхні приймається постійною. Нагрів відбувається створенням рівномірного теплового потоку у круговій області на зовнішній поверхні. За межами цієї області маємо теплообмін із зовнішнім середовищем. Вплив покриття на розподіл температури у півпросторі при його нагріванні враховуватимемо використовуючи узагальнену граничну умову записану з урахуванням осесиметрії температури і теплового потоку.

1. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
2. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.

THE PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY FOR A BODY WITH A SURFACE COVERING UNDER NON-HOMOGENEOUS HEATING

The conditions of thermal interaction in bodies with thin elements having other thermophysical characteristics are given. Calculations and analysis of the temperature function in the area of the body and on its surface were carried out for some ratios between the values of parameters and characteristics of the body and surface coating.

ПРОГНОЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДЕФОРМАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРОСТОРОВО АРМОВАНИХ ВОЛОКНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ

Олена Шидула¹, Наталія Жукова²

^{1,2}Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ,
¹Державний університет інформаційно-телекомунікаційних технологій, м. Київ,
esh@ukr.net, zzhukova_n@ukr.net

Метою дослідження є побудова моделі для прогнозування нелінійних деформативних властивостей та напружено-деформованого стану просторово армованих волокнистих матеріалів з лінійними трансверсально-ізотропними волокнами та фізично нелінійною ізотропною матрицею. Розглянуто армований волокнистий матеріал стохастичною структури як сукупність підсистем, кожна з яких є односпрямованим волокнистим матеріалом з волокнами, орієнтованими певним чином відносно загальної системи координат та пов'язаних матрицею. Матеріал волокон вважаємо трансверсально-ізотропним з відносною симетрії уздовж волокон, а матеріал матриці – ізотропний фізично нелінійний.

Визначення ефективних деформативних характеристик матеріалу виконано в два етапи. На першому етапі визначаються ефективні властивості підсистеми, що є односпрямованим волокнистим матеріалом, утвореним волокнами певного напрямку і частиною матриці з об'ємним вмістом, пропорційним об'ємному вмісту волокон цього напрямку. Розв'язання задачі першого етапу базується на стохастичних диференціальних рівняннях фізично нелінійної теорії пружності та моделі [1 – 3]. На другому етапі за обчисленими властивостями підсистем визначаються ефективні властивості всієї системи. Розв'язок задачі другого етапу будується на основі схеми Фойхта. У випадку фізичної нелінійності матриці, оскільки деформативні характеристики матриці є функціями середніх в матриці деформацій, ефективні деформативні характеристики просторово армованого волокнистого матеріалу також є функціями середніх в матриці деформацій. Тому для визначення ефективних деформативних властивостей просторово армованого матеріалу потрібно встановити співвідношення між середніми деформаціями в матриці та макродеформаціями, що задаються.

Розглядається декілька випадків просторового армування волокнистих матеріалів для волокон, розташованих паралельно до координатних осей, по діагоналях куба, у площині x_1x_2 уздовж сторін рівностороннього трикутника і по нормалі до площини x_1x_2 .

На рис. 1, 2 наведено залежності осьових та зсувних макронапружень від макродеформацій при різних об'ємних концентраціях волокон, розташованих паралельно до координатних осей. На рис. 3, 4 наведено залежності осьових та зсувних макронапружень від макродеформацій при різних об'ємних концентраціях волокон, розташованих по діагоналях куба.

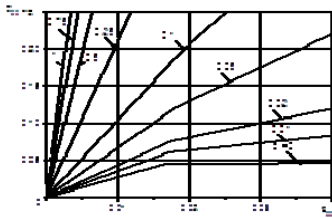


Рис. 1

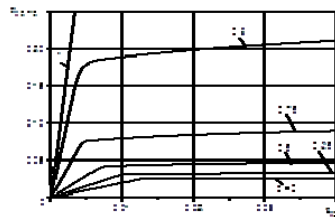


Рис. 2

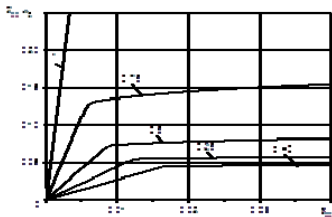


Рис. 3

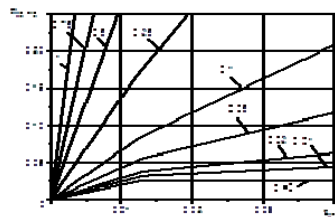


Рис. 4

У випадку армування волокнами паралельно до координатних осей нелінійність деформування композиту найбільше проявляється при зсувних навантаженнях, тому такий тип деформування слід застосовувати при високих осьових навантаженнях. При армуванні волокнами по діагоналях куба нелінійність є найбільш суттєва при осьових навантаженнях, тому такий випадок армування краще працює при високих зсувних навантаженнях

1. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикун Е.Н. Механика композитов: В 12 т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 12: Прикладные исследования. – Киев: «А.С.К.», 2003. – 398 с.
2. Хорошун Л.П., Шикун Е.Н. Деформирование физически нелинейных стохастических композитных материалов. Деформирование и кратковременная повреждаемость физически нелинейных стохастических композитных материалов / Успехи механики: В 6-ти томах / под редакцией А.Н.Гузя. / Том 6 (книга 2). – Киев: Литера ЛТД, 2011. – 832 с. – С. 161–191, 436–463.
3. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and damage of composite materials of stochastic structures: physically nonlinear problems // International Applied Mechanics. – 2012. – 48, No. 4. – P. 359–413.

PREDICTION OF NONLINEAR DEFORMATIVE PROPERTIES OF SPATIALLY REINFORCED FIBROUS MATERIALS

A model of nonlinear deformation of spatially reinforced fibrous materials with a physically nonlinear matrix was constructed. Determination of the effective deformative properties and stress-strain state of the material is based on stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity. To solve the problem, the method of conditional moments is used.

РОЗРАХУНОК ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНОЇ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОЇ ТОНКОЇ СЕКТОРАЛЬНОЇ КРУГОВОЇ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВІ КЛАСИЧНОЇ ТА ДЕЯКИХ УТОЧНЕНИХ ТЕОРІЙ

Роман Тучапський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
roman.tuch@gmail.com

Побудовано алгоритм чисельно-аналітичного розв'язування задач про напружено-деформований стан локально навантажених тонких ортотропних секторальних кругових пластинок на основі теорій методу $\{m, n\}$ -апроксимації, Кірхгофа та типу Тимошенка. З вихідних систем рівнянь цих теорій отримано еквівалентні системи рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних від узагальнених переміщень і деяких узагальнених напружень відносно радіальної координати [4]. Ці системи аписано в спеціальній формі і, подібно до [2], за допомогою розвинень у тригонометричні ряди Фур'є по коловій координаті всіх величин, що характеризують напружено-деформований стан пластинки і зовнішнє навантаження, зведено до послідовностей незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

На основі методу ортогональної прогонки С. К. Годунова [3] побудовано алгоритм послідовностей розв'язувань крайових задач для цих нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь. У якості прикладу використання цього алгоритму розглянуто задачі про напружено-деформований стан локально навантаженої шарнірно закріпленої по краях тонкої ізотропної секторальної кругової пластинки. При цьому для моделювання локальних навантажень було використано дельтоподібні функції і їх тригонометричні розвинення [1] по кільцевій координаті.

1. Бурак Я. Й., Рудаєвський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: “Інтелект-Захід”, 2007. – 240 с.
2. Василенко А. Т., Григоренко Я. М., Судаєцова Г. К. Решение задач о напряженном состоянии тонких оболочек вращения при локальных нагрузках // Прикладная механика. – 2000. – 36, № 4. – С. 106 – 113.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – XVI, вып. 3. – С. 171 – 174.
4. Тучапський Р. І. Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу $\{m, n\}$ -апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 43 – 56.

CALCULATION OF A LOCALLY LOADED HINGED THIN SECTORAL CIRCULAR PLATE BASED ON CLASSICAL AND SOME REFINED THEORIES

The problems of calculating the stress-strain state of locally loaded thin orthotropic sectoral circular plates based on the Kirchhoff theory and some refined theories are considered.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ КРОВІ В М'ЯКИХ ТКАНИНАХ ЖИВИХ ОРГАНІЗМІВ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ

Ярослав П'янило^{1,2}, Ганна Лянце¹, Анатолій Лопатьєв³, Андрій Власов³, Юрій Хоркавий⁴

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,

² Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

³ Львівський державний університет фізичної культури імені Івана Боберського, м. Львів,

⁴ Львівський національний медичний університет імені Данила Галицького, м. Львів

Для математичного моделювання процесу поширення крові в м'яких тканинах у літературі використовують два підходи: 1) моделювання руху крові по капілярах з урахуванням точок розгалуження або 2) моделювання м'яких тканин як пористих середовищ і трактування поширення крові як процесу фільтрації. М'які тканини моделюються пористим середовищем, в якому роль пор відіграють капіляри, а поширення в м'яких тканинах крові реалізується як процес фільтрації, описаний рівняннями в частинних похідних.

Метою дослідження є побудова математичної моделі розподілу тиску крові в м'яких тканинах живих організмів з урахуванням деформації середовища, дослідження її адекватності на основі числових експериментів.

Якщо пористе середовище деформується зі зміною наповнювача в ньому, то коефіцієнт пористості буде функцією тиску. Найпростішою гіпотезою є те, є пропорційний що коефіцієнт пористості зміні тиску, тобто $dm = dp/\alpha_1$.

У випадку малостисливої рідини рівняння нерозривності в об'єктах, які досліджуються, і мають циліндричну форму незначної висоти має вигляд

$$\partial p^2 / \partial r^2 + 1/r \partial p / \partial r = m\mu / k\alpha (1 + \alpha / m\alpha_1) \partial p / \partial t,$$

де α - модуль об'ємної пружності, α_1 - деякий параметр, який характеризує пористе середовище. У роботі побудовано математичну модель розподілу тиску в порожнистому циліндрі з внутрішнім радіусом a та зовнішнім b за сталого початкового розподілу та наступних граничних умов $k_1 \partial p / \partial r - k_2 p = k_3$ для $r = a$, та $k'_1 \partial p / \partial r - k'_2 p = k'_3$, $r = b$.

SIMULATION OF THE BLOOD PROPAGATION PROCESS IN SOFT TISSUES OF LIVING ORGANISMS TAKING DEFORMATION INTO ACCOUNT

In the work, a mathematical model of the distribution of fluid pressure in the soft tissues of living organisms was built, taking into account the deformation of the medium, and its adequacy was investigated on the basis of numerical experiments.

ПРО СПОСОБИ ЗНИЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВОКОЛО КРУГОВОГО ОТВОРУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З КІЛЬКОМА ЕЛІПТИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Естері Гарт¹, Олександр Шебанов²

^{1,2}Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, м. Дніпро,
¹hart@ua.fm, ²alexander.shebanov@gmail.com

Тонкостінні елементи конструкцій (пластини та оболонки) широко використовуються в різних галузях техніки, включно з ракетобудуванням, авіацією, енергетикою, нафтогазовою промисловістю, будівництвом та ін. Через конструктивні або технологічні вимоги суцільність матеріалу конструкції може порушитись внаслідок утворення отворів і включень, що спричиняє неоднорідність структури. Це суттєво впливає на розподіл напружень і процеси деформування та руйнування системи. Важливим завданням механіки деформівного твердого тіла є дослідження впливу локальних концентраторів напружень на напружено-деформований стан (НДС) елементів тонкостінних конструкцій і знаходження способів зниження концентрації напружень. Для вивчення цих явищ широко використовують числові методи механіки, які, на відміну від аналітичних, є більш універсальними та ефективними для розв'язання такого класу проблем [3, 4].

У цій роботі досліджено НДС тонкостінної циліндричної оболонки з малим круговим отвором і розташованими навколо нього кількома еліптичними включеннями з іншого матеріалу. Розглянуто три конфігурації розміщення включень відносно отвору: 2 включення з вертикальним розташуванням, 2 включення із горизонтальним розташуванням, а також 4 включення, розташовані симетрично вздовж координатних осей. За допомогою методу скінченних елементів здійснено аналіз впливу відстані між отвором та включеннями, способом їх розташування, а також механічних властивостей включень на концентрацію параметрів НДС оболонки навколо отвору. Проведено порівняння одержаних результатів із відомими даними для оболонки без включень [2] та аналогічних задач для пластин [1].

Для зручності аналізу введено коефіцієнт відносної жорсткості включення $k = E_{\text{вкл}} / E_{\text{об}}$ ($E_{\text{вкл}}$ – модуль пружності включення, $E_{\text{об}}$ – модуль пружності оболонки). Включення вважалось «жорстким» при $k > 1$ та «м'яким» при $k < 1$. Розглянуто розташування двох та чотирьох включень для різних варіантів відстані l ($l = 8r; 5r; 3r; 2,5r$) між круговим отвором радіусу r та геометричним центром еліптичного включення у разі $k > 1$ та $k < 1$. Для кожної з досліджуваних конфігурацій визначено коефіцієнт концентрації напружень (ККН).

Для вертикального розташування двох включень числовий аналіз показав, що найбільш доцільним є використання «м'яких» включень. Це дає змогу зменшити ККН від ~4% до ~20% у порівнянні з оболонкою без включень [2].

Зокрема, при розташуванні включень на відстані $l=2,5r$ величина ККН зменшується на $\sim 20\%$, при $l=8r$ – на $\sim 4\%$. У разі двох вертикально розташованих «жорстких» включень величина ККН, навпаки, зростає від $\sim 2\%$ до $\sim 8\%$. Ці результати добре узгоджуються з результатами для аналогічної задачі для пластини [1].

Для горизонтального розташування двох включень аналіз показав, що найбільш доцільним є використання «жорстких» включень. Це дає змогу зменшити ККН від $\sim 1\%$ до $\sim 36\%$ у порівнянні з оболонкою без включень [2]. Зокрема, при розташуванні включень на відстані $l=2,5r$ величина ККН зменшується на $\sim 36\%$, при $l=8r$ – на $\sim 1\%$. У разі двох горизонтально розташованих «м'яких» включень величина ККН, навпаки, зростає від $\sim 1\%$ до $\sim 46\%$.

У випадку використання чотирьох включень, розташованих симетрично вздовж координатних осей, величину ККН вдається зменшити на $\sim 31\%$, використовуючи «жорсткі» включення та розташовуючи їх на відстані $l=2,5r$. У разі чотирьох «м'яких» включень найкращим варіантом є їх розташування на відстані $l=5r$, що дає змогу зменшити величину ККН на $\sim 5\%$.

Отже, за розглянутих варіантів параметрів і розташування еліптичних включень отримано, що конфігурація із найменшою відстанню $l=2,5r$ є найкращою з точки зору зниження концентрації напружень в оболонці в разі горизонтального розташування «жорстких» еліптичних включень (на $\sim 36\%$). Перспективним є пошук раціональних параметрів включень (їх форми, розмірів, кількості, механічних властивостей та розташування) щодо впливу на зменшення величини ККН.

1. Гарт Е. Л., Рибалко Я. В. Взаємовплив кругового отвору і оточуючих його еліптичних включень при пружному деформуванні прямокутної пластини // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2019. – Вип. 30. – С. 5–18.
2. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
3. Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A. Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Sc. – 2017. – 52, № 6. – P. 768–774.
4. Hart E. L., Hudramovich V. S. Projection-iterative schemes for the realization of the finite element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – 203, No. 1. – P. 55–69.

ON METHODS OF REDUCING STRESS CONCENTRATION AROUND A CIRCULAR HOLE IN A CYLINDRICAL SHELL WITH SEVERAL ELLIPTICAL INCLUSIONS

Of the considered options for the arrangement of two elliptical inclusions around a circular hole in a cylindrical shell, the option of their horizontal arrangement using more “hard” inclusions ($k > 1$) turned out to be rational from the point of view of reducing stress concentration, which made it possible to reduce the value of the stress concentration coefficient by $\sim 36\%$. For “softer” inclusions ($k < 1$), their vertical location turned out to be the best option, and the value of the stress concentration factor can be reduced by $\sim 20\%$. Using of four elliptical “hard” inclusions allows to reduce the value of the stress concentration coefficient by $\sim 31\%$. These results are in good agreement for the corresponding plate.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ КІЛЬЦЕВОГО ВКЛЮЧЕННЯ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ НА КОЕФІЦІЄНТ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ

Богдан Терьохін¹, Етері Гарт²

^{1,2}Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, м. Дніпро,
¹bogdan.teryokhin@gmail.com; ²hart@ua.fm

У сучасних умовах вимоги до властивостей конструкційних матеріалів стають дедалі жорсткішими. Особливо це стосується матеріалів аерокосмічної техніки, ядерної енергетики, машинобудування та інших галузей, що відрізняються вкрай несприятливими, екстремальними умовами експлуатації відповідальних деталей, елементів конструкцій та агрегатів. З кожним роком функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) все частіше застосовуються в інженерній практиці, оскільки поступова зміна властивостей дозволяє отримати нові матеріали з більш широким спектром застосування в порівнянні з традиційними композитами [1, 3].

Оболонкові відсіки з підкріпленими отворами є типовими для конструкцій ракет-носіїв (РН). Дослідження, що полягають у виборі раціональних типів підкріплень, які забезпечують мінімальні коефіцієнти концентрації напружень (ККН), є актуальними при проєктуванні сучасних РН. Одним із способів зниження концентрації напружень навколо отворів є застосування включень із ФГМ.

У цій роботі на основі методу скінченних елементів проведено комп'ютерне моделювання поведінки тонкостінної циліндричної оболонки довжини L , діаметру d з центрально розташованим квадратним отвором зі стороною $2c$ та кільцевим радіально-неоднорідним включенням радіусу R_1 за дії одновісного рівномірного навантаження розтягу $p = \text{const}$, що не призводить до появи пластичних деформацій. Вважалося, що включення змодельоване вставкою, яка має однакову з оболонкою товщину; на межі включення із матрицею задані умови ідеального механічного контакту.

У числових розрахунках вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu_0 = 0,25$ та змінним модулем пружності ФГМ-включення. Як показано у [2], для зниження концентрації напружень доцільно використовувати закон зміни модуля пружності ФГМ-включення з трьома характерними зонами: 1) зона зростання ширини h_1 ; 2) зона незмінного (фіксованого) значення ширини h_2 ; 3) зона зменшення модуля пружності ширини h_3 . У розрахунках прийнято, що модуль пружності оболонки $E_0 = 100 \text{ ГПа}$; коефіцієнт відносної жорсткості ФГМ-включення $k=2, 3, 4$ (k – відношення модуля

пружності другої зони ФГМ-включення E_2 ($E_{\max}^{вкл}$) до модуля пружності оболонки E_0). Ширину ФГМ-включення варіювали: $h_{вкл} = 3c, 4c, \dots, 9c$ ($h_1 = h_3 = c, h_2 = c, 2c, \dots, 7c$).

Результати скінченноелементного аналізу проведених обчислювальних експериментів показали, що використання ФГМ-включень в циліндричній оболонці з квадратним отвором призводить до ефекту значного зменшення величини ККН в околі отвору (на ~56%) і максимальних деформацій (на ~58%). При збільшенні величини модуля пружності ФГМ-включення має місце тенденція зменшення величини ККН і коефіцієнта концентрації деформацій.

Порівняльний аналіз одержаних результатів для випадку наявності в оболонці ФГМ-включення із відповідними результатами для оболонок за наявності однорідних включень показує, що застосування саме ФГМ-включень має значні переваги: спостерігається механічний ефект зменшення як інтенсивності напружень, так і інтенсивності деформацій в зоні концентрації параметрів напружено-деформованого стану. У разі застосування однорідних включень такого ефекту не відбувається.

Отже, за результатами проведеного комп'ютерного моделювання поведінки тонкостінних циліндричних оболонок з квадратним отвором і радіально-неоднорідним включенням встановлено вплив механічних властивостей ФГМ-включення, закону зміни величини його модуля пружності та ширини включення на ККН в оболонці. Знайдено раціональні параметри радіально-неоднорідного ФГМ-включення, надано рекомендації щодо практичного засновування одержаних результатів.

1. *Механика композитов*. Т. 7. Концентрация напряжений / Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. (ред.). – К.: “А.С.К.”, 1998. – 387 с.
2. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Terokhin B. I.* Stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shells with a radially inhomogeneous inclusion // *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials: Collected work.* – Springer, Cham. – 2024. – **204**. – Chapter 18. – P. 249–264.
3. *Yang Q., Cao H., Tang Y., Li Y., Chen X.* Experimental investigation of stress distributions in 3D printed graded plates with a circular hole // *Materials.* – 2021. – **14**, No. 24, 7845. – P. 1–13.

COMPUTER SIMULATION OF THE INFLUENCE OF AN ANNULAR INCLUSION FROM FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL ON THE STRESS CONCENTRATION FACTOR IN A CYLINDRICAL SHELL WITH A SQUARE HOLE

Based on the results of the computer simulation of the behavior of thin-walled cylindrical shells with a square hole and a radially inhomogeneous inclusion, the influence of the elastic modulus of the FGM inclusion and its width on the SCF in the shell was investigated. The rational parameters of a radially inhomogeneous FGM inclusion were established, which allows obtaining a mechanical effect: a decrease in the SCF by ~56% and the corresponding deformations by ~58%.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШКОДЖЕННЯ ОБТІЧНИКА ЛІТАКА ПРИ ЗІТКНЕННІ З ПТАХАМИ

Наталія Сметанкіна

Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України, м. Харків, nsmetankina@ukr.net

Підвищення вимог щодо безпеки польотів літаків висуває на передній план комплекс нових проблем, пов'язаних із забезпеченням міцності планера конструкції. Зокрема, серед різноманітних впливів на літальний апарат останнім часом став актуальним клас так званих ударних навантажень. Природа цих впливів може бути різною: вибух у салоні, зіткнення зі сторонніми предметами в польоті та при наземній експлуатації. Типовою характеристикою ударів є вплив локальних навантажень протягом короткого проміжку часу. Удар призводить до різкого стрибка напружень та деформацій у локальній зоні конструкції літального апарата. До таких впливів слід віднести зіткнення літального апарату в польоті з птахами [1].

Обтічник літака це стійка до атмосферних впливів конструкція, яка захищає, наприклад, радарну антену. Основною функцією обтічника є створення захисного покриття між антеною та навколишнім середовищем з мінімальним впливом на електричні характеристики антени. Обтічники можуть мати кілька форм (сферична, у вигляді пластина або конуса тощо) залежно від конкретного застосування з використанням різних конструкційних матеріалів (скловолокна, тканини зі спеціальним покриттям тощо). Існує велика різноманітність типів обтічників, і їх можна розмістити на різних частинах літака, тому для кожного випадку розробляють їх різні конструкції.

Розглянуто зіткнення птаха з обтічником, який виготовлено з легкої сендвіч-композитної конструкції, що складається з кевларового волокна (обшивки) та стільникового внутрішнього шару з полімерного матеріалу. Для дослідження цієї шаруватої композитної структури використано оболонкову теорію [3]. Для оцінки міцності конструкції застосовано критерій міцності Цая-Бу [2]. Розроблену гідродинамічну модель птаха на основі методу SPH (метод гідродинаміки згладжених частинок). Для моделювання матеріалу птаха використано «нульовий» матеріал з низькою міцністю.

При виборі моделі птаха враховувалося, що вода є основною частиною справжніх птахів. Таким чином, в аналізі впливу птахів гідродинамічна поведінка типу води може бути дійсним наближенням для базової моделі. Крім того, всередині частин тіла птаха є кілька пустот, таких як легені, кістки і повітряні мішки. Тому в сукупності усі ці фактори знижують середню густину птаха. Для моделювання птахів можна використовувати однорідний

матеріал з густиною $900-950 \text{ кг/м}^3$, а удар птаха можна розглядати як гідродинамічний удар, оскільки при дуже високих швидкостях удару птах діє як рідина.

Валідація була виконана шляхом проведення розрахунків ударів птахів по перешкоді з використанням моделі птиха та порівнянням даних розрахунків з наявними експериментальними даними натурних досліджень ударів птахів [4]. Як перешкода розглядалася сталевая плита, що деформується. В результаті валідації визначено, що модель птаха здатна адекватно відтворювати ударні навантаження, що діють при ударі реального птаха. Комп'ютерну реалізацію процесу зіткнення обтічника з птахом виконано в скінченноелементному комплексі. Змодельовано зону кріплення обтічника до фюзеляжу літака, щоб його можна було кріпити до обтічника через болти. Зовнішню форму обтічника описано поворотом навколо осі, яка задовольняє співвідношення поліноміальної функції. Місце зіткнення обтічника з птахом у розрахунковому дослідженні обрано так, щоб завдати обтічнику найбільшого руйнування. За результатами аналізу результатів розрахунку досліджено пошкодження обтічника. Підтверджено, що тенденція змінення тиску під час зіткнення відповідає раніше отриманим результатам, що забезпечило надійність моделі чисельного аналізу.

Результати цієї роботи отримано у рамках виконання НДР за Цільовою науковотехнічною програмою оборонних досліджень НАН України на 2020–2024 рр., код програмної класифікації видатків (КПКВК) 6541230 (прикладні дослідження).

1. *El-Sayed A.F.* Bird strike in aviation: statistics, analysis and management. – New Jersey: John Wiley and Sons, 2019. – 368 p.
2. *Smetankina N.V.* Non-stationary deformation, thermal elasticity and optimisation of laminated plates and cylindrical shells. – Kharkiv: Miskdruk Publishers, 2011. – 376 p.
3. *Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O.* Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact // Lecture Notes in Networks and Systems. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020. – 2021. – **188**. – P. 267-276.
4. *Smetankina N., Malykhina A., Merkulov D.* Simulating of bird strike on aircraft laminated glazing // MATEC Web of Conferences. – 2019. – **304**. – P. 01010-01016.

MATHEMATICAL MODELING OF DAMAGE PROCESSES OF AIRCRAFT FAIRING IN COLLISION WITH BIRDS

The main objective of the study is to model the damage processes of an aircraft fairing in a collision with birds. The fairing consists of a composite laminate and a sandwich structure. A bird model was created using the SPH method. The adequacy of the numerical analysis model is confirmed by a good agreement between the calculation results and experimental data.

IMPROVEMENT OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF IMPACT-RESISTANT AND ULTRAHIGHTEMPERATURE BORIDE- AND CARBIDE-BASED CERAMIC COMPOSITES

Pavlo Barvitskyi¹, Boris Karpinos², Tetiana Prikhna¹, Vitaliy Kulish

¹ V. Bakul Institute for Superhard Materials NAS of Ukraine, Kyiv, barvitskp@gmail.com,

² G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength NAS of Ukraine, Kyiv

The mechanical characteristics of impact-resistant and ultrahigh-temperature ceramic composites based on borides and carbides (such as B_4C -SiC, AlB_{12} -TiC, HfB_2 -SiC, HfC - $MoSi_2$, ZrB_2 -SiC, and ZrB_2 -SiC-ZrC) have been significantly improved through high (4.1 GPa) and moderate (30 MPa) pressure sintering and the formation of solid solutions. These materials are ideal for protective applications like body armor for special forces, VIPs, helicopter and airplane protection, as well as for abrasive nozzles, ceramic bearings, and structural ceramics in nuclear power plants.

Elemental interdiffusion was confirmed by EDX and Auger spectroscopy, even when X-ray diffraction could not definitively confirm it. Composites based on B_4C -SiC and $AlB_{12}C_2$ -TiB showed better mechanical properties than those reported for similar materials in literature. The dynamic strength of the ceramics was found to be 2-5 times higher than under static loading. These results were integrated into computer models for simulating armor penetration, utilizing numerical methods for solid mechanics, geometric modeling, finite element analysis, and deformation/destruction modeling. It is known that the processes of dynamic deformation and destruction of materials are extremely complex. Therefore, the models that describe them are also complex. Phenomenological models have many empirical parameters.

To describe the deformation of plastic materials, the model of an isotropic plastic material with kinematic strengthening, the Johnson-Cook Strength model, is used for low-plastic ceramic materials – the Johnson-Holmquist JH-2 (Johnson-Holmquist Strength Segmented) model.

The computer simulation consisted of two parts. The first is a comparison of the results of test calculations with the experiment, and the second is the determination of the impact of various design solutions on the load-bearing capacity of armor protection elements. The main indicators of the effectiveness of protection were the change in the speed of the bullet in the process of penetration and the size of the destroyed part of the package.

The test consisted in the numerical solution of the problem of piercing a square plate with dimensions $l \times h = 60 \times 60 \times 10$ mm with a steel bullet with a diameter of $\Phi = 7.62$ mm (bullet caliber 7.62). The initial speed of the ball $V_0 = 940$ m/s. A direct central strike was considered. Based on calculations with successive

changes in the thickness of the plate, the maximum thickness of its penetration was determined, $h=4$ mm. An irregular grid of 8-node finite elements is chosen for the plate model. Around the projected point of contact between the sphere and the plate, thickening of the mesh occurred. Boundary conditions - rigid fixation of the outer contour of the plate. The contact between the ball and the plate is friction with a coefficient of 0.1.

It was established that the plate does not break through under the test conditions. During the penetration, the total mechanical energy of the ball decreases, and the plate increases. The ball flattens almost completely. This is evidenced by changes over time in the speeds of its various sections. The deformation of the plate is localized in a circular area with a size of about 3 diameters of the sphere. Significant spatial and temporal heterogeneity of the parameters of the stress-deformed state of the plate and sphere is observed. According to the results of the test calculation, the plate with a thickness of $h=10$ mm meets the conditions of armor protection. This conclusion is confirmed by the results of bench tests. Ballistic studies of protective bonded with polyurethane and wrapped in Kevlar or fiberglass showed that the plates withstand the impact of a bullet with a kinetic energy of $W=3.4-3.7$ kJ. Comparison of the results of the experiment and the test gave reason to consider the numerical modeling correct.

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИЙ АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Георгій Шинкаренко¹, Василь Танчинець², Олександр Вовк³

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів;
¹theorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua, ²vasyl.tanchynets@lnu.edu.ua, ³vovk@windowslive.com

Розглянемо варіаційну задачу конвекції-дифузії [1-2], яка полягає у знаходженні $u \in V$ такого, що $a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V$, де

$$a(u, v) := \int_{\Omega} [(\mu \nabla u) \cdot \nabla v + \nu \beta \cdot \nabla u] dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u v d\gamma \quad \forall u, v \in V, \quad (1)$$

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_q} g v d\gamma \quad \forall u, v \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \partial\Omega\},$$

з метою обчислити її наближений розв'язок із заданою похибкою.

(i) Застосовано апроксимації методу скінченних елементів (МСЕ) $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_n \varphi_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ з кусково лінійними базисними функціями, побудованими на конформній триангуляції $\mathfrak{T}_h(\mathbf{x}) = \{K\}$, $\bigcup_{K \in \mathfrak{T}_h} K = \Omega$. За допущення про коректність задачі (1), розв'язок системи рівнянь Гальоркіна

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathfrak{T}_h = \{K\} \text{ і } V_h = \text{span}[\{\varphi_i\}_{i=1}^N] \subset V, \dim V_h = N < +\infty \\ \text{знайти коефіцієнти розвинення } u_h = \sum_{n=1}^N q_n \varphi_n \in V_h \text{ такі, що} \\ \sum_{n=1}^N a(\varphi_n, \varphi_i) q_n = \langle l, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (2)$$

однозначно визначає кожне $q_n \in \mathbb{R}$ як наближення до $u(A_n)$, де A_n – вершина трикутника K така, що $A_n \notin \Gamma_u$, за дет. див. [1, 2].

(ii) Щоб одержати змістовну оцінку похибки $e_h := u - u_h \in V / V_h$, її наближення $\varepsilon_h \notin V_h$ – апостеріорний оцінювач похибки (АОП) – для кожного скінченного елемента $K = \Delta A_i A_j A_m \in \mathfrak{T}_h$ описується індикаторами вигляду

$$\varepsilon_h(\mathbf{x})|_K \equiv \varepsilon_K(\mathbf{x}) := u_h(\mathbf{x}) - U_K(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in K,$$

$$U_K(\mathbf{x}) := c_0 + \sum_{i=1}^2 c_i \exp[\mu^{-1}(\mathbf{x}^K) \beta_i(\mathbf{x}^K)(x_i - x_i^K)] \quad (3)$$

$$+ [\sum_{i=1}^2 \beta_i(\mathbf{x}^K)]^{-1} f(\mathbf{x}^K)(x_1 + x_2) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in K,$$

де $\mathbf{x}^K = (x_1^K, x_2^K)$ – центр ваги трикутника K , а коефіцієнти $\{c_i\}_{i=0}^2 \in \mathbb{R}$ розв'язками СЛАР $U_K(A_n) = u_h(A_n)$, $n = i, j, m$.

Список норм $\{\|\varepsilon_K\|_{1,K}\}_{K \in \mathfrak{T}_h}$ характеризує розподіл похибок МСЕ на біжучій триангуляції і разом з нормою $\|\varepsilon_h\| := \|\varepsilon_h\|_{1,\Omega} = (\sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \|\varepsilon_K\|_{1,K}^2)^{1/2}$ слугують надійною основою для аналізу якості наближення $u_h \in V_h$.

(iii) Надійність та ефективність АОП ілюструється результатами експериментів, зокрема, з сингулярно збуреною задачею Діріхле в $\Omega = (0,1)^2$, $Pe \cong 140$ і розв'язком $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2 [1 - \chi_1(\mathbf{x})][1 - \chi_2(\mathbf{x})]$, $\chi_i(\mathbf{x}) = \exp[-(1 - x_i)\mu^{-1}]$, див. [3].

Таблиця: Збіжність апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних сітках до рівня похибки $\delta_h = \|\varepsilon_h\| / \|u_h\| 100\% \leq 3\%$, $\delta = \|e_h\| / \|u\| 100\%$, $\kappa_h = \|\varepsilon_h\| / \|e_h\|$, $p_h = \ln[\|\varepsilon_h\| / \|\varepsilon_{h/2}\|] / \ln(N_{h/2} / N_h)$, $N = N(\mathfrak{T}_h)$ і $Card(\mathfrak{T}_h)$ – кількість вузлів та елементів триангуляції \mathfrak{T}_h відповідно.

h^{-1}	$N(\mathfrak{T}_h)$	$Card(\mathfrak{T}_h)$	$\ e_h\ $	$\ \varepsilon_h\ $	δ	δ_h	κ_h	p_h
20	841	1 600	4.272	4.795	75.9	85.2	1.12	0.5
40	3 281	6 400	2.860	3.104	50.8	55.2	1.09	0.6
80	12 961	25 600	1.612	1.709	28.6	30.4	1.06	0.9
160	51 521	102 400	0.835	0.878	14.8	15.6	1.05	1.0
320	205 441	409 600	0.422	0.442	7.5	7.9	1.05	1.0
640	820 481	1 638 400	0.211	0.221	3.8	3.9	1.05	1.0
1280	3 279 361	6 553 600	0.106	0.111	1.9	2.0	1.05	1.0

Перегляд даних таблиці свідчить, що запропонований АОП $\|\varepsilon_h\|$ здатний надійно обчислювати верхню межу похибки апроксимацій МСЕ з індексом ефективності $\kappa_h \cong 1$ і відтворює її асимптотичний порядок збіжності $p_h \cong 1$.

1. Шинкаренко Г., Танчинець В., Вовк О. Апостеріорні оцінювачі похибок та h -адаптивні кусково-поліноміальні апроксимації на трикутних скінченних елементах // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. мат. та інф. – 2023. – Вип. 31. – С. 87–104.
2. Ostapov O.Yu., Shynkarenko H.A., Vovk O.V. A posteriori error estimator and h -adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems. Recent Advances in Computational Mechanics, London, Taylor&Francis Group. – 2014. – P. 329–337.
3. Zhang. Z. Finite element superconvergence on Shishkin mesh for 2-D convection-diffusion problems // Math. Comp. – 2003. – 72. – P. 1147–1177.

EXPONENTIAL A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR OF FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS

We propose an a posteriori error estimator capable of calculating the upper bound for linear piecewise finite element approximations in 2D convection-diffusion problems on triangular meshes

ГІПОПРУЖНИЙ МАТЕРІАЛ. ЛІНЕАРИЗОВАНА ТЕОРІЯ. ХВИЛІ. ПІДХІД КРІСТОФЕЛЯ

Ярема Рушицький

Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, м. Київ, rushch@inmech.kiev.ua

Доповідь складається з 8 розділів. Розділ 1 містить історичну довідку щодо вивчення гіпопружності вченими-механіками. Розглядаючи гіпопружні матеріали, необхідно згадати про внесок К. Трусделла в цей напрямок механіки матеріалів. Фактично, дві відомі в механіці публікації К.Трусделла 1955 [4] (розлога) та 1963 [5] (лаконічна) років створили основи для подальшого вивчення гіпопружності як частини науки про пружне деформування матеріалів. Саме К. Трусделл описав триваючу пару століть історію створення науки про гіпопружне деформування. У розділі 2 гіпопружність розглядається як одна із форм прояву властивості пружності в матеріалах. Тут наголошується принципова відмінність між гіперпружними і гіпопружними матеріалами. Вона полягає в застосуванні суттєво відмінних між собою принципів побудови конституційних рівнянь. В гіперпружності закладено принцип функціональної залежності напружень від деформацій, тоді як в гіпопружності – принцип функціональної залежності швидкостей напружень від швидкостей деформацій. У розділі 3 коментуються деякі сучасні публікації щодо хвиль в гіпопружних матеріалах. Розділ 4 включає необхідні в гіпопружності основні поняття континуальної механіки [2, 3]. Увага акцентується на понятті похідної Яуманна

$$\sigma_{ik}^{\nabla} = (D\sigma_{ik}/Dt) - \sigma_{in}v_{[k,n]} - \sigma_{kn}v_{[i,n]}, \quad \vec{v} = \{v_k\} = \left\{ \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right) \right\}. \quad (1)$$

У розділі 5 конкретизується модель гіпопружного тіла. Варіант моделі гіпопружного матеріалу (тіла) визначає прийнята форма конститутивних рівнянь. У загальному випадку ці рівняння зв'язують тензор швидкості напружень з тензором напружень і швидкостей деформацій

$$\sigma^{\nabla} = f(\sigma, V) \quad \text{або} \quad \sigma_{ik}^{\nabla} = C_{iklm}(\sigma_{rs})V_{lm} \quad (\text{простіший варіант}). \quad (2)$$

Зазначимо, що гіпопружність допускає наявність початкових напружень в лінійному підході і нескінченно малі деформації гіпопружних матеріалів зворотні щодо початкових напружень. Перша особливість відсутня в пружних і гіперпружних матеріалах. Для ізотропних тіл формула (2) конкретизується

$$\sigma^{\nabla} = \delta g_0 1 + g_1 V + \delta g_2 \sigma + \delta g_5 \sigma^2 + (1/2)g_4 (V\sigma + \sigma V) + (1/2)g_8 (V\sigma^2 + \sigma^2 V) + Mg_3 1 + Mg_6 \sigma + Mg_9 \sigma^2 + Ng_7 1 + Ng_{10} \sigma + Ng_{11} \sigma^2, \quad (3)$$

де $g_K = g_K(I, II, III)$ є аналітичними функціями трьох перших інваріантів тензора деформації. Зберігаючи в (3) різну кількість доданків, отримують моделі різної степені. Нульова і перша моделі задаються такими формулами

$$\left(\delta_{jn} + u_{j,n}^o \right) \left[\sigma_{in}^o u_{[k,nit]} + \sigma_{in,i} u_{[k,nt]}^o + \sigma_{kn}^o u_{[i,nit]} + \sigma_{kn,i} u_{[i,n]}^o + C_{iklm} u_{(l,mit)} \right] + \sigma_{in}^o u_{j,nit} - \rho u_{j,tt} = 0. \quad (4)$$

Отже, рівняння (4) містить як відомі параметри початкоав напруження σ_{in}^o і початкові обертання $u_{[k,nt]}^o$.

Розділ 7 присвячений класичному підходу Крістоффеля в аналізі плоских хвиль [1]. У розділі 8 цей підхід використано для аналізу гармонічних плоских хвиль в гіпопружному матеріалі. У простому випадку, коли задане лише початкове напруження σ_{11}^o , лінеаризовані рівняння руху мають вигляд

$$\left(\lambda + 2\mu + 2\sigma_{11}^o \right) u_1^o + \rho \left(v_{ph} \right)^2 u_1^o = 0, \quad \left(\mu + 2\sigma_{11}^o \right) u_{2(3)}^o + \rho \left(v_{ph} \right)^2 u_{2(3)}^o = 0.$$

1. Fedorov F.I. Theory of elastic waves in crystals. – New York: Plenum Press, 1968. – 388 p.
2. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer Verlag, 1999. – 555 p.
3. Rushchitsky J.J. Foundations of mechanics of materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 270 p.
4. Truesdell C. Hypo-elasticity // J. Rat. Mech. Anal. – 1955. – 4, – P.83-133, P.1019-1020.
5. Truesdell C. Remarks on hypo-elasticity // J. Research Nation. Bureau Stand. – B. Mathematics and Mathematical Physics. – 1963. – 67B, No. 3. – P.1–3.

HYPOElastic MATERIAL. LINEARIZED THEORY. WAVES. CHRISTOFFELS APPROACH

The report includes 8 chapters. Section 1 provides historical background on the study of hypoelasticity by mechanical scientists. In Chapter 2, hypoelasticity is considered as one of the forms of manifestation of the property of elasticity in materials. Section 3 comments on some modern publications on waves in hypoelastic materials. Chapter 4 includes the basic concepts of continuum mechanics necessary in hypoelasticity. Chapter 5 specifies the hypoelastic body model. Chapter 6 describes the general linearization scheme of the equation of motion and its concrete implementation in the hypoelastic body model. Chapter 6 describes the general linearization scheme of the equation of motion and its concrete implementation in the hypoelastic body model. Chapter 7 is devoted to Christoffel's classical approach in the analysis of plane waves. This approach is used in Chapter 8 when analyzing harmonic plane waves in a hypoelastic material.

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕРМОМЕХАНІКИ ПРИ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОМУ НАГРІВІ МАЛОВУГЛЕЦЕВИХ НИЗЬКОЛЕГОВАНИХ СТАЛЕВИХ ТІЛ ЗА ВРАХУВАННЯ СТРУКТУРНИХ ЗАЛИШКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Томаш Волчанські¹, Олександр Гачкевич², Тереза Козакевич³

¹Політехніка Опольська, Освітньо-навчальне об'єднання в Глушині, м. Ополь, tomasz.wolczanski@wp.pl,

^{2,3}Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, м. Львів, ²hachkevych@ukr.net,

³tv.kozakevych@gmail.com

Актуальною є розробка математичних моделей термомеханіки, які дозволяють дослідити тепловий та напружений стани у сталевих виробах, зокрема, у пластинчастих елементах конструкцій, у процесі технологічного високотемпературного нагріву з метою отримання раціональних режимів термообробок, а також покращення їх експлуатаційних властивостей за врахування структурних залишкових деформацій.

Зміна структури сталей відбувається за різних способів термічної обробки і робить свій внесок у зміну властивостей сталей. Як правило, розглядають такі основні фази при теплових впливах (нагріві – охолодженні): аустеніт, мартенсит, бейніт, ферито-перліт. Перехід однієї фази до іншої визначається різницею їхньої вільної енергії, а критичні точки є точками рівності вільних енергій співіснуючих фаз. Саме поліморфні перетворення в залізі визначаються перебудовою решіток об'ємно – центрованої кубічної ґратки при нагріванні в гранецентровані кубічні ґратки, і навпаки при охолодженні.

Через моделювання та визначення просторового неоднорідного фазового складу при охолодженні та зумовлених ним залишкових напружень у сталевих тілах при локальному високотемпературному нагріві, ми можемо проводити їх оптимізацію з метою отримання певних механічних властивостей тіл і рівня залишкових напружень.

Визначення залишкового напруженого стану розглядуваних сталевих пластин проводимо на основі розв'язування відповідної задачі термомеханіки, сформульованої відносно переміщень. Тут вихідною є залишкова деформація, яка зумовлена різним відсотковим вмістом фазових складових (при різних їх густинах), що виникають при структурному перетворенні, викликаному термічною обробкою. Відповідно до принципу адитивності деформація, викликана різним відсотковим змістом наявних фазових складових (при їх питомих об'ємах) $e_a = \eta_M \xi_M + \eta_B \xi_B + \eta_{FP} \xi_{FP}$, де $\xi_M = 0,01 \cdot M$ (відсотковий вміст мартенситу), $\xi_B = 0,01 \cdot B$ (– бейніту), $\xi_{FP} = 0,01 \cdot FP$ (– феррито-перліту). Ця деформація відповідає, при врахуванні відомих експериментальних даних [1], зміні питомого об'єму вихідного ферито-перліту $V_{FP} \equiv 1/\rho_{FP} = 0,1274 \cdot 10^{-3}$, м³/кг, де ρ_{FP} – густина ферито-перліту) при

аустенізації та наступній зміні питомого об'єму утвореного аустеніту на відсоткові об'ємні частини: мартенситу ($V_M \equiv 1/\rho_M$, де ρ_M – густина мартенситу), бейніту ($V_B \equiv 1/\rho_B = 0,1277 \cdot 10^{-3}$, м³/кг, де ρ_B – густина бейніту) і ферито-перліту ($V_{FP} = V_{FP}$ вихідного).

Тобто, для визначення залишкових напружень необхідні відомі значення об'ємної залишкової деформації, які пов'язані з питомими об'ємами основних фазових складових, що утворюються при високотемпературному нагріві – охолодженні розглянутих низьколегованих маловуглецевих тонких сталевих тіл.

Задачу про знаходження залишкових деформацій сформульовано на основі підходу методу умовних залишкових деформацій при відомій деформації фазових складових [2].

З використанням відомих матеріалознавчих аспектів опису структурних змін при високотемпературному нагріві і наступному монотонному охолодженні сталевих тіл сформульовано варіант комплексної задачі термомеханіки маловуглецевих низьколегованих сталевих тонких пластин при нагріві рухомими розподіленими джерелами тепла за врахування фазових змін, яка складається з чотирьох відповідних підзадач.

1. *Wolczański T., Kozakevych T., Hachkevych O.* Structural and residual stress state of steel plates subjected to the heating of moving heat sources. – Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2019. – 290 с.
2. *Гачкевич А., Козакевич Т., Волчанські Т., Кукарєко В.* Вибрані матеріалознавчо-математичні аспекти при визначенні залишкових структурного та напруженого станів сталевих пластин при нагріванні та охолодженні // Manufacturing processes. Actual Problems – 2021 Vol. 1: Basic science applications in manufacturing processes. SIM z. 493 (ISBN 978-83-66033-23-8, pod red. nauk.: O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wolczański). Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2021. – 6. – С. 97-122.

MATHEMATICAL PROBLEMS OF THERMOMECHANICS DURING HIGH-TEMPERATURE HEATING OF LOW-CARBON LOW-ALLOY STEEL BODIES TAKING INTO ACCOUNT CONSTRUCTIVE RESIDUAL DEFORMATIONS

With the use of well-known material science aspects of the description of structural changes during high-temperature heating and subsequent monotonous cooling of steel bodies, a variant of the complex problem of thermomechanics of thin plates made of low-carbon, low-alloy steel during heating is proposed. by moving distributed heat sources taking into account phase changes is formulated, which consists of four corresponding subtasks.

ПРОЦЕСИ ПЕРЕНОСУ В НЕДЕФОРМІВНИХ ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ, НАСИЧЕНИХ ВОДНИМ ЕЛЕКТРОЛІТОМ

Юрій Білушак¹, Богдан Гера², Євген Чапля³, Ольга Чернуха⁴

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
²gera-zen@ukr.net, ³evgen.czaplaj@gmail.com

Процеси переносу маси і заряду в рідкій фазі часто визначають властивості пористих матеріалів, насичених водним електролітом. Для опису цих процесів, як правило, використовують методи термодинаміки нерівноважних процесів [1], механіки [2] та електродинаміки суцільних середовищ. Для врахування взаємного впливу електромагнітних явищ і процесу переносу заряджених частинок, використовують як електрохімічний потенціал [1, 3, 4], так і електродний потенціал [5 – 7], що в подальшому призводить до різних постановок відповідних крайових задач математичної фізики.

Якщо такі процеси розглядають у пористих дрібнодисперсних матеріалах, насичених рідкими субстанціями, то вихідні співвідношення записують для просторово осереднених фізичних величин для тіла у цілому. У роботах [3, 4] на основі методу просторового осереднення механіки гетерогенних середовищ, отримано і проаналізовано повну систему співвідношень для опису деформації, тепломасопереносу, електромагнітних явищ у пористих насичених тілах з використанням електрохімічного потенціалу.

У даній праці в рівняннях перенесення використано електродний потенціал [5 – 7] і сформульовано рівняння для механічних, теплових, дифузійних і електромагнітних процесів у водних розчинах електролітів без урахування поляризації. Для формулювання ключових рівнянь для пористих матеріалів з нестисливим скелетом об'ємні густини фізичних параметрів, які фігурують у цих рівняннях, записано через істинні з використанням об'ємної пористості.

1. *De Groot S. R., Mazur P. Non-equilibrium thermodynamics.* – New York: Dover Publ., 1984. – 510 p.
2. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів.* – Київ: Наук. думка, 2006. – 272 с.
3. *Кондрат В. Ф., Кубік Ю., Чапля Є. Я. Рівняння механотермоелектродифузії у пористому насиченому середовищі //* *Машинознавство.* – 1999. – № 10. — С. 3–9.
4. *Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін. Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі.* – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 262 с.
5. *Pfleiderer H. Lineare Elastizitätstheorie und Thomas-Fermi-Modell bei Eigenspannungen in Metallen // Phys. Status Solidi.* – 1962. – 2, N. 11. – S. 1524–1538.
6. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.* – Київ: Наук. думка, 1978. – 232 с.

7. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Чапля Е. Я. Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физ.-хим. мех. материалов. – 1980. – № 5. – С. 8–14.

**TRANSFER PROCESSES IN NON-DEFORMABLE POROUS MATERIALS SATURATED
WITH AQUEOUS ELECTROLYTE**

The obtained results can be a theoretical basis for the formulation of new problems of mathematical physics that describe transport processes in porous media taking into account their local microstructure

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ МОДЕЛЮВАННЯ ГЛОБАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ РУХУ ПОВЕРХНЕВИХ ТА ПІДЗЕМНИХ ВОД

Андрій Бомба¹, Сергій Каштан¹, Олекса Кушнір²

¹Національний університет водного господарства та природокористування, м. Півне, abomba@ukr.net,
s.s.kashtan@nuwm.edu.ua

²ТзОВ СофтСерв, м. Півне, oleksa.o.kushnir@gmail.com

У цьому дослідженні наведено нові підходи до моделювання глобальних процесів руху поверхневих і підземних вод. Основною метою є розробка і аналіз відповідних математичних моделей та розвиток числових методів комплексного аналізу, які забезпечують можливість ефективно описувати і прогнозувати динаміку водних систем на глобальному рівні.

Дослідження охоплює аналіз формування ідеальної течії в залежності від заданих значень керуючого потенціалу [1 – 3]. Ідеальна течія, у цьому підході, розглядається як безв'язкий потік з відсутністю тертя, що дозволяє спростити аналіз і зосередитися на фундаментальних властивостях водних потоків. Моделі аналізуються в контексті різних геометричних конфігурацій і умов, що дозволяє виявити основні закономірності і механізми формування водних потоків у різних екосистемах.

Зокрема, на основі модифікації числового методу комплексного аналізу отримано комплексний потенціал та характеристичну функцію течії, наводяться приклади побудови динамічних сіток, ліній розділу течії, поля швидкості, формування різних перетоків (див., напр., рис.1). При цьому виділено типи так званих ключових задач стосовно знаходження таких значень керуючого потенціалу, які забезпечують оптимізацію конкретних функціоналів [2, 4, 5].

Застосування методів та підходів комплексного аналізу дозволяє детально дослідити вплив різних параметрів керуючого потенціалу на форму і характеристики течій. Проведено чисельні експерименти для оцінки точності моделей і верифікації їх з експериментальними даними. Результати показують, що побудовані моделі можуть адекватно описувати динаміку як поверхневих, так і підземних вод, що відкриває нові можливості для прогнозування і управління водними ресурсами на глобальному рівні.

Розроблені моделі дозволяють отримати результати із хорошою точністю та створюють нові інструменти для аналізу та управління водними екосистемами. Майбутні дослідження можуть бути зосереджені на розширенні цих моделей на випадки врахування в'язкості і тертя, а також на застосування розроблених підходів для моделювання та прогнозування впливу кліматичних змін і антропогенних факторів на водні ресурси.

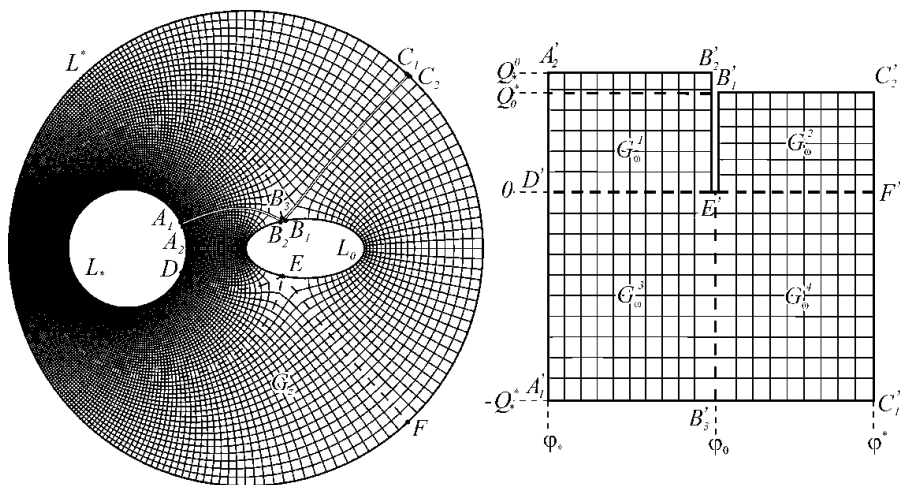


Рис. 1. Гідродинамічна сітка у трив'язному пористому пласті та відповідна область комплексного потенціалу

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Яроцак С.В. Методи комплексного аналізу. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
3. Бомба А.Я., Сінчук А.М., Яроцак С.В. Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень. – Рівне: «Асоль», 2016. – 238 с.
4. Бомба А.Я., Гладка О.М., Кузьменко А.П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. – Рівне: «Асоль», 2016. – 283 с.
5. Бомба А.Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. – Рівне: НУВГП, 2020. – 201 с.

THE COMPLEX ANALYSIS METHODS OF THE PROCESSES OF THE SURFACE AND THE UNDERGROUND WATERS GLOBAL MOVEMENT MODELING

The goal of this research is modeling of the global movement of the surface and the underground waters processes. That's why the common cases of the perfect stream forming are described. They depend on the different defined values of the driving potential [1, 2, 3]. Based on the modified numeric method of the complex analysis, the complex potential and the characteristic stream function are calculated. Also, examples of the dynamic grid's creation, the borders of the stream division, the velocity fields and the overflows forming processes are described. And the types of so-called key problems of the certain driving potential values calculation are highlighted. These values ensure the optimization of the certain functionals [2, 4, 5].

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Оксана Вовк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
vovk0108@gmail.com

Урахування термочутливості матеріалів, з яких виготовлені елементи сучасних конструкцій, умов складного теплообміну, силових навантажень, контакту поверхонь тощо приводить до розв'язування нелінійних задач термопружності. Такі задачі через свою складність зумовлюють широке застосування числових або аналітично-числових підходів. Тут для визначення температурних розподілів у квазістатичних задачах термопружності для термочутливих тіл за різних теплових умов використано аналітично-числовий підхід [1], що ґрунтується на використанні перетворень Кірхгофа та Лапласа, методів лінеаризувальних параметрів та послідовних наближень, а також адаптованої формули Пруднікова. На основі отриманих аналітично-числових розв'язків досліджено тепловий та викликаний ним напружений стан низки кусково-однорідних обмежених чи напівобмежених тіл за конвективно-проточного або фрикційного нагрівання.

Нестационарна задача теплопровідності для визначення температурних полів t_j двох контактуючих термочутливих тіл полягає у розв'язанні нелінійного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_r^j(t_j) \frac{\partial t_j}{\partial z} \right) = c_v^j(t_j) \frac{\partial t_j}{\partial \tau}, \quad j = \begin{cases} 1, & 0 < z < z_1; \\ 2, & -z_2 < z < 0; \end{cases} \quad (1)$$

за початкових

$$t_j \Big|_{\tau=0} = t_p, \quad (2)$$

крайових

$$\left\{ \lambda_r(t_j) \frac{\partial t_j}{\partial z} - (-1)^j \left(\alpha_j (t_j - t_{cj}) + \sigma \varepsilon_j (t_j^4 - t_{cj}^4) \right) \right\} \Big|_{z=z_j} = 0, \quad (3)$$

та контактних умов: ідеального теплового контакту

$$t_1 \Big|_{z=0} = t_2 \Big|_{z=0}, \quad \left[\lambda_r^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_r^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right]_{z=0} = g(\tau) \quad (4)$$

або неідеального – шляхом фрикційного нагрівання

$$\left[\lambda_i^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_i^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = q, \quad (5)$$

$$\left[\lambda_i^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} + \lambda_i^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = h[t_1 - t_2] \Big|_{z=0}, \quad (6)$$

де α_j – коефіцієнти теплообміну, а ε_j – ступені чорноти поверхонь тіл; $\lambda_i^{(j)}(t_j)$, $c_v^{(j)}(t_j)$ – коефіцієнти теплопровідності та об’ємні теплоємності їх матеріалів відповідно ($j=1,2$); σ – стала Стефана–Больцмана, $g(\tau) = q_0 S_+(\tau_k - \tau)$ – діюче впродовж часу τ_k джерело тепла, $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, \tau > 0, \\ 0, \tau \leq 0, \end{cases}$ h – коефіцієнт термічної провідності, $q = fvp$ – питома потужність тертя, f – коефіцієнт тертя, v – швидкість руху одного тіла по поверхні іншого, p – інтенсивність зусиль. Зношуванням поверхонь контактуючих тіл нехтуємо. Зауважимо, що у випадку напівбезмежних тіл, коефіцієнти $\alpha_j \rightarrow 0$ та $\varepsilon_j \rightarrow 0$, а замість умов конвективно-променевого теплообміну (3) отримаємо умови рівності нулю теплових потоків на нескінченості.

Розв’язування такої нелінійної задачі теплопровідності зведено до ітераційного процесу, коли на кожному кроці розв’язуємо лінійну крайову задачу з уточненими на попередньому кроці величинами.

Термопружний стан термочувливих кусково-однорідних структур, в яких температура змінюється лише за однією координатою описується відомими в літературі співвідношеннями [2].

1. *Vovk O.M., Solyar T.Ya.* Thermoelastic state of a thermosensitive half space and a thermosensitive layer in contact under the conditions of complex heat exchange // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – 273. No. 2. – С. 132 – 143.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.

RESEARCH OF THE THERMOELASTIC STATE OF CONTACTING THERMOSENSITIVE BODIES UNDER COMPLEX HEAT EXCHANGE

The thermal and thermoelastic states of thermosensitive piecewise-homogeneous structures under convective-radiative heat exchange with the environment and various types of heating in the contact zone were investigated. To construct solutions of non-stationary heat conduction problems an analytical-numerical approach was used. It is based on the application of the methods of successive approximations, linearizing parameters, and an adapted Prudnikov formula for the inverse Laplace transform.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗВАЖЕНИХ ЗАЛИШКІВ ДО ЗАДАЧ НАГРІВУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Євгеній Ірза

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
Evgen_Irza@ukr.net

Запропоновано методику розрахунку термонапруженого стану структурно неоднорідних тіл при нагріві. Розроблено числовий алгоритм розв'язання відповідних задач на основі методу зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів. Методика розрахунку термонапруженого стану в структурно неоднорідних тілах при нагріві передбачає: математичну постановку задачі; розробку числового алгоритму пошуку розв'язку; програмну реалізацію числового алгоритму.

Температурне поле й напружено-деформований стан тіла у процесі нагріву визначають параметри стану ($t(\vec{r}, \tau)$ – температура; $\hat{\sigma}(\vec{r}, \tau)$ – тензор напружень; $\hat{\varepsilon}(\vec{r}, \tau)$ – тензор деформацій; $\vec{u}(\vec{r}, \tau)$ – вектор переміщень), які пов'язані між собою, з фізичними і геометричними параметрами тіла та зовнішніми діями, заданими вектором силового навантаження \vec{p} та функцією теплового навантаження $h(\tau)$, системою рівнянь

$$L_i(\vec{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{p}, \vec{u}, h) = 0, \quad i = \overline{1, n_0}, \quad (1)$$

де через L_i позначено нелінійні інтегро-диференціальні оператори; τ – час; \vec{r} – просторова координата. Зазначимо, що в цю систему рівнянь назагал входять рівняння руху, геометричні співвідношення між деформаціями і переміщеннями, феноменологічні співвідношення, які пов'язують компоненти тензорів напружень і деформацій, початкові та крайові умови.

Систему рівнянь (1) в загальному випадку можна розглядати як систему нелінійних диференціально-інтегральних рівнянь. Припускається, що початкові і крайові умови включені в систему (1). Система рівнянь (1) при заданих теплових навантаженнях $h(\tau)$, зовнішній силі \vec{p} і параметрах конструкції повинна бути замкненою і визначати параметри стану, які характеризують термонапружений стан тіла.

Віднайдення параметрів стану при заданій функції $h(\tau)$, яка характеризує теплове навантаження, є метою даної роботи.

Оскільки вихідна система диференціально-інтегральних рівнянь є нелінійною і геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто є досить складною, виникає необхідність використання універсальних

числових методів для розв'язування даного класу задач. Одним з таких методів є метод зважених залишків в поєднанні з скінченно-елементним підходом [1].

В розглядуваному підході алгоритм розв'язання даних задач методом зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів включає:

- дискретизацію області скінченними елементами;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання на цій основі системи алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах і алгоритм розв'язку цієї системи.

Застосування методу зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів до системи рівнянь (1) приводить до системи алгебраїчних рівнянь для невідомих $\{U\}$ значень функції у вузлах розбиття.

Отриману систему можна записати як

$$[K]\{U\} = \{F\}. \quad (2)$$

Тут $\{K\}$ – глобальна матриця жорсткості; $\{F\}$ – вектор навантаження, які мають конкретний вигляд в залежності від порядку диференціально-інтегральних операторів L_i (при цьому крайові умови враховані в отриманій системі). В загальному випадку система алгебраїчних рівнянь (2) є нелінійною і може бути розв'язана за допомогою відповідного ітераційного методу.

Як приклад розв'язано задачу знаходження термонапруженого стану в структурно неоднорідному пустотілому циліндрі, який перебуває під дією теплового навантаження. Проведений числовий аналіз отриманих розв'язків.

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite element method: Vol 1. The basis. – London: Butterwoth Heinemann, 2000. – 689 p.

APPLICATION APPLICATION OF THE METHOD OF SUSPENDED RESIDUES TO THE PROBLEMS OF HEATING STRUCTURALLY HETEROGENEOUS BODIES

A method of calculating the thermal stress state of structurally heterogeneous bodies during heating is proposed. A numerical algorithm for solving the relevant problems was developed based on the method of weighted residuals in combination with the method of finite elements.

ЧАСТКОВІ ТА ЗАГАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ У ДЕКАРТОВІЙ І ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Віктор Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
victorrev@ukr.net

Розглянуто систему рівнянь Нав'є тривимірної статичної теорії термопружності в декартовій системі координат [1, 2]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,3}, \quad \nabla^2 T = 0, \quad (1)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа. Загальний розв'язок системи рівнянь (1) подано у вигляді суми однорідного і часткового температурного розв'язків

$$u_j = u_j^e + u_j^\tau, \quad j = \overline{1,3}. \quad (2)$$

Означення. Частковий розв'язок u_j^τ (2) називатимемо температурним, якщо він не містить в собі пружних переміщень.

Теорема 1. Для температурних розв'язків системи (1) маємо

$$e^\tau = 3\alpha T, \quad \Theta^\tau = 0, \quad (3)$$

де $\Theta^\tau = \sigma_1^\tau + \sigma_2^\tau + \sigma_3^\tau$ – сума нормальних напружень, e – об'ємне розширення.

На основі залежностей (3) знайдено частковий розв'язок системи рівнянь (1), який явно визначається температурою [1]

$$u_j^\tau = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \frac{4\alpha}{3} \Omega_j, \quad j = \overline{1,3}, \quad (4)$$

де T , $\Omega_j = \int T dx_j$ – гармонічні функції, $\vartheta(x,y,z) = -\alpha(x\Omega_1 + y\Omega_2 + z\Omega_3)/6$ – бігармонічна функція.

Розглянуто тривимірну температуру у циліндричній системі координат

$$T(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} e^{-\beta_k z} J_n(\beta_k r) \cos n\varphi. \quad (5)$$

Використано співвідношення (3), (5), властивості функцій Бесселя і знайдено новий частковий розв'язок системи рівнянь Нав'є (1)

$$u_r^\tau = \frac{\alpha}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{\beta_k} \left\{ \left[\frac{z}{2r} - \beta_k r \right] J_n(\beta_k r) + \left[(n+8) - \frac{z}{2} \beta_k \right] J_{n+1} \right\} e^{-\beta_k z} \cos n\varphi,$$

$$u_{\varphi}^{\tau} = \frac{\alpha}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} a_{n,k} \left[(8+n)J_{n+1} - z \frac{n}{2r} J_n \right] e^{-\beta_k z} \sin n\varphi, \quad (6)$$

$$u_z^{\tau} = \frac{\alpha}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \left\{ rJ_{n+1}(\beta_k r) - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{\beta_k} + z \right) J_n(\beta_k r) \right\} e^{-\beta_k z} \cos n\varphi.$$

Знайдено частковий розв'язок у випадку осесиметричної температури [2]

$$u_r^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{8\alpha}{3} \Omega_r, \quad u_z^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{4\alpha}{3} \Omega_z, \quad u_{\varphi}^t = 0, \quad (7)$$

де $\Omega_r = \frac{1}{r} \int r T dr$, $\Omega_z = \int T dz$, $\vartheta(r, z) = -\alpha(2r\Omega_r + z\Omega_z) / 6$ – двомірні функції.

Теорема 2. Загальний розв'язок системи рівнянь (1) у циліндричній системі координат можна подати в такому вигляді:

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + u_r^{\tau}, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi + u_z^{\tau}, \quad u_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q}{\partial r} + u_{\varphi}^{\tau}, \quad (8)$$

де $P = z\Phi + \Psi$; $\Phi(r, \varphi, z)$, $\Psi(r, \varphi, z)$, $Q(r, \varphi, z)$ – гармонічні функції.

На основі співвідношень (4), (6)–(8) побудовані напруження.

1. *Revenko V.* Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory // Scientific Journal of TNTU. – 2022. – **108**, № 4. – P. 64–73.
2. *Ревенко В. П.* Розв'язування осесиметричних задач термопружності з використанням повних систем неортогональних функцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 1–2. – С. 249–258.

PARTIAL AND GENERAL SOLUTIONS OF THE THEORY OF THERMAL ELASTICITY IN THE CARTESIAN AND CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEMS

The general solution of the system of Navier differential equations is given in the form of a sum of homogeneous and partial solutions. The partial solution of the system of Navier equations, which is determined by the stationary temperature and does not contain elastic displacements, is called the temperature solution. It is proved that the sum of normal temperature stresses is zero. The temperature solution of the system of Navier equations in Cartesian and cylindrical coordinate systems and for axisymmetric temperature is constructed. Analytical formulas for expressing temperature movements and stresses in an explicit form are given. The general solution of the equations of the theory of thermoelasticity in the Cartesian and cylindrical coordinate system through four harmonic functions is recorded.

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ірина Ткаченко¹, Ніна Антоненко²

¹Запорізький національний університет, м. Запоріжжя, tig.phd81@gmail.com,

²Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, antonenkonina.ua@gmail.com

Розглянемо пакет із n пружних однорідних та ізотропних шарів, що лежать на абсолютно жорсткому півпросторі, на стиках шарів виконуються умови ідеального механічного та неідеального теплового контактів. На поверхні основи задано закон розподілу температури та напружень, на межі пакету та півпростору підтримується нульова температура. У кожному шарі вводиться декартова система координат O_jxyz_j з початком на верхній межі шару, вісі z_j співпадають та напрямлені вниз.

Умови на стиках шарів:

$$u_j(x, y, h_j) = u_{j+1}(x, y, 0), \quad v_j(x, y, h_j) = v_{j+1}(x, y, 0), \quad w_j(x, y, h_j) = w_{j+1}(x, y, 0),$$

$$\sigma_{z,j}(x, y, h_j) = \sigma_{z,j+1}(x, y, 0),$$

$$\tau_{yz,j}(x, y, h_j) = \tau_{yz,j+1}(x, y, 0), \quad \tau_{xz,j}(x, y, h_j) = \tau_{xz,j+1}(x, y, 0),$$

$$\frac{1}{R_j} [T_{j+1}(x, y, 0) - T_j(x, y, h_j)] = k_{T,j} \frac{\partial T_j}{\partial z}(x, y, h_j),$$

$$k_{T,j} \frac{\partial T_j}{\partial z}(x, y, h_j) = k_{T,j+1} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial z}(x, y, 0), \quad j = \overline{1, n}.$$

Крайові умови:

$$T_1(x, y, 0) = f(x, y), \quad \sigma_{z,1}(x, y, 0) = h(x, y),$$

$$\tau_{yz,1}(x, y, 0) = l(x, y), \quad \tau_{xz,1}(x, y, 0) = g(x, y),$$

$$T_n(x, y, h_n) = 0, \quad u_n(x, y, h_n) = v_n(x, y, h_n) = w_n(x, y, h_n) = 0.$$

Треба визначити компоненти термо-напружено-деформованого стану (ТНДС) точок шарів основи.

Задачу розв'язано за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є та методу функцій податливості. У просторі трансформант компоненти ТНДС шару представлено у вигляді лінійних комбінацій його допоміжних функцій:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, \zeta, 0), \beta = \mu p \bar{w}(\xi, \zeta, 0), \gamma = \mu(-i\xi \bar{u}(\xi, \zeta, 0) - i\zeta \bar{v}(\xi, \zeta, 0)),$$

$$\tilde{\gamma} = -\mu(-i\zeta \bar{u}(\xi, \zeta, 0) + i\xi \bar{v}(\xi, \zeta, 0)), \delta = -\frac{1}{p} [i\xi \bar{\tau}_{xz}(\xi, \zeta, 0) + i\zeta \bar{\tau}_{yz}(\xi, \zeta, 0)],$$

$$\tilde{\delta} = -\frac{1}{p} [i\zeta \bar{\tau}_{xz}(\xi, \zeta, 0) - i\xi \bar{\tau}_{yz}(\xi, \zeta, 0)], \eta = \bar{T}(\xi, \zeta, 0), \varepsilon = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}}{dz}(\xi, \zeta, 0),$$

де $p^2 = \xi^2 + \zeta^2$, ξ , ζ – параметри інтегрального перетворення.

Використовуючи умови на стиках шарів, отримано рекурентні формули, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів основи:

$$\bar{\alpha}_{j+1} = M_{11,j} \bar{\alpha}_j + M_{12,j} \bar{\beta}_j + M_{13,j} \eta_j, \bar{\beta}_{j+1} = M_{21,j} \bar{\alpha}_j + M_{22,j} \bar{\beta}_j + M_{23,j} \eta_j, \quad (1)$$

де $\bar{\alpha}_j = (\alpha_j, \delta_j, \tilde{\delta}_j)^t$, $\bar{\beta}_j = (\beta_j, \gamma_j, \tilde{\gamma}_j)^t$, $M_{kl,j}$ – відомі матриці, $j = \overline{1, n}$.

У роботі [1] доведено, що $\varepsilon_j = -r_j \eta_j$, де $r_j = \frac{\Delta_j S_j + r_{j+1} (C_j + L_j p S_j)}{\Delta_j C_j + r_{j+1} (S_j + L_j p C_j)}$,

$$r_n = \text{cth } p_n, L_j = R_j k_{r,j}, \Delta_j = \mu_j / \mu_{j+1}, S_j = \text{sh } p_j, C_j = \text{ch } p_j, p_j = p h_j.$$

Доведено, що допоміжні функції шару пов'язані співвідношеннями:

$$\bar{\beta}_j = \tilde{A}_j \bar{\alpha}_j + \tilde{B}_j \eta_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де \tilde{A}_j , \tilde{B}_j – матриці податливості, компоненти яких залежать від механічних і геометричних характеристик шарів та коефіцієнтів теплового опору R_j .

Схема розв'язання: з умов на верхній межі основи знаходимо чотири допоміжні функції першого шару основи; обчислюємо функції податливості; за формулами (2) та (1) знаходимо невідомі допоміжні функції шарів основи і підставляємо їх у вирази для трансформант ТНДС; знаходимо оригінали компонент ТНДС.

1. Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г. Тривимірна задача теплопровідності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2023. – № 3. – С. 53–59.

METHOD FOR SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTIC PROBLEM FOR A LAYERED FOUNDATION WITH IMPERFECT THERMAL CONTACT BETWEEN LAYERS

Using the two-dimensional Fourier integral transform and the compliance function method, a method for solving the three-dimensional thermoelastic problem with imperfect thermal contact between layers has been proposed.

ХРЕСТОПОДІБНІ ХВИЛІ В РІДИНІ В ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОМУ «СПІВАЮЧОМУ БОКАЛІ»

Тетяна Краснопольська

Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ, krasnopolaska1005@gmail.com

Усім відомий звук, який видає «співаючий бокал», коли зволожений палець рівномірно рухається по обідку бокалу, приводячи його у вібрацію. Це явище було темою багатьох досліджень, більшість з яких були експериментальними і зосереджувалися на генерації звукових хвиль та пружній деформації віброуючого бокалу. Було встановлено, що основним режимом коливань бокалу є вимушена хвиля, з чотирма вузлами, рівномірно розташованими вздовж циліндричної скляної стінки. Коли такий співаючий бокал частково заповнити рідиною (яка змінює частоту звуку), можна спостерігати ще одну дивовижну особливість: складний візерунок хвиль на вільній поверхні рідини. При достатньому освітленні можна спостерігати хвилі, безпосередньо зумовлені вібрацією стінки в режимі з чотирма вузлами, що рухаються в окружному напрямку з тією ж швидкістю, що й палець, який рухається ([1, 5, 6]). Однак у цій картині домінують так звані «хрестоподібні хвилі» або «крайові хвилі», гребені яких перпендикулярні до віброуючої циліндричної скляної стінки. Ці короткі стоячі хвилі були описані ще Фарадеєм [1].

Гарретт [2] був першим, хто описав, як передається енергія від хвилепродуктора до хрестоподібної хвилі в математичному підході, який включає в себе вертикальний середній рух вільної поверхні. Однак, вертикальний середній рух вільної поверхні не є достатнім для передачі енергії до хрестоподібних хвиль у довгому басейні. Тому хрестоподібні хвилі повинні отримувати свою енергію якимось чином безпосередньо від хвилепродуктора. Нелінійна теорія для пояснення хрестоподібних хвиль була розроблена в дослідженнях Махоні [9], Джонса [4], Ліхтера [8], Майлза [10]. Проте всі вони використовували відоме рішення Хейвелока [3], отримане для хвиль в напівнескінченному басейні.

Метою цієї доповіді є пояснення та моделювання виникнення хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини, що міститься в «співаючому бокалі» [6]. Для спрощення математичного аналізу віброуючий бокал моделюється як циліндричний контейнер, що здійснює коливання в вимушеному режимі і частково заповнений нев'язкою рідиною. коефіцієнтами, що є функціями осьової координати. Ми застосовуємо метод суперпозиції, який дає чіткіше уявлення про зв'язок між вібрацією циліндра і хвильовим рухом рідини на вільній поверхні. Вперше цей метод був використаний Ламе [7, 5, 6] в контексті задач теорії пружності. Цей метод дозволяє побудувати прості-

шу математичну модель, яка показує, як хрестоподібна хвиля може генеруватися безпосередньо рухом хвилепродуктору, вимушеними поверхневими хвилями на циліндриній поверхні.

1. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* – 1831. – **121**. – P. 299–340.
2. *Garrett C.J.R.* Cross waves // *J. Fluid Mech.* – 1970. – **41**. – P. 837–849.
3. *Havelock T.H.* Forced surface waves on water // *Phil. Mag. (Ser. 7)*. – 1929. – **8**. – P. 569–576.
4. *Jones A.F.* The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance // *J. Fluid Mech.* – 1984. – **138**. – P. 53–74.
5. *Krasnopolskaya T.S., van Heijst G.J.F.* Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell // *J. Fluid Mech.* – 1996. – **328**. – P. 229–252.
6. *Krasnopolskaya T.S., van Heijst G.J.F.* Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass' // *EJM/B Fluids*. – 2018. – **67**. – P. 116–124.
7. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. – Paris: Bachelier. – 1852. – 384 p.
8. *Lichter S., Underhill W.B.* Mode-number shifting of nonlinear cross-waves // *Phys. Rev. A*. – 1987. – **35**. – P. 5282–5284.
9. *Mahony J.J.* Cross-waves. Part 1, Theory // *J. Fluid Mech.* – 1972. – **55**. – P. 229–244.
10. *Miles J.W.* Parametrically excited, standing cross-waves // *J. Fluid Mech.* – 1988. – **186**. – P. 119–127.

CROSS-WAVES AT FLUID IN A PARTIALLY FILLED 'SINGING WINE GLASS'

Using the superposition method, the appearance and structure of cross-waves at the free surface of the liquid contained in the 'singing glass' was explained. The cross-waves have crests perpendicular to the vibrating wall, as in the case of a 'singing glass' driven by a moistened finger moving uniformly along the edge of the glass. According to experimental studies, forced waves on the cylindrical surface have four nodes (that is, have two waves in the azimuthal direction), two mathematical models were developed to explain the appearance of cross-waves at the free surface of a fluid contained in a cylindrical glass, brought to vibration by a moistened finger. A graphical representation of the height of the free surface with three eigenmodes shows the main features of the wave patterns observed in the singing glass. Cross-waves, as Faraday wrote, are the result of the wave-maker 'vibrating motion in directions perpendicular to force applied'. In his pioneering experiments, Faraday also observed the occurrence of cross-waves at the fluid surface in the 'singing glass' full of water. He noticed that there are four nodal points on the side wall vibrations of the glass: under the finger, opposite the finger and in the middle distance to finger.

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКОСТІННИХ ТА ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Олександр Григоренко¹, Максим Борисенко¹, Олена Бойчук²

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, м. Київ, ayagrigenko1991@gmail.com,
mechanics530@gmail.com,

²Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв, boychuklena27@gmail.com

Циліндричні оболонки різної товщини є основою багатьох інженерних та архітектурних споруд, наприклад, таких як корпуси літаків та кораблів або автотунелі та шахти реакторів АЕС. Такі споруди піддаються статичним та динамічним навантаженням різної природи, що може призвести до їх руйнувань. Щоб уникнути руйнувань в наслідок резонансу, необхідно володіти інформацією про розподіл їх частот і форм вільних коливань. В рамках теорії тонких оболонок ця задача розв'язується за допомогою різних методик, однак у випадку товстостінних циліндричних оболонок більшість теорій втрачають свою актуальність, оскільки для проведення розрахунків необхідно використовувати просторову теорію з великими обсягами обчислювального характеру. Завдяки розвитку комп'ютерних технологій одним із варіантів розв'язання цієї проблеми є використання системи автоматизованого конструювання, яка дає можливість проводити розрахунок конструкції будь-якої складної форми завдяки методу скінченних елементів. Однією з таких систем є програмний комплекс для інженерного розрахунку FEMAP [3]. Даний комплекс апробовано на багатьох задачах динаміки циліндричних оболонок з різними конструктивними неоднорідностями [4, 6], а отримані результати добре узгоджуються з результатами отриманими іншими авторами [1, 2]. Зокрема [5] методом скінченних елементів розраховані частоти та форми вільних коливань товстостінної циліндричної оболонки, проведено порівняння отриманих результатів з результатами отриманими експериментально.

Дане повідомлення присвячене чисельному розрахунку методом скінченних елементів частот і форм вільних коливань замкнутих кругових циліндричних оболонок різної товщини з жорстко закріпленими обома торцями.

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію п'яти замкнутих кругових циліндричних оболонок висотою $h = 0,12$ м, радіусом серединної поверхні $R_c = 0,04$ м та з різним співвідношенням товщини оболонки до радіуса серединної поверхні d/R_c : 1/10, 1/8, 1/6, 1/5, 1/4 (рис. 1). Як матеріал задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E = 214$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820$ кг/м³. Оболонки досліджувались при різних жорстко закріплених обох торцях (СС).

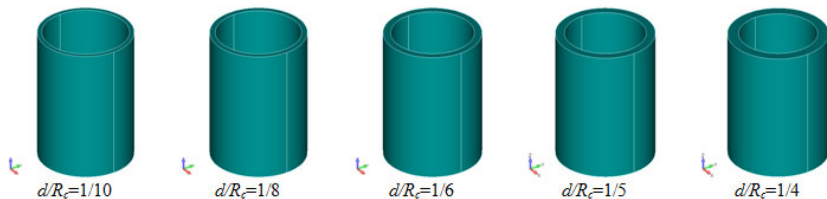


Рис. 1. Комп'ютерні моделі циліндричних оболонок різної товщини

В результаті розрахунків отримано частоти та форми вільних коливань циліндричних оболонок різної товщини з жорстко закріпленими обома торцями (СС). Деякі форми коливань оболонки $d/R_c=1/5$ представлені на рис. 1, де m – кількість півхвиль вздовж твірної, n – кількість півхвиль вздовж контуру поперечного перерізу

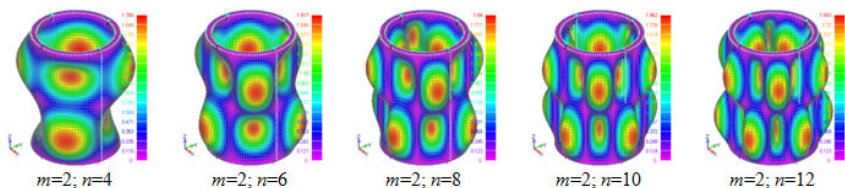


Рис. 2. Деякі форми коливань циліндричної оболонки $d/R_c=1/5$ (СС)

1. *Лекомцев С.В.* Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – 5, № 2. – С. 233-243.
2. *Пузырев С.В.* О свободных колебаниях неруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением // Збірник наукових праць НУК. – 2013. – №1. – С. 47-53.
3. *Рудаков К.Н.* FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций – К. НТУУ «КПІ», 2011. – 317с.
4. *Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V.* Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, №4. – P. 389-401.
5. *Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P.* Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, №1. – P. 75-84.
6. *Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P.* Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells // Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials. – 2021. – 151. – P. 63-74.

NUMERICAL ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF THIN-WALLED AND THICK-WALLED CYLINDRICAL SHELLS

The free vibrations of circular cylindrical shells of different thickness of rigidly fixed edges using the finite element method. The dependence of the frequency of the free vibrations on the shell thickness was analyzed.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ НЕЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ УРИСОНА

Михайло Андрійчук¹, Петро Савенко²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, ¹andr@iapmm.lviv.ua, ²posavnenko@gmail.com

Нелінійні інтегральні рівняння виникають у багатьох задачах сучасної математики, фізики й техніки [1 – 4]. Нелінійним інтегральним рівнянням типу Гаммерштейна та Урисона присвячено дослідження Богатова, Красносельського, Забрейка, Стеценка [2 – 4] та багатьох інших авторів. Фундаментальна теорія галуження розв'язків різних типів нелінійних рівнянь подається в монографії Вайнберга, Треногіна [3]. Одним з типів нелінійних інтегральних рівнянь є рівняння Урисона [5]

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), \mu) dy. \quad (1)$$

У цій роботі подається більш загальне нелінійне інтегральне рівняння типу Урисона

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), c_1, c_2) dy, \quad (2)$$

яке на відміну від [3] залежить не від одного, а від двох дійсних числових параметрів, належних до деякої випуклої обмеженої області R^2 простору C .

Нехай при деяких значеннях $\mathbf{c}_1^{(0)}, \mathbf{c}_2^{(0)}$ рівняння (2) має неперервний розв'язок $u_0(x)$, який називатимемо первинним. Розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ і всіх відмінних від $u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ розв'язків $u_c(x, c_1, c_2)$ рівняння (2), які при $|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}| \rightarrow 0$ задовольняють умову $\max_{\varrho \in G} |u_c(x, c_1, c_2) - u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)})| \rightarrow 0$.

Покладаємо, що підінтегральна функція в околі точки $\mathbf{c}_1^{(0)}, \mathbf{c}_2^{(0)} (\mathbf{c}^{(0)}, u_0(x, \mathbf{c}^{(0)}))$ при $|w| \leq \rho_1, |\mu| \leq \rho_\mu$ і $|v| \leq \rho_v$ розкладається у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональним аргументом w й числовими параметрами μ, v . На підставі відповідних перетворень одержимо рівняння типу Ляпунова – Шмідта [3]

$$F(x, y, u_0(y), \mathbf{c}^{(0)}) = \sum_{m+n+p+q \geq 0} A_{mnp} (x, y, \mathbf{c}^{(0)}) w^m (y) \mu^p v^q.$$

Покладаючи $A_{100}(x, y, c^{(0)}) = K(x, y, u_0(y), c^{(0)})$ – фредгольмове ядро, одержуємо інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = T(c_1, c_2)\varphi \equiv \int_G K(x, u_0(y); c_1, c_2)\varphi(y)dy, \quad (3)$$

яке при подальшому вивченні розв'язків рівняння (2) грає ключову роль.

У залежності від типу розв'язків цього рівняння розглядають два випадки [3]. У випадку, коли множина значень параметрів $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} \in \Lambda_c$, при яких одиниця не є власним значенням рівняння (3), то нелінійне рівняння (2) має єдиний розв'язок. В іншому випадку, коли одиниця є власним значенням рівняння (3), то відповідна множина значень параметрів $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} \in \Lambda_c$ є точками можливого галуження або біфуркації розв'язків рівняння (3) і відповідно рівняння (1). Задача знаходження власних значень $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} \in \Lambda_c$ зводиться до знаходження коренів визначника n -го порядку $\Psi_n(\lambda) \equiv \det(t_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^n = 0, n \in \mathbb{N}$. Задача знаходження спектральних ліній типу $c_2 = c_2(c_1)$ $c_1 = c_1(c_2)$ зводиться до відповідної задачі Коші [4].

Теоретичні і обчислювальні аспекти проблеми розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, дослідження властивостей їхніх розв'язків, неєдиності і галужень розглянуто частково в монографії [1].

1. Андрійчук М., Савенко П. Нелінійні багато параметричні спектральні задачі. – Львів: ІППММ НАН України. – 2023. – 218 с.
2. Богатов М. Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности // Научные ведомости. Серия Математика. Физика. 2017. №6 (255). Выпуск 46. С.93-106.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
4. Красносельский М. А. Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов // Укр. матем. журн. – 1950. – 2, № 3. – С. 70–86.
5. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1. – М.: Гостехиздат. – 1951.

INVESTIGATIONS OF THE PROBLEM OF NON-UNITY SOLUTIONS OF THE URISON-TYPE INTEGRAL EQUATION

The generalization of the nonlinear integral equation of the Urison type is considered, which consists in introducing two real numerical parameters into the integral expression. This makes it possible to find a set of points of possible branching (bifurcation) of solutions in the form of spectral lines in a given domain by solving a nonlinear two-parameter spectral problem.

НАБЛИЖЕНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ТОНКИМИ НЕОДНОРІДНИМИ ПОКРИТТЯМИ

Віктор Шевчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
shevchuk@iapmm.lviv.ua

Для захисту елементів конструкцій від агресивного впливу (корозійного, абразивного, теплового та ін.) зовнішнього середовища використовують спеціальні покриття. У більшості практично важливих випадків властивості покриття змінюються за напрямком, ортогональним до твірної поверхні (глибиною, радіальною або кутовою координатою, залежно від геометричної форми підкладки). Така неоднорідність покриття спричиняється як технологією виготовлення, так і функціональними вимогами.

Для розв'язання крайових задач теплопровідності для тіл із тонкими покриттями найефективнішим підходом є застосування узагальнених граничних умов [1].

В цій роботі запропоновано наближений підхід до розв'язування задач нестационарної теплопровідності для тіл з тонкими неоднорідними покриття. Віг ґрунтується на узагальненні методики розв'язування відповідних задач для тіл з покриттями кусково-однорідної структури [2, 3].

Ефективність запропонованого підходу ілюструється порівнянням результатів, отриманих за його допомогою, з точним розв'язком тестової задачі теплопровідності для суцільного циліндра з неоднорідним покриттям.

1. *Подстригач Я.С., Шевчук П.П.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
2. *Шевчук В.А.* Методологія дослідження термонапруженого стану тіл із тонкими багатошаровими покриттями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 64, № 3. – С. 41–54.
3. *Шевчук В.А.* Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 62, № 2. – С. 82–97.

AN APPROXIMATE APPROACH TO SOLVING PROBLEMS OF NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION FOR BODIES WITH THIN INHOMOGENEOUS COATINGS

This paper proposes an effective approach to solving thermal problems for bodies with thin inhomogeneous coatings, which is based on the modeling of such coatings with thin shells with appropriate geometrical and thermal properties of a coating. In such an approach, the influence of thin coatings on the thermal state of a body-coating system is described by special generalized boundary conditions.

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРОСТОРОВОЇ ТЕРМОВОЛОГОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Вікторія Пастернак¹, Георгій Сулим²

¹Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, pasternak.viktoria@vnu.edu.ua

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, gtsulym@gmail.com

Потреби сучасної економіки вимагають активного розвитку нових аналітично-числових методів аналізу взаємодії фізико-механічних полів різної природи у твердих тілах. Зокрема, істотна увага зосереджена на моделюванні впливу температури та вологи на напружено-деформований стан конструкційних елементів [1]. Незважаючи на важливість дослідження такого типу задач з огляду як на широкий спектр технологічних процесів обробки, так і на умови експлуатації елементів конструкцій, зокрема і з композиційних та інтелектуальних матеріалів, вони ще недостатньо глибокі.

У даній роботі розглянуто невзаємозв'язану лінійну просторову задачу термовологопружності анізотропних тіл, якими зокрема, у найширшому та найпростішому практичному застосуванні є й дерев'яні конструкційні елементи. Визначальні рівняння цієї задачі після застосування інтегрального перетворення Радона записані у матрично-векторній формі. Із їх використанням та подальшим застосуванням оберненого перетворення Радона отримано фундаментальні розв'язки термовологопружності для безмежного анізотропного середовища за дії зосереджених сил, джерел тепла та вологи. Ці розв'язки подано у вигляді добутку регулярного інтегралу по поверхні сфери чи уздовж кола та явно записаного сингулярного множника.

Із використанням розширених інтегральних формул Гріна побудовано інтегральні залежності типу Сомільяни для просторових задач термовологопружності механіки деформівного твердого тіла. На їхній основі отримано двовимірні інтегральні рівняння відповідних задач, зокрема, для тіл із трищинами.

1. Hui Y., Giunta G., De Pietro G., Belouettar S., Carrera E., Yang J., Hu H. A hygrothermal stress finite element analysis of laminated beam structures through hierarchical one-dimensional modeling // Mechanics of Advanced Materials and Structure. – 2021. – **29**, No.21. – P. 3040–3054.

FUNDAMENTAL SOLUTION AND BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF SPATIAL HYGROTHERMOELASTICITY OF ANISOTROPIC SOLIDS

This study presents a solid approach in derivation of the fundamental solution and boundary integral equations for studying hygrothermal stresses in anisotropic solids using extended Green's second identity and Radon integral transform.

ТЕРМОНАПРУЖЕННЯ У ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ЦИЛІНДРІ, ВИГОТОВЛЕНОМУ З ФУНКЦІЙНО-ГРАДУЙОВАНОГО МАТЕРІАЛУ

Галина Гарматій¹, Богдан Калиняк², Михайло Глобчак³

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹galynaharmatiy@gmail.com, ²b-kalynyak@litech.net,

³Національний Університет "Львівська політехніка", м. Львів, mykhailo.v.hlobchak@lpnu.ua

При проектуванні елементів конструкцій з функційно-градуйованого матеріалу (ФГМ) важливим є визначення та дослідження спільного впливу на їх термонапружений стан залежності характеристик матеріалу від координат і температури. У розв'язаній незв'язаній квазістатичній задачі термопружності для довгого порожнистого циліндра також враховано залежності від часу теплових навантажень на його поверхнях.

Відповідну нелінійну нестационарну крайову задачу теплопровідності розв'язано чисельно методом прямих. В цьому підході процес розв'язування складається з двох частин: просторової дискретизації та чисельного інтегрування по часу. Для просторової дискретизації використано інтегро-інтерполяційний метод [1]. Отримана задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь розв'язана за допомогою формул диференціювання назад [2].

Напружений стан, викликаний температурним полем та силовими навантаженнями, визначено на основі зведення задач пружності до інтегральних рівнянь методом безпосереднього інтегрування [4].

Чисельні дослідження проводились в діапазоні температур від 300 К до 800 К з експоненціальним зростом від часу температури на межах циліндра, виготовленого з двокомпонентного матеріалу (Al_2O_3 , Ni). Характеристики двокомпонентного матеріалу описано моделлю простої суміші [3] з концентрацією $S(\rho)$ одного матеріалу в іншому у вигляді степеневого закону $S(\rho) = [(\rho - \rho_1) / (1 - \rho_1)]^s$, де ρ – радіальна координата, віднесена до зовнішнього радіуса циліндра, ρ_1 – внутрішній радіус, $s > 0$. На рис.1, 2 наведено розподіли температури у градусах Кельвіна та напружень у мегапаскалях у різні моменти часу. Суцільними лініями зображено температурне поле та напруження з врахуванням температурної залежності характеристик матеріалу, а штриховими – при сталій температурі 300 К. Теплообмін відбувається за законом Ньютона з коефіцієнтами тепловіддачі 750 і 10000, змінами температур середовища за законом $t_{c_i}(\tau) = (t_c - t_p)(1 - e^{-k_i \tau})$, $i = 1, 2$; $k_1 = 1000$, $k_2 = 10$ відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях; $t_p = 293K$, $t_c = 1073K$.

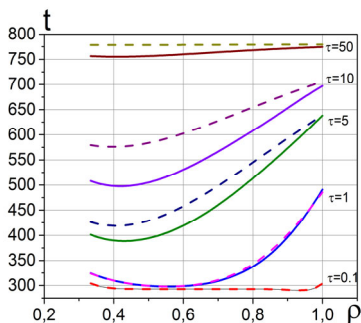


Рис.1. Розподіл температури t при різних значеннях часу τ

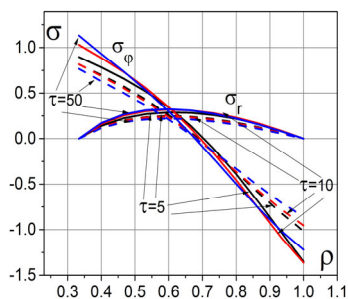


Рис.2. Розподіл радіальних σ_r та колових σ_ϕ напружень при різних значеннях часу τ

Найбільша різниця між температурними полями, обчисленими для залежних та незалежних від температури характеристик матеріалу досягається всередині порожнистого циліндра в моменти часу до виходу на стаціонарний режим.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.–616 с.
2. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.–614 p.
3. Reddy J. N. Thermomechanical Behavior of Functionally Graded Materials. Final Report for AFOSR Grant F49620-95-1-0342. CML Report 98-01.–1998 .– 87 p.
4. Tokovyy Yu, Ma C.-C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – New Castle: Cambridge Scholars Publishing, 2021.– 342 p.

THERMAL STRESS IN A LONG HOLLOW THERMO-SENSITIVE CYLINDER MADE OF FUNCTION-GRADED MATERIAL

The uncoupled quasi-static problem of thermoelasticity for a hollow cylinder was solved taking into account the temperature dependence of the thermomechanical characteristics of the components of the functionally gradient material (FGM). The temperature field has been determined taking into account the complex heat exchange with media of time-varying temperature. The nonlinear non-stationary boundary value problem of thermal conductivity was solved by the numerical method of the lines. The corresponding problem of thermoelasticity was solved by its reduction to integral Fredholm equations of the second kind and replacing the integral with a quadrature formula. The influence of the temperature dependence of thermophysical and mechanical characteristics on the thermostressed state of the hollow cylinder has been investigated.

ВПЛИВ ПРУЖНОСТІ КРІПЛЕННЯ ПОПЕРЕДНЬО НАГРІТОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ НА ЇЇ ВІБРАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Олександр Горечко¹, Надія Заводовська²

¹Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, oleksandr.m.horechko@lpnu.ua,

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів, nadyahor@gmail.com

Завдяки широкому застосуванню пластин в механічних системах, починаючи від музичних інструментів і закінчуючи структурними елементами в промисловості та техніці, поперечна вібрація пластин і мембран була предметом багатьох досліджень з кінця дев'ятнадцятого століття. Грунтовний огляд більшої частини таких робіт для пластин канонічної форми представлений у роботі [1]. В багатьох роботах особливий інтерес викликав аналіз впливу напруження в площині на власні частоти коливань таких структурних елементів. Показано, що в таких задачах відбуваються значні зміни у власних частотах і менш значні у формах коливань, що призводить до значних змін у реакції на динамічне навантаження порівняно з пластиною в ненапруженому стані.

І досі пластини мають широке застосування в багатьох галузях техніки, таких як аерокосмічна, цивільна, ядерна, електронна, автомобільна тощо. Останні кілька десятиліть з точки зору динаміки пластин велика увага приділяється галузі мікроелектромеханічних (MEMS) і наноелектромеханічних систем (NEMS). Тому і нині проводяться теоретичні дослідження вібрацій круглих пластин, які використовують або пропонують нові числові та числово-аналітичні методи для пластин постійної та змінної товщини, враховують взаємодію з іншими середовищами [2], розглядають задачі динаміки в нелінійній постановці [3], аналізують вплив попередніх напружень на динамічні характеристики її поперечних коливань [4].

В роботі розглядається задача знаходження власних частот поперечних коливань круглої пластини, попередньо навантаженої в площині внаслідок нагріву рівномірними джерелами тепла та теплообміну з середовищем, при її пружному кріпленні на границі. Задача зводиться до послідовного розв'язування задач осесиметричної статичної термопружності та поперечних коливань попередньо напруженої пластинки.

Побудовано [5] загальний розв'язок статичної осесиметричної задачі термопружності для круглої пластини, а звідси отримано і розв'язок при постійних коефіцієнтах теплообміну пластини з навколишнім середовищем та рівномірно розподіленими джерелами тепла, з пружно податливим в радіальному напрямку краєм пластинки. Температурні напруження мають вигляд комбінацій функцій Бесселя першого роду та вироджених

гіпергеометричних функцій. В частковому випадку відсутності теплообміну з плоских поверхонь ці вирази спрощуються до квадратичних функцій, а найпростіші вирази постійних температурних напружень отримуються у випадку однорідної температури пластинки.

Поперечні коливання пластинки описуються динамічним рівнянням тонких пластин Кірхгофа для осесиметричного поля температурних напружень при пружному кріпленні відносно повороту та нормальних переміщень зовнішнього контура. Для випадку однорідної температури пластинки розв'язування задачі коливань проводилось аналітично, побудовано частотне рівняння.

В результаті проведених обчислень проаналізовано вплив зміни температури пластинки на її найнижчі власні частоти, а також зміни пружності кріплення краю на значення власних частот. Найчутливішою до зміни температури є основна власна частота. Значення власних частот від температури спадають зі зменшенням пружної податливості в радіальному напрямку, адже зі зменшенням цього параметра температурні напруження прямують до нуля. З ростом жорсткостей кріплення на поворот і прогин власні частоти ростуть, причому зростання відбувається на обмеженому проміжку зміни цих параметрів, після чого значення частот близькі до частот при ідеальних варіантах кріплення. Показано, що чутливість до температури круглих пластин є вищою, ніж для аналогічних прямокутних. Власні частоти опертої пластини є більш чутливими до зміни температури нагріву ніж частоти жорстко защемленої пластинки.

1. *Leissa A.W.* Vibration of Plates. Washington: NASA SP-160, 1969. – 360 p.
2. *Yao S., Fu A., Xing J., Zhou J., Tian B.* Fluid-Structure Coupling Vibration of an Elastically Restrained Circular Plate // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 772(2020) 012017 – 8 p.
3. *Xu, P., Wellens, P. (2021).* Effects of static loads on the nonlinear vibration of circular plates. Journal of Sound and Vibration, 504, Article 116111, 17 pages. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116111>
4. *Luyun C., Hong Y.* Vibration approximate analytical solutions of circular plate consideration of complex pre-stress distribution // Journal of Low Frequency Noise, Vibration & Active Control. – 2020. – 39 (4). - P.987-1001.
5. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.

INFLUENCE OF THE ELASTICITY OF MOUNTING OF A PREHEATED ROUND PLATE ON ITS VIBRATION CHARACTERISTICS

The problem of oscillations of a round plate with an elastically fixed outer edge under the conditions of its heating by uniformly distributed heat sources is considered. For the case of uniform heating of the plate, an analytical solution was obtained, based on which the influence of the elasticity of the fastening on the natural frequencies of the plate was analyzed.

ПЕРІОДИЧНІ СИСТЕМИ АНТИТРИЩИН У ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ

Олексій Ніколаєв¹, Аліна Крайниченко²

^{1,2}Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків,
1a.nikolaev@khai.edu, 2a.krainychenko@khai.edu

Досліджуються задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного простору, підсиленого періодичними системами дискових кругових включень (антитріщин), центри яких знаходяться на осі анізотропії, а їх площини їй перпендикулярні. Вважається, що на нескінченності прикладено стале дво-вісне стискання. Кожна періодична система визначається представницьким шаром, площини якого перпендикулярні осі анізотропії, і який містить скінченну систему антитріщин різних розмірів. Така система утворює певну конфігурацію. В конкретну конфігурацію може входити будь-яка непарна кількість антитріщин довільного розміру, але при певних обмеженнях: антитріщини симетричні відносно серединної площини шару, їх розміри задовольняють деяку умову збіжності. Усі задачі розв'язувалися узагальненим методом Фур'є (УМФ), який дозволив їх звести до нескінченних алгебраїчних систем з фредгольмовими операторами. Результати дослідження спиралися також на широкий комп'ютерний експеримент, в межах якого обчислювалися розподіли напружень і коефіцієнти інтенсивності напружень не тільки в періодичних задачах, а ще й в неперіодичних, утворених кількома представницькими шарами. Проводилося порівняння результатів. Практична перевірка збіжності методу редукції показала високу ефективність УМФ.

PERIODIC SYSTEMS OF ANTI-CRACKS IN TRANSVERSAL-ISOTROPIC SPACE

The problems of the stressed state of a transversely isotropic space reinforced by periodic systems of disk circular inclusions (anti-cracks), whose centers are on the axis of anisotropy, and their planes are perpendicular to it, are studied. It is assumed that constant biaxial compression is applied at infinity. Each periodic system is defined by a representative layer, the planes of which are perpendicular to the anisotropy axis, and which contains a finite system of anti-cracks of different sizes. Such a system forms a certain configuration. A specific configuration can include any odd number of anti-cracks of arbitrary size, but with certain restrictions: the anti-cracks are symmetric with respect to the median plane of the layer, their sizes satisfy some condition of convergence. All problems were solved by the generalized Fourier method (GFM), which made it possible to reduce them to infinite algebraic systems with Fredholm operators. The results of the study were also based on a wide computer experiment, within which stress distributions and stress intensity coefficients were calculated not only in periodic problems, but also in non-periodic ones formed by several representative layers. The results were compared.

ОБЕРНЕНІ КВАЗИСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Борис Процюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
borys.protsiuk@gmail.com

Розглянуто обернені задачі термопружності для циліндра, складеного із n -концентричних, ідеально контактуючих шарів, за припущення, що на обмежувальних поверхнях $r = r_0$ і $r = r_n$ виконуються теплові умови

$$\left(\bar{\lambda}_i^{(1)} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} - \text{Bi}_0 \bar{t} \right) \Big|_{r=r_0} = -Q_0(\text{Fo}), \quad \left(\bar{\lambda}_i^{(n)} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} + \text{Bi}_n \bar{t} \right) \Big|_{r=r_n} = Q_n(\text{Fo}).$$

Тут $Q_j(\text{Fo}) = \text{Bi}_j t_{cj}(\text{Fo}) + \text{Ki}_j q_j(\text{Fo})$; $t_{cj}(\text{Fo})$ – температури середовищ; $q_j(\text{Fo})$ – густини теплових потоків; Fo – безрозмірний час; $\bar{\lambda}_i^{(j)}$, Bi_j , Ki_j – безрозмірні сталі, комбінуючи якими можна отримати інші варіанти граничних умов; $j = 0, n$. Вважали, що одна із функцій $Q_0(\text{Fo})$ або $Q_n(\text{Fo})$ невідома, але відомий на відповідних протилежних обмежувальних поверхнях один з розподілів: радіального переміщення, радіальної деформації чи кільцевого напруження.

Для знаходження цих функцій використали за урахування осьової деформації розв’язок відповідної прямої задачі термопружності [1] у вигляді суперпозиції залежностей, кожна з яких описує напружений стан, зумовлений відповідним тепловим або силовим чинниками та лінійні сплайни.

Для випадку, коли невідома функція $Q_0(\text{Fo})$, отримано рекурентну формулу для знаходження її значень у фіксовані моменти часу. Проаналізовано три розподіли температури середовища усередині дванадцятишарового порожнистого циліндра, які визначено за заданими розподілами, відповідно, радіального переміщення, радіальної деформації і колового напруження на обмежувальній зовнішній поверхні, які отримали із розв’язку прямої задачі. Числові дослідження, зокрема, засвідчили, що відповідні значення температури, підраховані за рекурентною формулою і за заданим у прямій задачі законом зміни температури середовища відрізняються щонайбільше на 0.0004.

1. Процюк Б. В. Про подання розв’язку квазістатичної задачі термопружності для багатощарового циліндра // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2023. – Вип.21. – С. 43–63.

INVERSE QUASISTATIC PROBLEMS OF THERMAL ELASTICITY FOR A MULTILAYERED CYLINDER

The method of determining the distribution of ambient temperature or heat flow inside or outside a multilayer cylinder is illustrated, with the additional condition of radial displacement, radial deformation or circular stress on the opposite surface.

CONVECTIVE DRYING THE MULTI-COMPONENT POROUS MATERIALS: SOFTWARE DEVELOPMENT

Anatolii Dmytruk¹, Adrian Torsky²

¹Lviv Polytechnic National University, Lviv, anatolii.a.dmytruk@lpnu.ua,

²Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, adrian@cmm.lviv.ua

Equipment design, such as the shape of chambers for drying and the location of the vents, greatly affect drying efficiency and the quality of the final product. For such devices, it is necessary to develop appropriate software for comprehensive analysis of moist materials and algorithms in accordance with the established characteristics of drying objects. The choice of drying methods is determined by the type of energy interaction between moisture and the material. Additionally, it requires the application of various methods of mathematical modeling for each specific type of drying apparatus, which is associated with different interactions between particle flow and the drying agent (impulse, pseudo-fluidized drying, drying in hydrodynamic active regimes, etc.).

The designs of drying devices provide for various options for thermal treatment of grain: in a dense or loose bed, in a fluidized state [1]. Heat transfer to the grain during heating or removal during cooling is carried out using a gaseous agent (air, combustion gases, water vapor) or by contact. In a general consideration of the issue, two cases are distinguished: processing of a grain bed and processing of individual grains.

When processing individual grains, a loose or fluidized bed is considered. Therefore, the determination of thermophysical properties should be carried out separately for the grain layer and individual grains. The object of study in this case is a capillary-porous body. When analyzing the thermophysical properties of an individual grain, the difference in chemical composition and microstructure of the grain affects the values of thermophysical coefficients. For a complete description of moisture transfer in the grain, it is necessary to know the thermodynamic characteristics of the body (isothermal moisture capacity), kinetic moisture transfer coefficients (moisture diffusion coefficients, moisture conduction), temperature coefficients of moisture transfer potential (heat-moisture conduction), and similarity criteria.

In this work, the software is presented serving as an effective tool for investigation of convective drying of multi-component capillary-porous materials, which is focused on the mathematical modeling of the drying processes of such materials in convective drying chambers. The selection of such equipment best suits the stated objective.

The optimal operating parameters – ambient temperature, air humidity in the chamber, and airflow velocity – should be selected considering the technological changes of the drying material. Moisture removal under heating is determined by the maximum allowable temperature for the given material and the acceptable rate of change of its gradients over time. Temperature and humidity regulation in dryers is achieved by adjusting the temperature based on dry and wet bulb thermometers of the drying agent. The drying process in steam chamber dryers occurs according to the laws governing changes in dry and wet temperatures.

It has been experimentally established that when studying mass transfer and heat conduction of the grain during drying, it is necessary to take into account the heterogeneity of the grain structure, the depth of its placement in the layer, and the main characteristics of the grain and the porous layer, which are done in this work.

The presented software package is used for analyzing changes in moisture concentration and temperature within the grain over time, taking into account the physicochemical characteristics of the grain, the heterogeneity of the structure of individual grains, and the control functions (steam-air mixture and temperature) of the drying environment with oscillating forms of these functions.

Additionally, the software package provides calculations of the stress-strain state of the grain at any moment during the drying process.

The software package is simple and user-friendly. Using step-by-step menus and help prompts, the user configures the calculation of the desired task. They sequentially fill in empty fields, such as "Initial grain temperature" or "Airflow rate", and select the desired action, such as "Input data", that they wish to perform, after which the program performs calculations for the corresponding values.

The calculation software modules can be divided into two groups according to the conditions of their application: programs for calculating moisture concentrations, grain temperatures, and programs for calculating displacements, deformations, radial and tangential stresses in the grain [2]. A common requirement for all groups is the user's necessary completion of all empty fields. After performing the aforementioned actions, the results of solving the problem are obtained in tabular form. It should be noted that if the user does not fill in at least one free field, the program will not start and an error message will be displayed.

1. *Hayvas B., Dmytruk V., Torskyy A., Dmytruk A.* On methods of mathematical modeling of drying dispersed materials, *Mathematical Modeling and Computing*, 2017. – V. 4 (2). – P. 139-147.
2. *Gayvas B., Kaminska O., Dmytruk A.* Simulation of Crack Resistance of Mustard in Pulsed Drying Mode. *International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies*, 2020. – P. 91–94.

ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ТА ЗБІЖНОСТІ РІЗНИХ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КІРША

Яніна Гусаревич¹, Богдан Дробенко²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹yanina.husarevych@gmail.com, ²drobenko@ukr.net

Метод скінченних елементів (МСЕ) широко використовують при дослідженні міцності та експлуатаційної надійності реальних інженерних конструкцій. Побудова стандартної скінченно-елементної (СЕ) моделі включає три основні кроки: конструювання функцій форми, оцінювання поля деформацій та застосування співвідношень у слабкій формі для формування алгебраїчної системи рівнянь. При побудові моделей згладженого методу скінченних елементів (ЗМСЕ) передбачають додатковий крок – оцінювання згладженого поля деформацій, що дозволяє підняти точність отримуваних розв'язків. Це особливо важливо у випадках складної геометричної конфігурації конструкції і наявності локальних концентрацій напружень.

Стандартний МСЕ завжди завищує жорсткість конструкції (отримуємо занижені значення переміщень, а, отже, деформацій і напружень). Крім цього для багатьох задач це веде до так званого замикання числових розв'язків. Явище завищеної жорсткості властиве для всіх стандартних СЕ моделей і є особливо критичним для лінійних трикутних СЕ. ЗМСЕ може цю проблему подолати і завжди призводить до «м'якших» моделей.

Інша вагома проблема стандартного МСЕ – неточність у напруженнях, особливо за використання трикутних (чотиригранних у просторовому випадку) СЕ. Ця проблема в чомусь пов'язана із завищеною жорсткістю СЕ моделей, але більше вона стосується поелементної оцінки деформацій, використовуючи кусково неперервно-диференційовані поля переміщень. Такі деформації є розривними на поверхнях елементів, що і призводить до більших похибок при обчисленні напружень. ЗМСЕ моделі пропонують способи усунення цієї розривності на стадії формулювання, внаслідок чого істотно зростає точність визначення переміщень і напружень.

Третя проблема – втрата точності за використання сильно спотворених СЕ поділів (тому стандартний МСЕ вимагає якісних СЕ поділів). Ця проблема стосується ізопараметричних елементів з використанням відображення розглядуваного СЕ на відповідний базовий елемент. За сильно спотворених СЕ матриця Якобі стає погано обумовленою, що в результаті призводить до відхилень в точності розв'язку.

Моделі ЗМСЕ природно долають ці проблеми, оскільки не використовують процедури відображення. Тому спотворення сітки СЕ

істотно менше впливає на розв'язки. Деякі ЗМСЕ моделі можуть працювати з у край спотвореними СЕ-поділами.

Добре відомо, що стандартні СЕ моделі потребують чотирикутних (шестигранних) СЕ поділів хорошої якості. В той же час дослідники віддають переваги трикутним (чотиригранним) лінійним СЕ, оскільки такі поділи можна будувати відносно легко навіть для складних областей. На додаток при виконанні адаптивного аналізу необхідна автоматична перебудова СЕ поділів. На сьогоднішній день лише СЕ поділи на основі лінійних трикутних елементів можуть автоматично перебудовуватись. Тому в майбутньому охочіше використовуватимуть переважно ці СЕ. Виявилось, що деякі ЗМСЕ моделі чудово працюють з такими СЕ поділами. З їхньою допомогою на таких поділах отримують набагато точніші розв'язки, ніж стандартним МСЕ.

Оцінка точності розв'язків має важливе значення. На жаль МСЕ може дати лише обмеження розв'язку знизу, а тому похибка стосовно точного розв'язку невідома. За допомогою деяких ЗМСЕ моделей можна отримувати оцінку розв'язку згори, що разом зі стандартним МСЕ дає обмеження для точного розв'язку.

Розглянуто різні варіанти ЗМСЕ і виконано порівняльний аналіз між ЗМСЕ та класичним МСЕ з погляду ефективності, точності та збіжності розв'язків задачі Кірша, для якої характерна істотна концентрація напружень. Використано декілька варіантів ЗМСЕ та класичний МСЕ.

Досліджено точність та збіжність отримуваних розв'язків за енергетичними нормами. Використано різні СЕ поділи області з чотирикутними елементами та полігональними елементами для ЗМСЕ. Для МСЕ використано класичні СЕ поділи з чотирикутними елементами.

Показано, що ЗМСЕ забезпечує істотно швидшу збіжність до аналітичного розв'язку задачі. Похибка ЗМСЕ розв'язків значно менша за похибку класичних схем МСЕ, навіть при меншій кількості ступенів вільності.

Завдяки згладженню деформаційного поля, ЗМСЕ забезпечує плавніший розподіл напружень, що зменшує ризик виникнення штучних піків у зонах з високою концентрацією напружень.

ACCURACY AND CONVERGENCE EVALUATION OF DIFFERENT FINITE ELEMENT SOLUTIONS OF THE KIRSCH PROBLEM

The study focuses on comparing the efficiency and accuracy of the Smoothed Finite Element Method (SFEM) with the classical Finite Element Method (FEM) for the Kirsch problem – an infinite plate with a circular hole under tension. The results show that SFEM provides faster convergence, better accuracy, and requires fewer degrees of freedom (DOF) compared to FEM, particularly when dealing with complex geometries and stress concentrations. SFEM's advantage implies smoothing the deformation field, which allows for more accurate stress distributions around holes and reduces artificial stress peaks often seeing FEM. These results demonstrate SFEM's potential for solving complex mechanical problems where precision is crucial.

ПОШИРЕННЯ ІМПУЛЬСУ НАПРУЖЕННЯ ВЗДОВЖ ТОНКОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ТЕПЛОВОМУ ІМПУЛЬСНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Ярослав Жук^{1,2}, Микола Мельниченко³, Віталій Гусак^{2,4}

^{1,3}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, ¹yaroslavzhuk@knu.ua,

³realcrystallab@univ.kiev.ua

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, ⁴gusakw7@gmail.com

Імпульсне теплове опромінення поверхні металевих елементів конструкцій застосовується в сучасному виробництві з метою підвищення міцності, запобігання зношенню і покращення експлуатаційних характеристик [2–3]. При цьому на поверхні і в тонкому приповерхневому шарі створюється зона з високою густиною енергії. Швидкий розігрів (і наступне поступове охолодження) з великими градієнтами температури спричинює виникнення фронту ударної хвилі і теплових напружень. У роботі змодельовано зв'язану термомеханічну поведінку матеріалу в околі дії теплового імпульсу та досліджено поширення хвилі напружень уздовж тонкого довгого циліндру і зміни температури, які його супроводжують.

Стержень моделюється круговим циліндром радіусу R і довжини L при $R \ll L$. Торць циліндра $z = 0$ перебуває під дією одноразового теплового імпульсу, який задається тепловим потоком через торць

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin(\pi t/t_p), & 0 \leq t \leq t_p, \\ 0, & t > t_p, \end{cases} \quad z = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad z = L, \quad r = R \quad (1)$$

де θ – температура; k – коефіцієнт теплопровідності; t_p – час дії імпульсу; q_0 – параметр імпульсу. Вся інша поверхня диску є теплоізолюваною і вільною від напружень

$$\sigma_{ij} = 0 \text{ на } S. \quad (2)$$

Початкові умови мають вигляд

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0. \quad (3)$$

де u_r і u_z – переміщення, а θ_0 – початкова температура.

Постановка осесиметричної зв'язаної задачі складається зі співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння балансу енергії та рівнянь узагальненої термодинамічно узгодженої теорії, розвинутої на основі моделі Боднера–Партома [1], що описує зв'язану фізично нелінійну поведінку матеріалу диска. Постановка замикається граничними та початковими умовами (1) – (3).

Циліндр виготовлено зі сталі 35ХМА. На рис. 1 проілюстровано проходження і відбиття імпульсу напруження, яке виникає при дії теплового імпульсу з параметрами $q_0 = 5 \cdot 10^7$ кВт і $t_p = 0,1$ мкс.

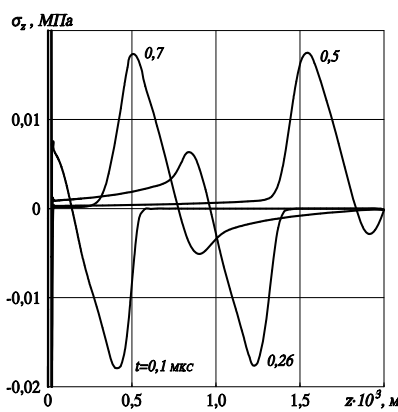


Рис. 1

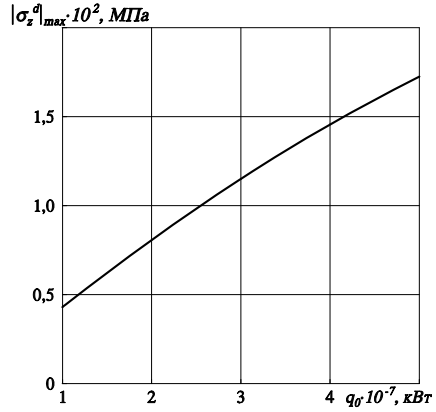


Рис. 2

Збільшення параметру q_0 призводить до збільшення максимального стискаючого напруження в імпульсі. Ця залежність показана на рис. 2. Вона має практично лінійний характер. Встановлено також, що максимальне значення стиску досягається приблизно при $t \approx t_p / 5$, коли максимальної температури нагріву ще не досягнуто. Решта теплової енергії витрачено на формування заднього фронту імпульсу і поля квазістатичних напружень у приповерхневій зоні.

1. Жук Я.О., Сенченков І.К., Бойчук О.В. Динамічні процеси в тонкому циліндрі при тепловому опроміненні торця // Доп. НАН України. – 2007. – № 2. – С. 56–62.
2. Backus S., Durfee C.G., Murnane M.M., and Kapteyn H.C. High Power Ultrafast Lasers // Review of Scientific Instruments. – 1998. – 69, No. 3. – P. 1207–1223.
3. Qin Y., Zou J., Dong C. et al. Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. & Meth. In Phys. Research. Part B. – 2004. – 225. – P. 544–554.

STRESS PULSE PROPAGATION ALONG THIN THERMOELSTIC BAR UNDER THERMAL PULSE EXCITATION

Processes of generation and propagation of stress wave caused by the thermal impact at the face of long thin steel cylinder are investigated in the frame of coupled thermomechanics. Thermodynamically consistent theory of inelastic material behavior is used to simulate the inelastic material response. Main regularities of thermomechanical state in the vicinity of thermal pulse, stress wave propagation accompanied with temperature rise are studied as well as relationship between parameters of thermal pulse and stress wave.

АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ ТЕРМОПРУЖНОГО ШАРУ В УМОВАХ ТЕПЛООВОГО УДАРУ НА ОСНОВІ РОЗШИРЕНОЇ МОДЕЛІ ЛОРДА–ШУЛЬМАНА

Мар'ян Грицина¹, Ольга Грицина²

^{1,2}Інститут будівництва та архітектури Словацької академії наук, м. Братислава, ¹maryan.hrytsyna@savba.sk,

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,

²hrytsyna.olha.@gmail.com, olha.hrytsyna@savba.sk

Для дослідження зв'язаних термомеханічних процесів у пружних структурах отримано систему рівнянь узагальненої математичної моделі для матеріалів із мікроструктурою. З метою врахування скінченної швидкості поширення теплових хвиль і зв'язку температури з механічними полями, застосовано співвідношення теорії Лорда-Шульмана [2], що ґрунтується на узагальненому законі теплопровідності Фур'є. Щоб врахувати ефект мікрожорсткості та мікроінерції, теорія Лорда-Шульмана поєднується з теорією Міндліна для пружних матеріалів з мікроструктурою [3], яка враховує вплив градієнтів тензора деформації та вектора швидкості. Для центральносиметричних матеріалів, сформульовано ключову систему рівнянь математичної моделі, що включає такі рівняння руху й рівняння теплопровідності:

$$c_{44}u_{i,jj} + (c_{12} + c_{44})u_{j,ji} - l^2c_{44}u_{i,jkk} - l^2(c_{12} + c_{44})u_{j,jkk} - \beta_T\theta_{,i} - \rho\ddot{u}_i + \frac{1}{3}\rho l_*^2\ddot{u}_{i,jj} = 0,$$
$$\rho c_\varepsilon(\dot{\theta} + \tau_0\ddot{\theta}) + T_0\beta_T(\dot{u}_{i,i} + \tau_0\ddot{u}_{i,i}) - k\theta_{,ii} = 0.$$

Тут u_i та θ – компоненти вектора переміщень і збурення температури, ρ – густина маси, c_{12} та c_{44} – пружні характеристики матеріалу, l та l_* – характерні віддалі мікроструктури й мікроінерції, відповідно, τ_0 – час релаксації, k , c_ε , β_T – коефіцієнти теплопровідності, питомої теплоємності, та взаємозв'язку між механічними полями й температурою.

Отриману систему рівнянь з одним часом теплової релаксації використано для аналізу термомеханічної поведінки мікророзмірного шару в умовах теплового удару. Прийнято, що збурення механічних і теплових полів у пружному шарі породжується раптовою зміною температури на одній межі шару, тоді як інша є теплоізолююваною. Зв'язану систему ключових рівнянь розв'язано з використанням методу диференціальних квадратур (DQM) [1]. Вивчено вплив параметрів мікрожорсткості та мікроінерції, часу термічної релаксації, пружних властивостей матеріалу й товщини шару на термомеханічну поведінку мікрошару. Показано, що реакція мікрошару на термоударне навантаження значно відрізняється від результатів, отриманих у рамках класичної теорії для макрошару. На цій основі зроблено висновок, що коректний аналіз малорозмірних структур під дією теплового ударного на-

вантаження слід проводити на основі представленої у цій роботі узагальненої математичної моделі Лорда-Шульмана з урахуванням ефектів мікрожорсткості та мікроінерції. Робота може бути корисною для прогнозування теплової та механічної реакцій мікро-/наноструктур в умовах теплового удару і надання на цій основі рекомендацій для проектування сучасних малорозмірних пристроїв.

Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти, науки, досліджень та спорту Словацької республіки (проект VEGA-2/0084/24).

This research was supported by the Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (grant VEGA-2/0084/24).

1. Bellman R., Casti J. Differential quadrature and long term integration // J. Math. Anal. Appl. – 1971. – **34**. – P. 235–238.
2. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solid. – 1967. – **15**, No 5. – P. 299–309.
3. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1964. – **16**. – P. 51–78.

ANALYSIS A THERMOELASTIC LAYER BEHAVIOUR UNDER THERMAL SHOCK WITH THE ENHANCED LORD-SHULMAN MODEL

A generalized mathematical model to study the coupled thermomechanical processes occurred in elastic materials with microstructure is presented. The Lord-Shulman (LS) theory of generalized thermoelasticity is employed to account for the finite speed of thermal waves and coupling of temperature with mechanical fields. In order to take the micro-stiffness and micro-inertia effect into account, the LS theory is combined with Mindlin's extended theory for elastic materials with microstructure which consider the strain gradient and velocity gradient effects. The obtained mathematical model with one heat relaxation time is used to analyze the thermomechanical problem for micro-scale layer under thermal shock conditions. The layer is made of the centrosymmetric homogeneous material. It is assumed that the disturbance of mechanical and temperature fields in elastic layer is generated by a sudden application of temperature to the layer boundary. Coupled system of governing equations is solved utilizing a differential quadrature method (DQM). The propagation of the thermo-mechanical wave and reflection from the layer boundaries are investigated. The effect of micro-stiffness and micro-inertia parameters, thermal relaxation time, elastic material properties, microlayer geometry and temperature changes on the thermomechanical performance of elastic microlayer is studied in detail. It was shown that the response of microlayer to the thermal shock load is significantly different from the same results for macro-scales. It was also concluded that analysis of small-scale structures should be performed with consideration of micro-stiffness and micro-inertia effects presented in this work. The work can be useful to predict the thermal and mechanical responses of small-scale structures more accurately and provide a guideline for the design and applications of novel devices under thermal shock condition.

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ СИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА ВНУТРІШНІЙ ПОВЕРХНІ СКІНЧЕННОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Леся Постолакі, Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,
lesya.postolaki@gmail.com

Розглянуто обернену осесиметричну задачу для скінченного порожнистого циліндра $\{r_{in} \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq b\}$, де $r_{in} = R_{in} / R_{out}$ та $b = B / R_{out}$. Торцеві поверхні $z = \pm b$ та зовнішня поверхня $r = 1$ циліндра є вільними від силових навантажень:

$$\sigma_{zz}(r, \pm b) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, \pm b) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}(1, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(1, z) = 0. \quad (2)$$

Розглянуто випадок, коли напруження в скінченному циліндрі створюють а рїгої невідомі навантаження, які діють на його внутрішній поверхні r_{in} . Замість цього використовується допоміжна інформація про розподіл радіальних та осевих переміщень на зовнішній поверхні циліндра:

$$u_r(1, z) = u_{out}^e(z), \quad u_z(1, z) = v_{out}^e(z). \quad (3)$$

Зауважимо, що функції $u_{out}^e(z)$ та $v_{out}^e(z)$ можна визначити емпірично, використовуючи, наприклад, оптичний метод вимірювання [1].

Метою задачі є знаходження напружень $\sigma_{rr}(r_{in}, z)$ та $\sigma_{rz}(r_{in}, z)$ на внутрішній поверхні циліндра.

Для знаходження розв'язку сформульованої задачі використано метод функції Лява χ , яка задовольняє бігармонічне рівняння:

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0, \quad (4)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Розроблено варіаційний метод однорідних розв'язків розв'язування задачі (1) – (4) [2]. Розв'язок подано у вигляді розвинення за повними системами функцій – однорідними розв'язками. Реалізація варіаційного методу приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої мають нульову асимптотику зі збільшенням номера, що дає змогу прямого використання методу редукції. Такий підхід з використанням методу редукції дає змогу побудови достатньо точних числових розв'язків задачі для обмежених тіл, зокрема – поставленої оберненої осесиметричної

задачі для скінченного порожнистого циліндра.

Для оцінки ефективності запропонованого алгоритму розв'язування оберненої задачі були зроблені наступні верифікаційні дії.

1. Спочатку була сформульована та розв'язана пряма задача з граничними умовами на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра та вільними від навантажень торцями.

2. Розв'язавши пряму задачу з використанням варіаційного підходу, обчислили нормальні та дотичні переміщення на зовнішній поверхні циліндра. Застосували лінійну апроксимацію до знайдених наборів даних і реалізували їх як вхідні дані для формулювання оберненої задачі.

3. Розв'язали обернену задачу за запропонованим алгоритмом, порівняли розраховані значення радіальних і дотичних напружень по внутрішньому колу циліндра з навантаженнями, що прикладаються в прямій задачі.

4. Внесли невеликі випадкові похибки в набори даних для переміщень на зовнішній поверхні, що моделює недосконалість емпіричних вимірювань з метою перевірки стійкості запропонованого алгоритму щодо малих збурень у вхідних даних.

1. *Aben H.* Integrated photoelasticity. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 203 p.
2. *Postolaki L., Tokovyy Y.* Identification of force loadings on the inner circumference of a finite-length elastic cylinder // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2023. – 103. – e202300435.

DETERMINATION OF THE UNKNOWN LOADINGS ON THE INNER SURFACE OF A FINITE-LENGTH HOLLOW CYLINDER

An inverse problem is solved for identifying unknown force loadings on the inner surface of a finite-length hollow cylinder using the variational method of homogeneous solutions. The problem is considered within the axisymmetric formulation, and the radial and axial displacements of the outer surface of the cylinder are used as the auxiliary data for solving the inverse problem. The accessible surfaces of the cylinder (the end-faces and the outer surface) are assumed to be free of force loading. By making use of the variational method of homogeneous solutions, the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The solution is verified numerically and its stability with respect to small errors in the input data is analyzed.

ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ У ПРУЖНОМУ ЦИЛІНДРІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ЗА ЧАСОМ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Олександр Демидов¹, Всеволод Попов²

^{1,2}Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса, ¹alexandr.v.demidov@gmail.com,
²dr.vg.popov@gmail.com

Розглянуто пружний циліндр із ізотропного матеріалу висотою a і радіусом r_0 (Рис. 1). Нижня основа циліндра ($z = 0$) є жорстко закріпленою, а нормально до верхньої основи ($z = a$) прикладено змінну у часі розподілену силу $P(r, t)$; на бічній поверхні виконуються умови ковзного контакту. За таких умов циліндр перебуває у стані віссиметричної деформації. Кутове переміщення дорівнює нулю, а радіальне $u(\eta, \zeta, \tau)$ та осьове $w(\eta, \zeta, \tau)$ – є розв'язками початково-крайової задачі для рівняння руху Ляме в безрозмірних координатах:

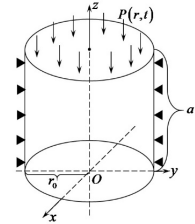


Рис. 1

$$\mu \left(\Delta u - \frac{u}{\eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta u) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2};$$

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta u) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

$$0 < \eta < 1, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \tau \in (0; +\infty)$$

$$u(\eta, 0, \tau) = 0; \quad w(\eta, 0, \tau) = 0; \quad \sigma_{\zeta\zeta}(\eta, 1, \tau) = P(\eta, \tau), \quad \tau_{\eta\zeta}(\eta, 1, \tau) = 0,$$

$$u(1, \zeta, \tau) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}(1, \zeta, \tau) = 0, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad 0 \leq \zeta < 1, \quad \tau \in (0; +\infty), \quad (2)$$

До початково-граничної задачі (1), (2) застосовано метод, який ґрунтується на різницевій апроксимації похідних за часом [1].

Розраховано осьові переміщення на верхній основі $w(0, 1)$ та нормальні напруження $\sigma_{\zeta\zeta}(0, 0)$ на нижній основі циліндра при імпульсному навантаженні, розподіленому за законом $\sigma_{\zeta\zeta}(\eta, 1) = (1 - \eta^2)$, для сталевого циліндру ($\nu = 0.25$). Результати розрахунків наведено на рис. 2, 3, де криві показують залежність переміщень і напружень від безрозмірного часу $\tau = c_2 r_0^{-1} t$ при різних формах імпульсів. Тривалість імпульсу $\tau_0 = 3$. Крива 1 відповідає

одному поданому імпульсу, криві 2, 3 і 4 відповідають трьом однаковим імпульсам з паузою між ними $\tau_p = 1, 2$ і 3 , відповідно. Крива 5 відповідає постійному навантаженню [2] і наведена для порівняння.

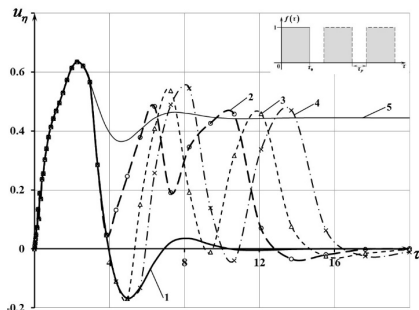


Рис. 2. Осьові переміщення

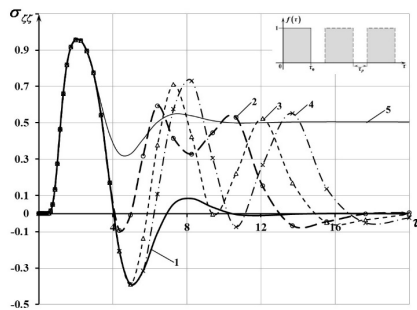


Рис. 3. Нормальні напруження

Графіки на рис. 2, 3 демонструють той факт, що максимальні значення осьового переміщення на верхній основі та нормального напруження на нижній основі циліндра спостерігаються під час перехідного процесу, і цей максимум перевищує їх значення в усталеному режимі. Проте з кожним наступним прикладенням навантаження воно зменшується, а при третьому імпульсі майже не відрізняється від значення в усталеному режимі.

1. Savruk M. P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Materials Science. – 2003. – 39, No. 4. – P. 465–471.
2. Демидов О. Застосування модифікованого методу скінченних різниць за часом при математичному моделюванні нестационарних хвильових полів у скінченному циліндрі / О.В. Демидов, В.Г. Попов / Матеріали XII міжнародної науково-технічної конференції «Суднова електроінженерія, електроніка і автоматика», 22.11.2022 - 23.11.2022. – Одеса: НУ «ОМА», 2023. – С. 53–56.

DETERMINATION OF WAVE FIELDS IN AN ELASTIC CYLINDER BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD WITH TIME AT NONSTATIONARY LOAD

The problem of mathematical modeling of dynamic wave fields in a finite-length isotropic elastic cylinder is considered under the action of a time-dependent impulse load. The influence of the impulse shape on the wave fields of displacements and stresses in the cylinder has been investigated.

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СЕНДВИЧ ПЛАСТИН З АУКСЕТИЧНИМ СОТОВИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Лідія Курпа¹, Тетяна Шматко², Ганна Лінник³, Ірина Морачковська⁴

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків,

¹ Kurpalidia@gmail.com, ² ktv_ua@yahoo.com, ³ linnik2105@gmail.com, ⁴ i.morachkovska@gmail.com

Досліджено вільні коливання тришарових композитних сендвич пластин. Зовнішні (лицьові) шари є ізотропними або ортотропними з однаковими пружними константами, а заповнювач має сотову ауксетичну структуру з негативним коефіцієнтом Пуасона. Розглянуто шестикутну форму сот (рис. 1), для яких використано відомі формули [1, 2] для обчислення матеріальних властивостей заповнювача.

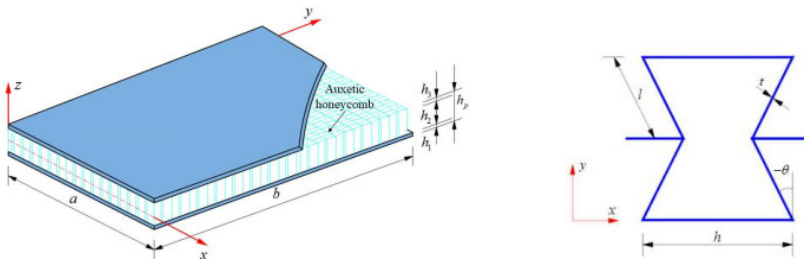


Рис. 1

Для побудови математичної моделі задачі використано уточнену теорію пластин третього порядку (теорію Редді, TSDT [3]). Для розв'язання задачі використано метод Рітца у сполученні з теорією R-функцій [4]. Виведено аналітичні формули для обчислення матеріальних властивостей сендвич пластин, які змінюються за товщиною пластини. Розроблено програмне забезпечення для вивчення динамічної поведінки сендвич пластин складної геометричної форми та різних типів граничних умов. Одержані результати порівняно з відомими.

Наприклад, в табл. 1 представлено таке порівняння з результатами [2] для квадратної пластини загальної товщини h_p з наступними параметрами:

$h_p = 0.1$ м, $E = 69$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³, $\nu = 0.33$, $a = b = 20h_p$. Позначення C, S, F відповідають різним граничним умовам на сторонах пластини, а саме C – жорстке закріплення, S – шарнірне обпирання, F – вільний край. У праці [2] автори застосовували теорію першого порядку та метод скінчених елементів. Найбільша різниця спостерігається за жорсткого закріплення сторін пластини.

тин. Для шарнірно закріплених пластин результати майже співпадають.

Таблиця 1. Порівняння основної частоти $\Lambda = \lambda / (2\pi)$ [Hz] сендвич квадратної пластини з ізотропними лицьовими шарами та ауксетичним заповнювачем ($h/a = 0.1$ м, $2a = 2b = 20h$, $t/l_0 = 0.01385$, $h_0/l_0 = 1$)

θ°	method	CCCC	SSSS	CSCS	CCCF	SCSF	CFCF
-10	RFM	263.25	151.09	214.37	176.19	95.86	163.66
	[2]	276.81	151.55	222.49	183.10	96.48	170.14
-35	RFM	260.19	149.26	211.89	174.15	95.70	161.77
	[2]	273.55	149.73	219.83	180.90	95.32	168.09
-55	RFM	248.54	142.32	202.53	166,50	90.31	154.67
	[2]	261.19	142.85	209.68	172,50	90.91	160.25
-80	RFM	102.83	58.28	85.03	70.09	37.01	65.21
	[2]	108.60	58.97	86.32	70.79	37.42	65.60

Для ілюстрації можливостей запропонованого підходу вивчено вільні коливання пластин складної геометричної форми при наявності вирізів та отворів.

1. *Nguyen, T. T., Nguyen, V. L., Tran, M. T., Nguyen, H. N., Mai, C. A.* Navier solution for static and free vibration analysis of sandwich plate with auxetic honeycomb core resting on pasternak elastic foundation // J. Sci. Tech. Civ. Eng. – 2022. – **16**, No. 3. – P.18–28.
2. *Quac T. H., Tu T.M., Tham V.V.* Free vibration and dynamic response of sandwich composite plates with auxetic honeycomb core // J. Sci. Tech. Civ. Eng. – 2021. – **15**, No. 4. – P.1–14.
3. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 858 p.
4. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 522 с.

FREE VIBRATION OF SANDWICH PLATES WITH AUXETIC HONEYCOMB CORE

This study investigates free vibrations of the sandwich plate with auxetic honeycomb core and isotropic or orthotropic face sheets. The third order shear deformation theory (TSDT) is applied to construct mathematical model. The variational Ritz method and the R-functions theory are used to solve the given problem for plates with a complex form and different boundary conditions. Analytical formulas are obtained to calculate the effective material properties of the composite structure. The reliability and accuracy of the proposed method have been validated via comparisons of the present results with known ones for square plates with different boundary conditions. Some examples of the sandwich plates with complex form are studied. The effect of geometric parameters of auxetic material, sizes of the cell, inclined angles, the thickness ratio of layers, was investigated.

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЗАДАНОГО РОЗПОДІЛУ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Богдан Калиняк

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
b-kalynyak@litech.net

Аналітично визначено температурні поля, які спричиняють заданий розподіл радіальних напружень $\sigma_r(\rho)$ ($\sigma_r(\rho_1) = -p_1$, $\sigma_r(1) = -p_2$) у неперервно неоднорідному порожнистому циліндрі з внутрішнім та зовнішнім радіусами R_1 та R_2 відповідно через механічні характеристики матеріалів, силові навантаження і радіальні напруження. Тут $\rho = r/R_2$, r – радіальна змінна Температурне поле, яке створює задані радіальні термонапруження з відомими силовими навантаженнями у перерізі p у порожнистому циліндрі, визначають з інтегрального рівняння Фредгольма

$$y(\rho) - \frac{(1+\nu(\rho))}{V(1)+W(1)} \int_{\rho_1}^1 \frac{\eta E(\eta)}{1-\nu^2} y(\eta) d\eta = \Psi(\rho), \quad (1)$$

де

$$y(\rho) = (1+\nu(\rho))\Phi(\rho), \quad \Psi(\rho) = I_1(\rho) + I_2(\rho) + I_3(\rho), \quad \Phi(\rho) = \alpha(\rho)t(\rho),$$

$$I_1(\rho) = -\frac{p[W(1)-V(1)\nu(\rho)]}{V^2(1)-W^2(1)} + \frac{(\rho_1^2 p_1 - p_2)[V(1)-W(1)\nu(\rho)]}{V^2(1)-W^2(1)},$$

$$I_2(\rho) = -\frac{1-\nu^2(\rho)}{\rho E(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho^2 \sigma_r(\rho)], \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\xi E(\xi)\nu(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} d\xi, \quad V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\xi E(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} d\xi,$$

$$I_3(\rho) = -\frac{1-\nu^2(\rho)}{\rho E(\rho)} \int_{\rho_1}^1 \frac{d}{d\rho} [\rho^2 K(\rho, \eta)] \sigma_r(\eta) d\eta, \quad t(\rho) = T(\rho) - T_0,$$

$\alpha(\rho)$, $E(\rho)$, $\nu(\rho)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона відповідно, $T(\rho)$ – температурне поле, яке задовольняє класичну задачу стаціонарну задачу теплопровідності відносно $t(\rho)$, T_0 – відлікова температура при якій термонапруження відсутні, $K(\rho, \eta)$ – відома функція, яка виражена через $E(\rho)$, $\nu(\rho)$ та їх похідні по радіальній змінній ρ [1]. Рівняння (1) відносно температури отримано з інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, до якого зведена задача

визначення напружень у довгому неоднорідному циліндрі [1] при заданому температурному полі.

Рівняння (1) – це рівняння Фредгольма другого роду відносно температури з виродженим ядром, яке має власне значення. Тому рівняння (1) при заданому радіальному термонапруженні має точний розв’язок відносно температурного поля, який містить одну довільну сталу. Цей розв’язок повинен задовольняти класичну задачу стаціонарної теплопровідності, яка містить дві умови теплообміну з середовищем (наприклад, умови Діріхле або Ньютона). Це призводить до необхідності узгодження умов нагрівання на межах циліндра.

Можливість відсутності термонапружень або встановлення заданого розподілу компоненти термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному циліндрі при великих перепадах температур між поверхнями є наслідком неоднорідності матеріалу.

Можливі межі перепаду температур визначаються найбільшим значенням відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення матеріалу. Наведено аналітичні вирази для теплових джерел, що створюють температурні поля, які призводять до заданого розподілу компоненти тензора напружень. У випадку, коли циліндр виготовлений з двокомпонентного функційно-градуїзованого матеріалу, характеристики якого описано моделлю простої суміші, отримано аналітичні вирази для температурного поля та радіального розподілу характеристик матеріалу, які забезпечують відсутність термонапружень у циліндрі без наявності об’ємних теплових джерел.

Аналіз чисельних експериментів вказує на можливість досягнень станів з відсутністю термонапружень в реально існуючих матеріалах при технологічно допустимих умовах нагрівання.

1. *Kalynyak B.M.* Fredholm equations of the second kind for radial stresses aimed at the determination of the thermoelastic state of an inhomogeneous hollow cylinder // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2015. – **205**, No. 5. – P. 659–666.

ENSURING OF THE TARGET RADIAL THERMAL STRESS DISTRIBUTION IN THE LONG HOLLOW INHOMOGENEOUS CYLINDER

The problem of determining the temperature fields that cause a given distribution of the components of the stress tensor, in particular zero, in elastic heterogeneous hollow cylinders has been developed. The implementation of such a temperature field is achieved by matching the characteristics of materials and thermal fields.

АЛГОРИТМІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ КОМБІНОВАНОГО ПРАВИЛА УСЕРЕДНЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТИВ

Михайло Марчук, Микола Хом'як

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
khomnick98@gmail.com

Пропонова праця є продовженням в сенсі розвитку запропонованого раніше авторами комбінованого підходу [1] до усереднення термопружних властивостей шаруватого композиту по товщині в межах класичної теорії. Основну увагу зосереджено на практичній апробації алгоритмів для розрахунку ефективних властивостей шарів з різною орієнтацією армування, виготовлених з одного або декількох матеріалів. Попри фактично сформовані й установлені погляди в межах класичної теорії пластин запропоновано новий метод усереднення в межах макро-структурного підходу, що використовує як прямий метод усереднення (жорсткостей), так і обернений метод усереднення (податливостей).

Мета роботи – на основі комбінованого правила усереднення за товщиною (CombinedROM) розробити та апробувати алгоритми обчислення ефективних термопружних властивостей шаруватого композиту, виявити їхні особливості, навести приклади обчислень. Викладено основи комбінованого підходу, правил класифікації шарів, отримані матричні співвідношення, які є аналогом рівнянь стану в класичній теорії шаруватих пластин.

Для верифікації підходу ми використовуємо дані, отримані по CombinedROM для різних схем укладання одноорієнтованих шарів, як вхідні параметри для задачі згину квадратної пластини, шарнірно опертої на краях, під дією поперечного навантаження, для якої існує аналітичний розв'язок як межах 2D-, так і 3D-теорій. Зроблено порівняння прогинів у центрі пластини, а також аналітичних значень напружень у точках їхніх максимумів з усередненими та визначеними за відтвореним розподілом по нормальній до серединної площини координаті.

1. *Marchuk M., Khomyak M.* New structural approach for determination of effective thermoelastic modules of discrete composite layers / In: Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials. – Vol. 204. – Cham : Springer, 2024. – P. 381–411.

ALGORITHMIC FEATURES OF THE COMBINED AVERAGE RULE FOR THE EFFECTIVE PROPERTIES OF LAYERED COMPOSITES

Algorithms to calculate effective thermoelastic properties of layered composites within the combined average rule are developed. Numerical examples are given.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІНИ ЕФЕКТИВНИХ МОДУЛЯ ЮНГА ТА КОЕФІЦІЄНТА ПУАССОНА НА ПРИКЛАДІ НЕОДНОРІДНОГО ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ

Юлія Сенік

Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, yuliya.senik@gmail.com

Розглянемо безмежний ізотропний деформівний електропровідний неферомагнітний шар, що займає область $-l \leq x \leq l$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Шар є електронейтральний, а його поверхні – вільні від зовнішнього силового навантаження із відомим на них сталим значенням густини ρ_a , відмінним від відлікового значення ρ_* , котре характерне для безмежного однорідного середовища. На безмежності шар може бути навантажений зусиллями, що спричиняють його розтяг [1,2].

Досліджено закономірності приповерхневої неоднорідності у безмежному неоднорідному шарі. Розглянуто математичну модель стану неоднорідного електропровідного деформівного твердого шару із залежними модулями пружності. Прийнято суттєву залежність пружних властивостей від неоднорідності матеріалу тіла і відображено це шляхом урахування степеневі залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від відносної зміни густини у точці тіла. Наведено результати числового аналізу з використанням представленої математичної моделі, зокрема, щодо розподілу густини у шарі, розподілу електричного потенціалу та заряду у шарі, а також розподілу напружень у шарі. Розглянуто особливості моделювання розмірного ефекту міцності шару.

1. *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.
2. *Nahirnyi T., Tchervinka K., Senyk Y.* Strength of a conducting nonferromagnetic layer. Size effect. *Journal of Mathematical Sciences.* – 2022. – № 265. – P. 489–497.

THE RESEARCH OF CHANGES OF THE EFFECTIVE YOUNG MODULE AND POISSON RATIO FOR A NONHOMOGENEOUS AND ELECTROCONDUCTIVE LAYER

The problem for the deformable electroconductive nonferromagnetic layer is considered on the basis of the mathematical model of locally non-homogeneous solids. The study of density, thermodynamic electrical potential, electricity charge and components of stress tensor in the layer have done. As a result of the research, a number of conclusions have done regarding the feasibility of taking into account the dependence from elasticity characteristics of the material on density.

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ КОНТАКТНИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ НА ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ ТРИВИМІРНИХ КОМПОЗИТІВ

Віктор Михаськів¹, Богдан Стасюк²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, м. Львів, mykhaskiv@gmail.com,

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, bohdan.m.stasyuk@lpnu.ua

Ефективні модулі пружності сучасних матричних композитів та характеристики їх міцності є чутливими до зміни умов з'єднання матеріалу наповнювача з матричним середовищем. Більшість відомих теоретичних результатів щодо реакції композитних матеріалів на механічне навантаження та їх ефективних властивостей отримано за припущення канонічності форми включень та наявності ідеального механічного контакту їх з матрицею [1]. Сучасний запит на числові методи розв'язання відповідних задач диктується можливістю їх застосування для тривимірних конфігурацій із включеннями загальної форми та розрахунку стрибків міжфазних переміщень і напружень у композитах для моделювання контактних недосконалостей. Метод граничних елементів вирізняється з-поміж інших числових методів зниженою на одиницю розмірністю області дискретизації та безпосередньою залученістю отриманих розв'язків для безмежних репрезентативних елементів у гомогенізаційні співвідношення для ефективних параметрів композиту.

Безпосереднє врахування контактних співвідношень на міжфазних поверхнях в процесі виведення систем граничних інтегральних рівнянь, поєднання додискретизаційної і постдискретизаційної регуляризації сингулярних інтегралів, побудова дискретних аналогів інтегральних рівнянь на основі граничноелементної три- та квадрангуляції міжфазних поверхонь та застосування методу колокації для отримання добре обумовлених дискретних аналогів у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь дозволяє згенерувати обчислювальний алгоритм високої ефективності та точності.

Розглядається обмежене гладкою поверхнею S ізотропне включення Ω_2 у пружній безмежній ізотропній матриці за дії на неї статичного навантаження. Деформування складових тіла Ω_1 підпорядковується рівнянням Ляме. На міжфазній поверхні S задані умови:

а) ковзного контакту [3]: $u_{3'}^{(1)}(\mathbf{x}) = u_{3'}^{(2)}(\mathbf{x}) = u_{3'}(\mathbf{x})$, $t_{3'}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{3'}^{(2)}(\mathbf{x}) = t_{3'}(\mathbf{x})$,

$$t_{j'}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{j'}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad j' = \overline{1, 2}, \quad \mathbf{x} \in S; \quad (1)$$

б) тонкого податного прошарку між включенням та матрицею [3]:

$$t_{i'}^{(2)}(\mathbf{x}) = t_{i'}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{i'}(\mathbf{x}), \quad \Delta u_{i'}(\mathbf{x}) = u_{i'}^{(1)}(\mathbf{x}) - u_{i'}^{(2)}(\mathbf{x}), \quad i' = \overline{1, 3}, \quad t_{3'}(\mathbf{x}) = f \Delta u_{3'}(\mathbf{x});$$

$$t_{j'}(\mathbf{x}) = g \Delta u_{j'}(\mathbf{x}), \quad j' = \overline{1,2}, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (2)$$

в) мембранної моделі матеріалізованої поверхні [2]:

$$u_{i'}^{(1)}(\mathbf{x}) = u_{i'}^{(2)}(\mathbf{x}) = u_{i'}(\mathbf{x}), \quad i' = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in S, \\ \Delta \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div}_{\Sigma} \left[\tau_s \mathbf{I} + (\lambda_s + \tau_s) \operatorname{tr}_{\Sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}) + 2(G_s - \tau_s) \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}) + \tau_s \nabla_{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right]. \quad (3)$$

Тут $u_{i'}^{(k)}, t_{i'}^{(k)}$ ($i' = \overline{1,3}, k = 1,2$) – компоненти векторів поверхневих переміщень та зусиль зі сторони матриці Ω_1 та включенні Ω_2 , відповідно у локальній системі координат, прив'язаній до нормального \mathbf{n} та дотичних до міжфазної поверхні ортів; f, g – константи, пов'язані з механічними характеристиками та з товщиною тонкого податливого шару; $\boldsymbol{\varepsilon}_s, \tau_s, G_s, \lambda_s$ – тензор поверхневих деформацій, натяг та пружні сталі Ляме матеріальної поверхні S .

Гранично-інтегральне формулювання задачі досягається використанням методу підобластей, функціоналу теореми про взаємність робіт та фундаментальних розв'язків теорії пружності. Процес дискретизації задач з різним типом контакту компонент композитного тіла відрізняється лише процедурами укладання матриці дискретного аналога відповідних систем ГР. Опис ефективних механічних властивостей композитних середовищ реалізовано методом гомогенізації за узагальненим алгоритмом Морі-Танакі з врахуванням стрибків переміщень або напружень на міжфазних поверхнях. Здійснено числовий розрахунок полів напружень і ефективних модулів пружності тривимірних композитних тіл та середовищ залежно від геометричної форми включень та умов контакту включень з матрицею.

1. *Eshelby J. D.* Elastic Inclusions and Inhomogeneities // *Progress in Solid Mechanics*. – 1961. – № 2. – С. 89–140.
2. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
3. *Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З.* Умови контактної взаємодії тіл (огляд) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 2004. – 47, № 3 – С. 110–125

BOUNDARY ELEMENT MODELING OF THE INFLUENCE OF CONTACT IMPERFECTIONS ON THE ELASTIC PROPERTIES OF THREE-DIMENSIONAL COMPOSITES

Integral formulations have been obtained and computational algorithms of the boundary element method have been developed for the numerical study of the 3D stress-strain state of unbounded composite bodies and the effective elastic properties of composite media with inclusions of general shape, considering different types of contact with the matrix.

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ НАПРУЖЕНЬ У БАГАТОШАРОВІЙ СФЕРИЧНІЙ ПОСУДИНІ

Юрій Токовий¹, Юрій Кульчицький-Жигайло²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, м. Львів,
¹tokovyy@gmail.com, ²kulchytyskiyyura@gmail.com

Побудовано розв'язок задачі про пружну деформацію багат шарової сферичної посудини за дії рівномірно розподіленого тиску на внутрішній поверхні (рис. 1). Посудина складена з ідеально з'єднаних еластичних шарів $r_{m-1} < r < r_m$, $m = 1, 2, \dots, M$, $r_0 = R_i/R_o$, $r_M = 1$, властивості матеріалу яких можуть довільно змінюватися за товщиною. Розв'язок побудовано за допомогою підходу, який тлумачить шарувату структуру як цілісне тіло, разом із модифікованою схемою методу безпосереднього інтегрування, що дає змогу розглядати багат шарову посудину як композиційну сферу з кусково-змінними профілями властивостей матеріалу:

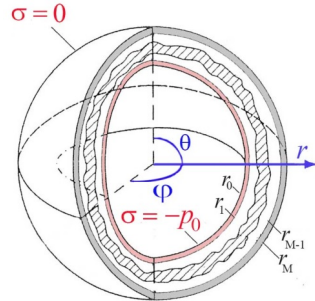


Рис. 1

$$f(r) = \sum_{m=1}^M f_m(r) S_m(r), \quad (1)$$

де $f_m(r)$ – неперервна функція в межах m -го шару $r_{m-1} < r < r_m$, $S_m(r) = H(r - r_{m-1}) - H(r - r_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, $H(r)$ – функція Гевісайда. Для визначеності припускаємо, що значення функції $f_m(r)$ на межах шару $r = r_{m-1}$ та $r = r_m$ визначаються як односторонні границі відповідно при $r \rightarrow r_{m-1}^+$ і $r \rightarrow r_m^-$.

Реалізація методу безпосереднього інтегрування [1] передбачає формулювання ключового рівняння в термінах напружень, що пов'язано з відповідним диференціюванням змінних коефіцієнтів, залучених до основних рівнянь закону Гука. Це висуває вимоги диференційованості для макроскопічних функціональних профілів властивостей матеріалу, що передбачає неперервність цих функцій та їх перших похідних. Вочевидь ця вимога не задовольняється при використанні подання (1). Щоб подолати цю перешкоду було використано апарат узагальненого диференціювання для формулювання ключових рівнянь у напруженнях [2]. У [3] запропоновано альтернативний алгоритм виведення ключового рівняння, який дає змогу уникнути

використання узагальненого диференціювання. Запропонована модифікація базується на застосуванні підходу безпосереднього інтегрування до рівнянь у термінах деформацій, які не залежать від властивостей матеріалу.

У результаті застосування такого підходу поставлену задачу зведено до розв'язування ключового інтегрального рівняння другого роду, розв'язок якого буде у вигляді явної залежності від внутрішнього тиску з використанням методу резольвентного ядра. Визначення резольвентного ядра є ключовим моментом при застосуванні запропонованого методу. Для побудови цієї функції використано алгоритм повторюваних ядер шляхом підсумовування нескінченного ряду ядер. У деяких випадках ці ряди можна підсумовувати аналітично або, якщо це не можливо, використовувати запропоновану спрощену формулу, ефективність якої продемонстровано розглянутими прикладами. Оскільки резольвента визначається за ядром ключового інтегрального рівняння, вона вербалізує «внутрішні властивості» задачі, що означає залежність лише від властивостей матеріалу шарів.

Розв'язок перевіряється шляхом порівняння з точними розв'язками, отриманими за допомогою використання методу «пошарових» розв'язків для конкретних тестових задач. Внаслідок того, що підхід передбачає підхід до одного твердого тіла (багатошарове тверде тіло розглядається як єдине ціле з поступовою зміною профілів властивостей матеріалу), він ефективний як для аналітичного, так і для чисельного застосування для довільної кількості неоднорідних шарів.

1. Tokovy Y. V., Ma C.-C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – New Castle, Cambridge Scholars Pub., 2021. – 329 p.
2. Tokova L., Yasinsky A., Ma C.-C. Effect of the layer inhomogeneity on the distribution of stresses and displacements in an elastic multilayer cylinder // Acta Mech. – 2017. – 228. – P. 2865–2877.
3. Tokovy Y. Elastic and thermoelastic response of multilayer inhomogeneous hollow cylinders // Mech. Adv. Mater. Struc. – 2024. – 31, No. 17. – P. 3889–3901.

ANALYTICAL DETERMINATION OF STRESSES IN A MULTILAYER SPHERICAL PRESSURE VESSEL

An explicit-form solution is constructed for a problem on elastic deformation of a multilayer spherical vessel due to uniform internal pressure. The solution is constructed through the use of the single solid approach along with the modified scheme of the direct integration method which allow for the consideration of the multilayer vessel as a composite sphere with piecewise-variable profiles of the material properties. As a result, the original problem is reduced to solving a governing integral equation of the second kind whose solution is constructed in the form of the explicit dependence on the internal pressure. The solution is verified by the comparison with exact solutions derived by making use the method of tailored solutions for specific benchmark problems.

ELASTIC PERFORMANCE OF A PLANE-DEFORMED MULTILAYER HALF-SPACE

Yuriy Tokovyy¹, Dariusz Perkowski², Jakub Augustyniak³

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, tokovyy@gmail.com,

^{2,3}Bialystok University of Technology, Bialystok, ²d.perkowski@pb.edu.pl, ³j.augustyniak@pb.edu.pl

In this talk, we present an extension of the direct integration method toward the elastic analysis of plane-deformed multi-layer semi-Infinite solids. The central idea implies the combination of the direct integration method and the single solid method for the analysis of stratified solids. The conventional scheme of the direct integration method allows for the derivation of the governing equation on the basis of the compatibility equation in terms of stresses. In the case of multilayer structures, this is concerned with certain complications because the material properties, which are involved into this equation, may exhibit discontinuous behavior at the layer interfaces. In order to overcome this difficulty, one may engage the generalized derivative apparatus. However, this approach is quite limited for multidimensional problems.

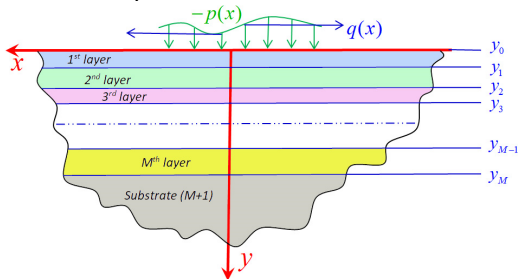


Fig 1. Scratch of the considered multilayer half-space which models a medium with a multilayer coating.

In order to overcome this difficulty, we modify the conventional scheme of the direct integration method and apply this approach towards the compatibility equation in terms of strains. In contrast to the one in terms of stresses, the former equation does not involve the material properties profiles and hence is irrespective of the mathematical model of the Hooke's law. As a result, we have managed to avoid the generalized derivatives which allowed for extension of this approach towards the multidimensional problems. We demonstrated the efficiency of this approach by constructing a comprehensive solution to a two-dimensional elasticity problem of a multilayer half-plane (Fig. 1).

The authors gratefully acknowledge the partial financial support of this research by the bilateral Ukainian-Polish R&D Project No. 0124U002858

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ ВІГАКА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

Юрій Токовий¹, Микола Юзв'як²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ, м. Львів,
¹tokovy@iapmm.lviv.ua, ²yuzvyak@ukr.net

Узагальнення методу прямого інтегрування рівнянь теорії пружності та термопружності [1] дає можливість побудувати розв'язок відповідних лінійних задач для тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями, у вигляді розвинень в тригонометричні ряди, коефіцієнти яких записуються в явному вигляді [2]. З використанням методу додаткових деформацій стає можливим поширити запропонований підхід для знаходження напружено-деформованого стану розглядуваних тіл у випадку залежності фізико-механічних властивостей матеріалу від температури чи просторових координат, з урахуванням неоднорідності матеріалу, пластичного деформування чи наявності початкових залишкових напружень.

У даній роботі розглядається задача по дослідженню напруженого стану прямокутної області у випадку залежності механічних властивостей від координат. Вихідна нелінійна задача теорії пружності зводиться до розв'язання ключового інтегро-диференціального рівняння суцільності, записаного лише для введеної функції Вігака і додаткових деформацій з відповідними інтегральними умовами. Отримані числові результати для окремих випадків силового навантаження прямокутної області.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки гранту № 0124U002858 у рамках українсько-польського науково-дослідного проекту "Ідентифікація термомеханічних параметрів неоднорідних композитних матеріалів та захисних покриттів.

1. Кушнір Р. М., Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2021. – 73, № 10. – С. 1355-1367.
2. Yuzvyak M., Tokovy Y. Thermal stresses in an elastic parallelepiped // J. Thermal Stresses. – 2022. – 45, No. 12. – P. 1009–1028.

APPLICATION OF THE VIHAK FUNCTION FOR ANALYSIS THE STRESSED STATE OF A NONGOMOGENEOUS RECTANGULAR DOMAIN

The elasticity problem is considered for a rectangular domain in the case of dependence of mechanical properties on coordinates. The original nonlinear problem is reduced to the solving of the key integro-differential equation of compatibility, written for the introduced Vihak function and additional deformations with the corresponding integral conditions.

ДОСЛІДЖЕННЯ АНІЗОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕТАЛЕВИХ СПЛАВІВ МЕТОДОМ CAFE

Віктор Грищак¹, Вадим Король²

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», м. Дніпро, ¹hryshchak.v.z@nmu.one,
²korol.v.m@nmu.one

Розробка нових металевих сплавів із покращеними фізико-механічними характеристиками є актуальною задачею для сучасної металургійної промисловості, зокрема, з огляду на обмеження сировинних ресурсів та інтенсифікацією процесу підготовки та випуску нового продукту.

З метою вивчення та дослідження властивостей нових сплавів можуть бути використані, зокрема, методи чисельного моделювання. Одним із методів дослідження процесу кристалізації розплавів металевих сплавів є метод Cellular-Automation Finite Elements (CAFE).

Формування зернистої структури (форма, орієнтація, розміщення кристалів) є визначальним для забезпечення відповідності властивостей матеріалу експлуатаційним вимогам у зв'язку зі значним впливом мікроструктури на властивості. Автоматизація розрахунків із використанням THERCAST® дозволяє отримати прогнози характеристик мікроструктури за зазначеними критеріями.

Математичне формулювання скінчено-елементного алгоритму викладено у працях [1–3], відповідно до яких розрахунок прогнозованої мікроструктури є функціонально залежним від термодинамічних процесів, які протікають у металевому сплаві під час його кристалізації. Утворення твердих розчинів та кристалізація є змінним у часі процесом, відповідно, неоднорідність середовища призводить до різноманітних форм та орієнтації зерен на рівні мікроструктури. У кінцевому вигляді виріб, який виготовляється за технологією лиття, механічні характеристик набуватимуть певної нерівномірності при комбінованому навантаженні. Забезпечення рівномірності виробу узгоджується із властивостями матеріалу, відповідно анізотропні характеристики мають бути такими, які забезпечують виконання умов міцності виробу.

Так, колективом проведено дослідження сплаву 30XH2MFA на предмет встановлення режимів охолодження виливки. Моделювання процесів охолодження та прогнозування структури виконано у середовищі THERCAST® (рис. 1).

При виконанні розрахунків критерієм оцінки визначено однорідність та симетрію кристалізації розплаву. За змінним параметр взято швидкість охолодження виливки відповідно до термкінетичних діаграм фазових перетворень, розрахунок яких виконано у JMat.

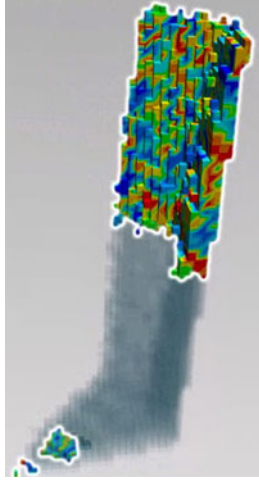


Рис. 1. Прогнозування орієнтування зерен при кристалізації сплаву 30XН2МФА

У результаті отримано режими нагрівання та охолодження сплаву зі встановленими точками фазових переходів. Верифікація результатів чисельного моделювання проведена на фізичних металографічних зразках шляхом дослідження характеристик міцності при дії на них розтягуючих навантажень за трьома вісями.

1. Carozzani T. Développement d'un modèle 3D Automate Cellulaire-Éléments Finis (CAFE) parallèle pour la prédiction de structures de grains lors de la solidification d'alliages métalliques // Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2012.
2. Carozzani T., Digonnet H., Gandin C.A.. 3D CAFE modeling of grain structures: Application to primary dendritic and secondary eutectic solidification // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. – 2012. – **20**. – 015010.
3. Dantzig J. A., Rappaz M. Solidification. – EPFL Press, 2009. – 740 p.

STUDY OF ANISOTROPIC PROPERTIES OF METAL ALLOYS BY MEANS OF CAFE METHOD

The development of new metal alloys with improved physical and mechanical properties is a relevant task for the modern metallurgical industry, which faces limitations in raw material resources and the intensification of the process of preparation and production of new products. To study the properties of new alloys, numerical modeling methods are used, particularly the Cellular-Automation Finite Elements (CAFE) method, which allows for predicting the microstructure of the material and its operational properties.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ УТВОРЕННЯ ВНУТРІШНІХ ДЕФЕКТІВ ВИЛИВОК МЕТОДОМ НИҐАМА

Віктор Гришчак¹, Кирило Зіборов², Дмитро Гаркавенко³

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», м. Дніпро, ¹hryshchak.v.z@nmu.one,
²ziborov.k.a@nmu.one, ³harkavenko.d.v@nmu.one

Технологічний процес лиття металевих сплавів передбачає протікання складних міжфазних перетворень у сплавах. Забезпечення якості готового продукту враховує утворення внутрішньої рихлості, усадочних раковин, гарячих тріщин та залишкових напружень і деформацій.

Найбільш розповсюдженим дефектом є утворення внутрішніх пор у виливках, які суттєво зменшують механічну міцність кінцевого виробу. Дослідження процесів утворення газових пор проводиться багатьма науковими колективами, результати яких викладені зокрема у [1–3]. Одним із оптимальних алгоритмів розрахунку газової пористості є метод Ніуама [1], що надає можливість чисельним методом встановити прогнозовані області накопичення газоподібного продукту та сегрегації зерен при кристалізації розплаву.

Імовірність утворення пористості зростає зі зменшенням N_u . Якщо критерій Ніуама нижче критичного значення, то утворення пористості високовірогідно. Труднощі застосування критерію Ніуама пов'язані з тим, що немає єдиного критичного значення цього критерію для різних сплавів і умов (технологій) отримання виливків. Для низьколегованих сталей критичне значення визначено автором роботи [1]. У роботі [2] критичні значення критерію визначено на основі рентгенографічних досліджень сталевих відливних листів. У роботі [3] наведено критичні значення критерію для деяких нікелевих сплавів і високолегованих сталей.

Авторським колективом проведені дослідження сплаву 38ХН3МФА з метою встановлення області потенційного накопичення газоподібних продуктів та утворення пухирів у середовищі Transvalor Thercast. Визначений розподіл критерію Ніуама за об'ємом виливки циліндричної заготовки дозволив проаналізувати параметри форми виливки та встановити залежність швидкості наповнення форми та наявності неметалевих домішок від режиму охолодження сплаву 38ХН3МФА.

Встановлено, що градієнт температури, який представляє різницю між температурою точки в матеріалі та температурою сусідніх областей, дозволяє оцінити початок переходу до стану кристалізації за критерієм оцінки ризику утворення мікропористості в заданій точці виливки. Зміни елементного складу сплаву враховуються на рівні температур переходу у рідку фазу кожного металу. Область значень ризику виникнення дефектів виливки за

критерієм Ніуама варто розраховувати індивідуально для кожної групи сплавів (табл.1).

Таблиця 1 – Значення критерію Ніуама для різних груп сплавів

Сплави	Критичне значення критерію Ніуама, нижче якого існує ризик мікропористості	Критичне значення критерію Ніуама, нижче якого існує ризик мікропористості в THERCAST
Сталі	1	1
Чавун	0.75	1.333
Алюміній	0.3	3.33
Мідна основа	1.3	0.77

Таким чином, прогнозування якості виробів на основі металевих сплавів доцільно виконувати із використанням методу скінчених елементів, зокрема із використанням пакету Transvalor Thercast. Результатом багатоітераційного моделювання є науково обгрунтований вибір елементного складу металевих сплавів та режимів охолодження розплаву.

1. *Niyama E., Uchida T., Morikawa M., Saito, S.A.* Method of shrinkage prediction and its application to steel casting practice // AFS Int. Cast Met. J. – 1982. – 7, No. 3. – P. 52–63.
2. *Ou S., Carlson K. D., Beckermann C.* Feeding and risering of high-alloy steel castings // Metall. Trans. B. – 2005. – 36. – P. 97–116.
3. *Hardin R.A., Ou S., Carlson K., Beckermann C.* Relationship between Niyama criterion and radiographic testing in steel casting // AFS Trans. – 2000. – 108. – P. 53–62.

RESEARCH OF THE INTERNAL IMPERFECTIONS FORMATION PROCESS DURING CASTINGS BY MEANS OF NIYAMA METHOD

The study examines the technological process of casting metal alloys, which involves complex interphase transformations and the formation of defects such as internal porosity, shrinkage cavities, hot cracks, and residual stresses. Special attention is given to the formation of internal pores, which significantly reduce the mechanical strength of the final product, and the use of the Niyama method for numerically predicting areas of gas pore accumulation during solidification.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ДЕГРАДАЦІЇ МАТЕРІАЛУ НА ЗАЛИШКОВУ ДОВГОВІЧНІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ДОВГОТРИВАЛОЇ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Олександр Андрейків¹, Ірина Долінська², Святослав Настасяк³, Микола Любчак⁴

^{1,3}Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, ¹andreykiv@ipm.lviv.ua,
³svyatikna@gmail.com,

^{2,4}Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів, ²ira.dolinska@ukr.net,
⁴mykola.liubchak@gmail.com

Як показує експлуатаційна практика, під час діагностування відповідального устаткування часто виявляють дефекти типу мікро- і макротріщин, які зароджуються внаслідок дії силових та фізико-хімічних чинників. Поряд із силовим чинником на швидкість поширення тріщин впливає деградація матеріалу (зміна стану матеріалу), зокрема воднева [1], яка проходить внаслідок дифузії водню на поверхню металу. Як приклад, внаслідок деградації матеріалу відбувся вибух газопроводу в США в місті Аллентаун (2011 р.), в результаті якого загинуло 5 людей. Для уникнення таких аварійних ситуацій виникає потреба в застосуванні розрахункових моделей і методів для оцінювання залишкової довговічності елементів конструкцій із урахуванням дефектів та кінетики деградації їх матеріалів.

Дана робота якраз і присвячена створенню теорії деградації металевих матеріалів в умовах довготривалої дії воденьовмісних і корозивних середовищ, і на цій основі розробленню розрахункових моделей для визначення залишкової довговічності елементів конструкцій з урахуванням впливу цих чинників. Математичні моделі – це диференціальні рівняння з початковою і кінцевою умовами, які описують ріст тріщин і враховують параметри деградації матеріалу. Разом з тим, сюди входять математичні моделі опису падіння з часом характеристик міцності і втоми матеріалів, що кількісно оцінює їх деградацію в експлуатаційних умовах. На основі цих моделей розроблено методи для оцінювання впливу експлуатаційної деградації на залишкову довговічність труб нафтопроводів.

1. *Андрейків О.С., Гембара О.В.* Механіка руйнування та довговічність металевих матеріалів у водневмісних середовищах. – Київ: Наукова думка, 2008. – 346 с.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE EFFECT OF MATERIAL DEGRADATION ON THE RESIDUAL DURABILITY OF STRUCTURAL ELEMENTS OF LONG-TERM OPERATION

The theory of degradation of metal materials under conditions of long-term exposure to hydrogen-containing and corrosive environments is developed, and on this basis, calculation models are developed to determine the residual durability of structural elements taking into account the influence of these factors.

СТИСКАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО НАПІВОБМЕЖЕНОГО ТІЛА ЗА РІЗНИХ УМОВ З'ЄДНАННЯ ЙОГО КОМПОНЕНТІВ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ТРИЩИНИ

Олександр Кіпніс

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, a.l.kipnis@gmail.com

У рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості де формівних твердих тіл [3] досліджено задачу плоскої деформації про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла вздовж тріщини, яка розташована на прямолинійній межі поділу двох різних середовищ. Досліджено випадки, коли компоненти тіла жорстко з'єднані між собою та коли проковзують одне відносно одного без тертя [1]. Вихідні задачі, сформульовані для потенціальних гармонічних функцій зведені, відповідно, до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду та рівняння Фредгольма першого роду, які досліджено чисельно з використанням методу Бубнова – Гальоркіна. Вивчено залежності значень критичного відносного укорочення вздовж лінії поділу середовищ та критичного навантаження від відносної (віднесеної до довжини тріщини) товщини шару покриття та від фізико-механічних характеристик матеріалів.

1. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. – К.: «ЛИТЕРА», 2008. – Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.; Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
2. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.

COMPRESSION OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS SEMI-BOUNDED BODY UNDER DIFFERENT CONDITIONS OF CONNECTION OF ITS COMPONENTS ALONG AN INTERFACE CRACK

Using the relations of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies, a plane static problem of compression of a semi-bounded body (base) with a coating layer along a near-surface crack located on the rectilinear interface is studied. Cases were investigated when body components are rigidly connected and when they slide against to each other without friction. The piecewise homogeneous body model is applied. For the case when the roots of the corresponding characteristic equations are equal for both materials, the critical values of the load parameters are determined and their dependence on the mechanical characteristics of the materials and the geometrical parameters of the problem is analyzed.

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ МІЖФАЗНОГО ВІДШАРОВАНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Володимир Острик

Інститут прикладної фізики НАН України, м. Суми, v.i.ostryk@gmail.com

Контактну задачу для відшарованого тонкого жорсткого включення в однорідному середовищі вивчено в роботі [1]. З одного боку включення ідеально з'єднане з матрицею, з іншого – від'єднане та гладко контактує з нею в околах своїх кінців. Цю задачу узагальнюємо на випадок міжфазного включення з урахуванням сил тертя в областях контакту [3]. Відповідну задачу для напівнескінченного включення розв'язано в роботі [2].

Розглянемо дві пружні півплощини: верхню $y \geq 0$ і нижню $y \leq 0$ з моду-

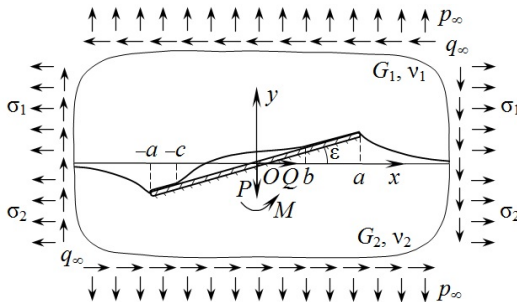


Рис. 1

$y = +0$ – відшарована від верхньої півплощини. Тобто між включенням і верхньою півплощиною утворилася тріщина $-a < x < a$, $y = \pm 0$. До включення у точці $x = 0$, $y = 0$ прикладено зосереджені нормальну P і дотичну Q сили та момент M , а на нескінченності задано нормальні та дотичні напруження $\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = p_\infty$, $\tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} = -q_\infty$, $\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^\infty$, $\sigma_x^{(2)} = \sigma_x^\infty$ (рис. 1). За таких умов включення повертається на деякий кут ε . При цьому припускаємо, що на нескінченності повороту межі півплощин не відбувається. Вважаємо, що поблизу вершин тріщини її береги контактують в областях $b \leq x < a$, $-a < x \leq -c$ невідомих розмірів $l_1 = a - b$, $l_2 = a - c$, де нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона.

Із застосуванням методу Вінера – Гопфа розв'язок системи інтегральних рівнянь задачі отримано в рядах. Знайдено розміри областей контакту берегів тріщини, розподіли напружень в областях контакту, на межі поділу півплощин поза тріщиною та в місці з'єднання включення з півплощиною, асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі кінця включення.

У таблиці у випадку ненавантаженого включення ($P = 0, Q = 0, M = 0$) і $\sigma_2^\infty = 0$ ($(1 - \nu_1)\sigma_1^\infty / G_1 = (\nu_1 / G_1 - \nu_2 / G_2)p_\infty$) для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, G_2 / G_1 = 2$, коефіцієнта тертя $\mu_0 = 0$ (верхні значення) та $\mu_0 = 0.5$ (нижні значення) і різного відношення $q = q_\infty / p_\infty$ заданих на нескінченності напружень наведено відносний розмір $\bar{l}_1 = l_1 / (2a)$ більшої із областей контакту (для меншої області $\bar{l}_2 = l_2 / (2a) \ll 1$), нормалізований кут повороту включення $\bar{\varepsilon} = 2G_1 \varepsilon / \sqrt{p_\infty^2 + q_\infty^2}$ і безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень $\bar{K}_I = K_I(a) a^{-\rho} / \sqrt{p_\infty^2 + q_\infty^2}, \bar{K}_{II} = K_{II}(a) a^{-\rho} / \sqrt{p_\infty^2 + q_\infty^2}$, де ρ – показник головної особливості напружень. Інтенсивність зсувних напружень, перевищує інтенсивність розтягувальних напружень у 3–4 рази.

Таблиця

q	0	1	2	5	10	∞
\bar{l}_1	$4.42 \cdot 10^{-10}$ $5.01 \cdot 10^{-10}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$ $1.20 \cdot 10^{-5}$	$4.80 \cdot 10^{-4}$ $5.44 \cdot 10^{-4}$	0.017 0.019	0.072 0.080	0.265 0.290
$-\bar{\varepsilon}$	0 0	0.1084 0.1084	0.1373 0.1372	0.1527 0.1522	0.1586 0.1575	0.1681 0.1661
\bar{K}_I	0.1952 0.4940	0.2143 0.3901	0.2061 0.3314	0.1938 0.2797	0.1891 0.2622	0.1848 0.2468
$-\bar{K}_{II}$	0.7545 1.5663	0.8287 1.2367	0.7970 1.0507	0.7492 0.8866	0.7309 0.8314	0.7145 0.7823

1. Антипов Ю.А. Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, вып. 4. – С. 669-680.
2. Острык В.І. Контактна задача для міжфазного відшарованого напівнескінченного включення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 3-4. – С. 160-177.
3. Ostryk V.I. Contact problem for interfacial exfoliated inclusion // Acta Mechanica. – 2024. – <https://doi.org/10.1007/s00707-024-04004-y>.

CONTACT PROBLEM FOR INTERFACIAL EXFOLIATED INCLUSION

The equilibrium of two rigidly connected elastic half-planes made of different materials, with a thin rigid inclusion placed on the border of their separation, is considered. One side of the inclusion is connected to one of the half-planes, and the other is exfoliated with the formation of a crack. The frictional contact of the crack faces near its tips is taken into account. Using the Wiener–Hopf method, the solution of the system of integral equations of the problem is obtained in series. The dimensions of the areas of contact of the crack faces, stress distributions in the areas of contact, at the boundary of the separation of the half-planes outside the crack and at the junction of the inclusion with the half-plane, asymptotic distributions of stresses and displacements in the vicinity of the end of the inclusion were found.

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ДИНАМІЧНОГО СТАНУ ЗА НАЯВНОСТІ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ СИСТЕМИ ТОНКИХ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Всеволод Попов, Ольга Кирилова

Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса

Розглядається пружне ізотропне тіло, що знаходиться у стані плоскої деформації та містить N тонких жорстких смугових включень. Ці включення в координатній площині Oxy розміщуються на відрізках

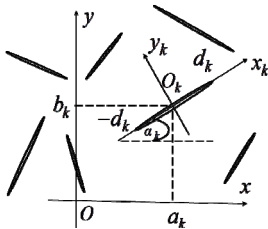


Рис.1

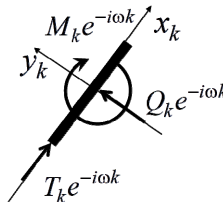


Рис. 2

довжиною $2d_k$ з центрами у точках $O_k(a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$ (Рис.1).

Включення знаходяться під дією нормальних і зсувних сил $Q_k e^{-i\omega t}$, $T_k e^{-i\omega t}$, а також моментів $M_k e^{-i\omega t}$ (Рис.2).

Нехай $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – переміщення, викликані рухом включень. За умов плоскої деформації, вони мають задовольняти наступним рівнянням руху:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta u &= -\rho \omega^2 u, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta v &= -\rho \omega^2 v. \end{aligned} \quad (1)$$

В рівняннях (1) і далі часовий множник $e^{-i\omega t}$ відкинуто.

Для формулювання умов на включеннях з кожним з них пов'язано локальну систему координат $O_k x_k y_k$ (Рис.1) і з огляду на малу товщину включень, граничні умови формулюються на серединній поверхні включень $y_k = 0$. Нехай $u^k(x_k, y_k)$, $v^k(x_k, y_k)$, $\sigma_x^k(x_k, y_k)$, $\sigma_y^k(x_k, y_k)$, $\tau_{yx}^k(x_k, y_k)$ – переміщення і напруження у системі $O_k x_k y_k$. Тоді за умов повного зчеплення включення з зовнішнім середовищем мають виконуватись рівності

$$v^k(x_k, 0) = h_{1k} + \beta_k x_k, u^k(x_k, 0) = h_{2k}, -d_k < x_k < d_k, k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Окрім того, наявність включень спричиняє розриви напружень, стрибки яких позначено

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^k(x_k, +0) - \sigma_{yy}^k(x_k, -0) &= \chi_{1k}(y), \\ \tau_{yx}^k(x_k, +0) - \tau_{yx}^k(x_k, -0) &= \chi_{1k}(y), \\ -d_k < x < d_k; k &= 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (3)$$

Невідомі амплітуди коливань руху включень визначаються з рівняння руху, які при гармонічному коливанні мають вигляд

$$\begin{aligned}-\omega^2 h_{1k} m_k &= \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta + Q_k, \quad -\omega^2 h_{2k} m_k = \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{2k}(\eta) d\eta + T_k, \\ -\frac{4}{3} \omega^2 d_k^2 \beta_k m_k &= \int_{-d_k}^{d_k} \eta \chi_{1k}(\eta) d\eta + M_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}$$

де m_k – маса включення.

Метод розв'язання ґрунтується на використанні розривних розв'язків рівнянь (1) зі стрибками (3) [2]. В результаті вихідна задача приводиться до визначення невідомих стрибків (3) з системи $2N$ інтегральних рівнянь. Щоб уникнути необхідності розв'язання цієї системи великої розмірності, пропонується ітераційний метод аналогічно до [1]. Це приводить до розв'язання на кожному кроці ітерацій сукупності рівнянь для окремих включень.

Розглянуті приклади показують добру узгодженість з результатами, отриманими іншими методами та демонструють стійкість і збіжність цього методу і у випадку систем щільно розміщених включень.

1. Попов В.Г., Кирилова О.І. Ітераційний метод визначення напруженого стану при дії хвилями на систему тріщин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – 66, № 1-2. – С. 178-187.
2. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // МТТ.– 1995. – № 4. – С. 99–109.

THE ITERATIVE METHOD OF DETERMINATION TWO DIMENSION STRESS STATE IN THE PRESENCE SYSTEM OF THIN RIGID INCLUSIONS IN AN ELASTIC BODY

The problem of determining dynamic stress state in elastic body with system thin rigid inclusions has been solved. The initial problem is reduced to the system of integral equations with logarithmic singularity. The iterative method of solving this system is proposed in which zero approximation is the solution of equations for a single inclusion.

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОЇ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ ПОВЕРХНЕВОЇ ВІЙМКИ ТА НЕЛІНІЙНОГО ВІНКЛЕРІВСЬКОГО ШАРУ

Igor Prokopiшин¹, Христина Середницька²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹ihor84@gmail.com, ²ser.kristina@gmail.com

На контактну взаємодію тіл суттєвий вплив мають поверхневі виїмки і тонкі шари, які виникають під час експлуатації чи внаслідок технологічної обробки. Ефективним підходом до розв'язування задач про контактну взаємодію тіл з поверхневими неоднорідностями є застосування методів декомпозиції області, за допомогою яких розв'язування задач математичної фізики у складних багатокомпонентних областях зводяться до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях. Тут за допомогою методу декомпозиції області [1, 2] і скінченноелементних апроксимацій досліджено плоску задачу про термопружний контакт двох скінченних пружних тіл за наявності поверхневої виїмки і нелінійного вінклерівського шару. Між тілами виконуються умови одностороннього механічного контакту через вінклерівський шар з урахуванням виїмки та умови неідеального теплового контакту. Теплообмін між тілами залежить від нормальних контактних напружень, висоти утвореного зазору та механічних і теплових параметрів вінклерівського шару. Вивчено вплив висоти, модуля Юнга і коефіцієнта теплопровідності вінклерівського шару, максимальної висоти виїмки, а також величини температури, заданої на частині поверхні одного з тіл, на розподіл контактних напружень та стрибок температури на лінії контакту.

1. *Прокопишин І. І.* Алгоритми декомпозиції області для задач про термомеханічний контакт багатьох пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вип. 26. – С. 63-82.
2. *Прокопишин І. І.* Термомеханічний контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 62, № 4. – С. 141-161.

NUMERICAL ANALYSIS OF THERMOELASTIC CONTACT INTERACTION BETWEEN BODIES WITH SURFACE GROOVE AND NONLINEAR WINKLER LAYER

Using the domain decomposition method and the finite element approximations we investigate the plane problem of imperfect thermoelastic contact between two finite elastic bodies with a surface groove and a nonlinear Winkler surface layer. For this problem we analyse the influence of the height, Young's modulus, and the heat conduction coefficient of the Winkler layer, as well as the maximal height of the groove and the boundary temperature on the distributions of contact stress and contact temperatures.

РУЙНУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ПРИ СТИСКАННІ ВЗДОВЖ ТРІЩИНИ, НЕ РОЗТАШОВАНОЇ НА МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

В'ячеслав Богданов, Володимир Назаренко, Олександр Кіпніс

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, a.l.kipnis@gmail.com

В рамках плоскої деформації досліджено лінеаризовану задачу про стискання кусково-однорідного тіла з вільною межею, яке утворене в результаті жорсткого з'єднання напівобмеженої основи та шару покриття, вздовж тріщини розташованої в матеріалі основи паралельно до прямолінійної межі поділу середовищ. З використанням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл [2] для випадку, коли матеріали покриття і основи описуються пружними потенціалами для яких реалізується випадок рівних коренів характеристичних рівнянь, вихідну граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій [1] зведено до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповненої додатковою умовою. Числове дослідження системи інтегральних рівнянь проведено з використанням методу Бубнова – Гальоркіна; результати подані для випадку, коли матеріали тіла описуються пружним потенціалом гармонічного типу [3].

1. Bogdanov V., Guz A., Nazarenko V. Fracture of Materials Loaded Along Cracks: Approach and Results. In: Guz A.N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V.M. (eds.) Advances in Mechanics. - Advanced Structured Materials, Vol 191. Cham: Springer, 2023. – P. 51–89.
2. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.
3. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Common. Pure and Appl. Math. – 1960. – 13, No. 2. – P. 239–296.

FRACTURE OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS HALF-PLANE UNDER COMPRESSION ALONG A CRACK NOT LOCATED AT THE INTERFACE

Within the framework of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies, a 2-D static problem on compression of a semi-bounded body (base) with a thin coating layer along a crack located in the base material parallel to a rectilinear interface between two different materials is investigated. An analytical-numerical approach is proposed that allows one to reduce the original boundary value problem formulated in terms of potential harmonic functions to an eigenvalue problem for a system of Fredholm integral equations of the first kind and an additional condition, obtained in a general form for a wide class of combinations of two different materials. For compressible materials with a harmonic potential, critical values of the load parameter are found and their dependence on the geometric and physical-mechanical parameters of the problem is analyzed.

КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРІЩИНИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Михайло Саврук, Володимир Кравець, Любов Онишко, Олексій Кваснюк

Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, м. Львів
vlad@ipm.lviv.ua , onyszko@ukr.net , aleksey.kvasniyk@gmail.com

Розв'язано антиплоску задачу теорії пружності для анізотропного тіла (матриці) з гладкими анізотропними включеннями та криволінійними тріщинами. Для одного включення та тріщини побудовані сингулярні інтегральні рівняння (СІР) розв'язано числово методом механічних квадратур. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для довільно розташованої параболічної тріщини в ортотропній матриці з ортотропним еліптичним включенням. Проаналізовано вплив на КІН геометричних параметрів задачі та пружних сталих матеріалів матриці й включення.

Нехай у нескінченному анізотропному тілі S_0 , яке віднесено до декартової системи координат $xOyz$, містяться тунельні вздовж осі Oz анізотропні включення S_j ($j = \overline{1, J}$), обмежені в площині xOy гладкими замкненими контурами L_j та криволінійні тріщини по розімкнених контурах L_j ($j = \overline{J+1, J+N}$). Кусково-однорідне тіло $S = \bigcup S_j$ ($j = \overline{0, J}$) навантажене на нескінченності напруженням поздовжнього зсуву $\tau_{yz}^\infty = \tau$, $\tau_{xz}^\infty = 0$.

За переходу через контури включень L_j напруження $\tau_{nz}(t)$ неперервні, а переміщення $w(x, y)$ зазнають розривів

$$\tau_{nz}^+(t) - \tau_{nz}^-(t) = 0; \quad w^+(t) - w^-(t) = g_j^*(t), \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J}. \quad (1)$$

На берегах тріщин задані самозрівноважені напруження

$$\tau_{nz}^\pm(t) = \tau_j^*(t), \quad t \in L_j, \quad j = \overline{J+1, J+N}, \quad (3)$$

а при обході кожного контуру тріщини виконуються умови однозначності переміщень [1, 2]. Тут верхній індекс «+» («-») вказує на граничні значення відповідних величин за підходу до контурів L_j зліва (справа). Крайові умови (1, 2) задоволено через граничні значення комплексних потенціалів (КП) напружень [2] за використання формул Сохоцького-Племеля для інтегралів типу Коші. Задачу зведено до систем дійсних СІР другого роду для визначення $2J+N$ дійсних невідомих функцій – густин КП напружень

$$\phi_3^j(s_j) = \phi_3^j(t_3^j) dt_3^j / ds_j \quad (j = \overline{1, J}), \quad \phi'_{3k}(s_k) = \phi'_{3k}(t_{3k}) dt_{3k} / ds_k, \quad (k = \overline{J+1, J+N}).$$

Для одного анізотропного включення ($J=1$) та однієї тріщини ($N=1$) у матриці побудовану систему СІР розв'язано чисельно методом квадратур [2]. Визначено відносні КІН $F_{III}^{\pm} = K_{III}^{\pm} / \tau \sqrt{\pi l}$ у вершинах A (штрихові) та B (суцільні лінії) параболічної тріщини в ортотропній матриці з відносно жорстким ($a_{01} \equiv \sqrt{G_{13}^1 G_{23}^1 / G_{13}^0 G_{23}^0} = 10$) (рис. 1) та податливим ($a_{01} = 0.1$) (рис. 2) еліптичним включенням ($b/a = 2$) залежно від параметра h/a (схема рис. 2). Тут $G_{13}^0, G_{23}^0; G_{13}^1, G_{23}^1$ – модулі зсуву ортотропних матеріалів матриці та включення відповідно. Криві відповідають різним відносним центральним прогинам контуру параболічної тріщини ($l = a, \delta/l = 0; 1; 3; 5$).

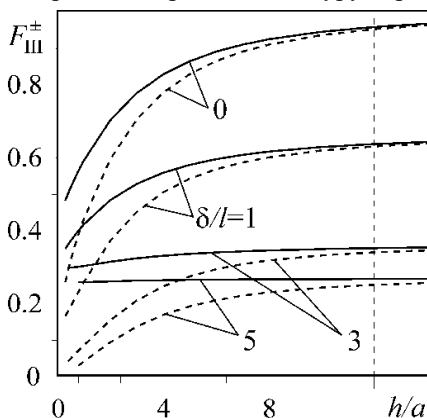


Рис. 1.

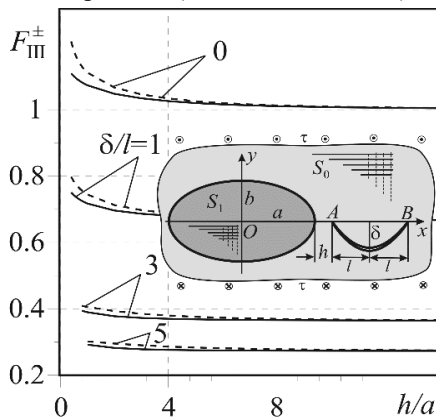


Рис. 2.

За заданого розміщення тріщини найбільші КІН спостерігаємо для прямолінійної тріщини ($\delta/l = 0$), а на поведінку кривих суттєво впливає відносна жорсткість на зсув матеріалу включення (a_{01}) відносно матриці. Для відносно жорсткого включення маємо підкріпний ефект для матриці (зменшення КІН) за наближення тріщини до включення (рис. 1).

1. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами // Изв. АН СССР, МТТ. – 1980. – № 4. – С. 103–110.
2. Savruk M. P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.

STRESS INTENSITY FACTORS FOR A CURVILINEAR CRACK IN A PIECE-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC BODY UNDER ANTI-PLANE DEFORMATION

The antiplane problem of the theory of elasticity for an anisotropic body with anisotropic inclusions and curvilinear cracks was solved. For one inclusion and a crack, constructed singular integral equations were solved numerically by the quadrature method. Stress intensity factors for an arbitrarily located parabolic crack in an orthotropic body with an elliptical inclusion were determined.

МОДЕЛЬ ПОВОРОТУ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У КВАЗІКРИХКІЙ МАТЕРІАЛ БІМАТЕРІАЛЬНОГО ТІЛА У КУТОВІЙ ТОЧЦІ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

Ольга Богданова¹, Михайло Дудик², Анатолій Камінський¹, Юлія Решітник²

¹Інститут механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, o.bogdanova@i.ua, dfm11@ukr.net,

²Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань, dudik_m@hotmail.com, dikhtiareno_iu@udpu.edu.ua

В умовах плоскої деформації розглядається початковий етап повороту міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, який полягає в утворенні маломасштабної зони передруйнування у менш тріщиностійкому матеріалі з квазікрихким характером руйнування. Зона передруйнування моделюється лінією розриву переміщення довжини l (рис. 1), на якій виконується квадратичний критерій міцності типу Мізеса – Хілла $(\sigma_\theta / \sigma_1)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_1)^2 = 1$ з граничними значеннями σ_1 нормального і τ_1 дотичного напружень у квазікрихкому матеріалі в якості критеріальних параметрів. Зовнішнє навантаження враховується шляхом формулювання умови на нескінченності у формі вимоги зшивання шуканого розв'язку з асимптотикою відомого розв'язку аналогічної задачі без зони передруйнування [1, 2].

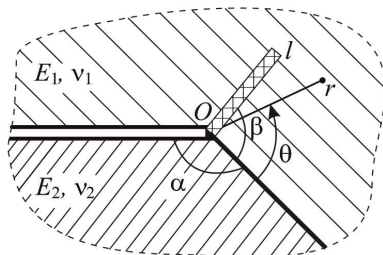


Рис. 1

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задачу про розрахунок параметрів зони передруйнування зведено до векторного функціонального рівняння відносно трансформант компонентів напружень і градієнтів переміщень. Для його розв'язання використано наближений метод [3], який базується на поетапному розщепленні вихідного рівняння на пару незалежних скалярних функціональних рівнянь, що розв'язуються за допомогою методу Вінера – Гопфа. Розщеплення векторного рівняння у нульовому наближенні здійснено завдяки нехтуванню недіагональними елементами його матричного коефіцієнта. Отриманий на цьому етапі розв'я-

зок використовувався у наступному наближенні шляхом заміни шуканих функцій при недиагональних компонентах матричного коефіцієнта вихідного рівняння, що також приводило до пари скалярних функціональних рівнянь з доступним подальшим розв'язанням.

Зі знайденого наближеного розв'язку функціонального рівняння задачі виведено замкнуту систему трансцендентних рівнянь і співвідношень для розрахунку довжини зони, фазового кута навантаження і величини дисипації енергії в зоні. З умови максимуму величини дисипації енергії визначався кут нахилу зони відносно межі розділу матеріалів.

Отримано вирази для швидкості вивільнення енергії в зоні та розкриття тріщини в її вершині, які забезпечують застосування енергетичного або деформаційного критеріїв оцінки граничних навантажень, що передують зрушенню тріщини у напрямку, визначеному орієнтацією зони передруйнування в момент зрушення. Здійснено числовий аналіз залежності параметрів зони передруйнування від величини навантаження, механічних характеристик з'єднаних матеріалів та кута зламу межі розділу матеріалів. Виявлено суттєвий вплив на досліджувані параметри фазового кута зовнішнього навантаження і відношення опору відриву до опору зсуву матеріалу, в якому розвивається зона передруйнування. Встановлено існування стрімкого переходу матеріалу від крихкого механізму руйнування до пластичного при зміні відношення опорів відриву і зсуву у достатньо вузькому інтервалі його значень. Підтверджено узгодженість розвинутої моделі з моделями зон передруйнування у матеріалах з пластичним [1] та крихким [2] характером руйнування для граничних випадків $\sigma_1 \gg \tau_1$ і $\sigma_1 \ll \tau_1$ відповідно.

1. *Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V.* Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint // J. Math. Sci. – 2014. – **201**, №1. – P. 83-98.
2. *Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V.* Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media // Mater. Sci. – 2012. – **47**, № 5. – P. 627-635.
3. *Kaminsky A., Dudyk M., Reshitnyk Yu., Chornoivan Yu.* An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials // Int. J. Solids Struct. – 2023. – **267**. – 112117.

MODEL OF INTERFACE CRACK KINKING INTO A QUASI-BRITTLE MATERIAL OF A BI-MATERIAL BODY AT THE CORNER POINT OF A BROKEN INTERFACE

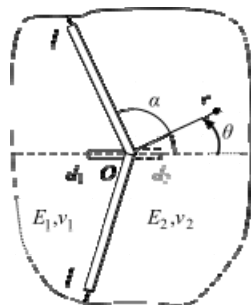
A mathematical model of the process zone, which under plane strain conditions is formed in a material with a quasi-brittle fracture mechanism near the tip of an interfacial crack at the corner point of a broken interface, has been developed. The process zone is modeled by the displacement discontinuity line, on which the Mises–Hill strength condition is satisfied. The equation for calculating the length and orientation of the process zone, the phase angle of stresses and the amount of energy dissipation in the zone is derived.

МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ КУТОВОЇ ТОЧКИ МІЖФАЗНОЇ ЗСУВНОЇ ТРІЩИНИ

Михайло Дудик¹, Тетяна Поліщук²

¹Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань, ¹dudik_m@hotmail.com, ²polischuk_t@ukr.net

В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування біля куткової точки ламаної межі поділу двох різних пружних ізотропних матеріалів. По обидві сторони від точки зламу на прилеглий до неї частині межі поділу передбачається наявність міжфазної зсувної тріщини з берегами, контактуючими без тертя. В припущенні дії симетричного навантаження зона передруйнування поширюється в одному з матеріалів композитного з'єднання з вершини кута зламу вздовж його бісектриси (рис.). Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору матеріалу відриву. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задачу про розрахунок параметрів зони передруйнування зведено до функціонального рівняння відносно трансформант нормального напруження і градієнта нормального переміщення, яке розв'язано засобами методу Вінера – Гопфа. З отриманого розв'язку виведено аналітичні вирази для розрахунку довжини зони передруйнування і швидкості вивільнення енергії в ній. Здійснено числовий аналіз параметрів зони передруйнування. Сформульовано умови зародження в зоні передруйнування тріщини нормального відриву як відгалуження початкової міжфазної тріщини.



MODEL OF THE PROCESS ZONE NEAR THE CORNER POINT OF AN INTERFACIAL SHEAR CRACK

Under the conditions of plane deformation, the problem of calculating the parameters of the small-scale process zone near the corner point of the broken interface of two different elastic isotropic materials is considered. On the part of the interface adjacent to the corner point, the presence of an interfacial crack with frictionless contacting faces is assumed. Analytical expressions were obtained for calculating the length of the process zone and the rate of energy release in it. A numerical analysis of the parameters of the process zone was carried out. The conditions for the transformation of the process zone into a tensile crack are formulated.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО КОНТАКТУ СКЛАДОВИХ

Ярослав Пастернак¹, Георгій Сулим²

¹Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua,

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, gtsulym@gmail.com

Під час вивчення взаємодії фізико-механічних полів у композитних тілах постає проблема врахування тонких з'єднувальних прошарків, що поєднують їхні складові [1]. Останні виникають, наприклад, при застосуванні клеїв чи внаслідок дифузії складових через поверхню контакту. До цього часу, зазвичай, досліджували лише вплив неідеальності теплового контакту складових [1] за припущення ідеальності контакту магнітоелектромеханічного. Натомість при вивченні конструкцій зі смарт-матеріалів реальна неідеальність електромеханічного контакту складових може у біматеріальному тілі зумовити істотні впливи на розподіл фізико-механічних полів.

У цьому дослідженні ускладнені умови теплового контакту складових біматеріалу записані у формі Капіци, а для моделювання механічної взаємодії між складовими використано модель основи Вінклера. Вважалось теж, що електричне та магнітне поля на межі поділу матеріалів мають розриви за моделлю напівпроникної тріщини. Із використанням розширеного формалізму Стро, інтегральних формул Коші та співвідношення Племелі побудовано інтегральні рівняння термомагнітоелектропружності для кожної зі складових біматеріального тіла. Враховуючи умови контакту, виключено інтеграли уздовж безмежної межі поділу матеріалів із інтегральних рівнянь, що дало можливість уникнути в отриманих сингулярних інтегральних рівняннях невласливих інтегралів, врахувати вплив міжфазного прошарку у їхніх ядрах та, як наслідок, істотно спростити їхнє розв'язування. Отримані при побудові рівнянь фундаментальні розв'язки сформульованої задачі термомагнітоелектропружності для біматеріалу для суто термопружного випадку збігаються із відповідними, отриманими іншими методами.

1. *Sulym H, Vasylyshyn A., Pasternak Ia.* Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagneto-electroelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion // *Acta Mechanica et Automatica* – 2022. – No. 3. – P. 242–249.

2D INTEGRAL EQUATIONS OF THERMOMAGNETOELECTROELASTICITY PROBLEMS FOR BIMATERIAL SOLIDS WITH IMPERFECT NONCOHERENT INTERFACE

This study utilizes Stroh formalism and complex variable calculus to obtain boundary integral equations for bimaterials with imperfect Kapitza-type noncoherent interface.

TORSIONAL CRACK HEALING IN A NONHOMOGENEOUS CYLINDER

Victor Sylovanyuk, Maksym Filipov

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv
vsylovanyuk@gmail.com, maksym.filipov@gmail.com

Three-dimensional problems of crack theory for nonhomogeneous materials are associated with significant mathematical difficulties. For a number of nonhomogeneous materials, the inhomogeneity can be adequately expressed by some coordinate function for one of the elastic moduli, for example, the shear modulus, while the Poisson's ratio can remain constant. This assumption makes it possible to simplify the mathematical model.

Suppose that an isotropic continuously nonhomogeneous cylinder of radius R contains a plane circular crack of radius a . Let us place the coordinate system (r, θ, z) so that the crack occupies the area $z = 0$, $0 \leq r \leq a$.

We will assume that the shear modulus μ is a function of the radial coordinate of the following form:

$$\mu(r) = \mu_0 r^m, \quad m \geq 0, \quad \mu_0 = \text{const} \quad (1)$$

Suppose the cylinder is twisted so that the deformations are uniform along lines parallel to the z -axis and only the displacements u_0 are non-zero. Then the stress field is defined by the relations

$$\tau_{0z} = \mu \frac{\partial u_0}{\partial z}, \quad \tau_{0r} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_0}{r} \right) \quad (2)$$

The equation of equilibrium of the body in this case is as follows:

$$\frac{\partial \tau_{r0}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z0}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r0}}{r} = 0, \quad (3)$$

or in displacements

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + (1+m) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_0}{r} \right) = 0. \quad (4)$$

To strengthen the body, the crack was filled with an injected material that, after polymerization or crystallization, forms strong adhesive bonds with the cylinder material. Let us determine the effectiveness of this kind of strengthening technology. The conditions of contact of the formed elastic layer with the base material under torsion will be presented in accordance with the Winkler-type shear hypothesis.

If the crack dimensions are small compared to the cylinder diameter ($R \gg a$), then, given the symmetry of the problem with respect to the plane $z = 0$, it is sufficient to consider the equilibrium of the half-space $z \geq 0$ with boundary conditions

$$\tau_{z_0}(r, 0) = \tau(r) + u_0(r)\mu_* / h(r), 0 \leq r \leq a; \quad u_0(r, 0) = 0, \quad r > a. \quad (5)$$

Here, μ_* is the shear modulus of the crack filler material; $2h(r)$ is the thickness of the layer; $\tau(r)$ is a function describing the distribution of shear stresses on the crack surface. The solution of Equation (4) for the half-space $z \geq 0$ using the Hankel integral transform can be obtained as

$$u_0(r, z) = \frac{1}{r^{m/2}} \int_0^\infty A(\xi) \exp(-\xi z) J_{1+m/2}(r\xi) d\xi, \quad (6)$$

where J_n is a Bessel function of the first kind; $A(\xi)$ is an unknown function that is determined by the boundary conditions.

On the basis of (2), (5), (6), we find a system of dual integral equations:

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_{1+m/2}(r\xi) d\xi = -\frac{1}{\mu_0 r^{m/2}} \left(\tau(r) + \frac{u_0(r)\mu_*}{r^{m/2}h(r)} \right), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (7)$$

$$\int_0^\infty A(\xi) J_{1+m/2}(r\xi) d\xi = 0, \quad r > a.$$

The solution of the system of dual integral equations can be given as

$$A(\xi) = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{2\xi}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^a t^{\frac{1+m}{2}} J_{\frac{3+m}{2}}(\xi t) dt \int_0^t \frac{\rho^2}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left(\tau(\rho) + \frac{\mu_* u_0(\rho)}{h(\rho)} \right) d\rho. \quad (8)$$

The unknown displacements of the crack surfaces u_0 are determined by taking into account Eqs. (6) and (8). As a result, we obtain the Fredholm integral equations of the second kind with respect to u_0 :

$$u_0(r) + \frac{\mu_*}{r^{m/2}\mu_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^a \frac{\rho^2 u_0(\rho) d\rho}{h(\rho)} \int_\rho^a \frac{t^{-1+m/2} dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^\infty \sqrt{\xi} J_{1+m/2}(\xi r) J_{(3+m)/2}(\xi t) d\xi$$

$$= -\frac{1}{r^{m/2}\mu_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^a t^{-1+m/2} dt \int_0^t \frac{\rho^2 \tau(\rho) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^\infty \sqrt{\xi} J_{1+m/2}(\xi r) J_{(3+m)/2}(\xi t) d\xi.$$

If one of the methods for solving Fredholm's integral equations of the second kind is to establish the function u_0 , then the stress intensity factor k_3 can be calculated by the formula

$$k_3 = -\frac{2}{\pi\sqrt{a}} \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} \left(\tau(r) + \frac{\mu_* u_0(r)}{h(r)} \right) dr.$$

As can be seen, for an unfilled crack, a change in the shear modulus in the radial direction does not affect the intensity of the stress field near the top of the defect. For a healed crack, the value of k_3 depends on the variable shear modulus (1).

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ПРО МІЖФАЗНІ ВКЛЮЧЕННЯ В АНІЗОТРОПНІЙ НЕОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ

Костянтин Архипенко¹, Олександр Кривий²

^{1,2} Національний університет «Одеська Морська Академія», м. Одеса,

¹ k_arkhipenko@ukr.net, ² krivoy-odessa@ukr.net

Розглянуто задачу про міжфазні тонкі включення, розташовані на лінії з'єднання (вісь Oy) двох різних анізотропних півплощин. На берегах першого включення $L_1 = \{x = 0, y \in [-a; 0]\}$ реалізовані умови гладкого контакту, на $L_2 = \{x = 0, y \in [b; c]\}$ – повного зчеплення. На нескінченості прикладено сили, які призводять виникнення напружень на включеннях, що зводяться до результуючих сил $P^{(j)} = (P_1^{(j)}, P_2^{(j)})$, $j = 1, 2$ з моментами сил $P_0^{(j)}$, $j = 1, 2$ відносно центрів включень.

Інтегральні співвідношення [1] дозволяють задачу звести до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) відносно невідомих стрибків нормального $H_1^-(y)$, $y \in L = L_1 \cup L_2$ та дотичного $H_2^-(y)$, $y \in L_2$ напружень і стрибка дотичного переміщення $H_3^-(y)$, $y \in L_1$:

$$\begin{cases} a_{11}^k H_1^-(y) + b_{11}^k \cdot \Gamma[H_1^-](y) + \sum_{j=2}^3 b_{1j}^k \cdot \Gamma_{4-j}[H_j^-](y) = 0 \\ a_{22}^k H_{4-k}^-(y) + b_{21}^k \cdot \Gamma[H_1^-](y) + \sum_{j=2}^3 b_{2j}^k \cdot \Gamma_{4-j}[H_j^-](y) = 2l\delta_k \end{cases} \quad y \in L_k \quad (1)$$

$$\Gamma[f](y) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(t)}{t-y} dt, \quad \Gamma_j[f](y) = \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{f(t)}{t-y} dt, \quad j = 1, 2,$$

де b_{kj}, c_{kj}, l – сталі, що залежать від пружних властивостей анізотропних півплощин, а $\delta_j, j = 1, 2$ – невідомі кути повороту включень. Умови рівноваги включень завершують постановку задачі.

Використовуючи метод, застосований у роботах [2-4], системи СІР (1) зведено до систем СІР, які наведемо у матричній формі:

$$\mathbf{J}^{(k)} \cdot \mathbf{G}^{(k)}(y) + \Gamma[\mathbf{G}^{(k)}](y) + \mathbf{M}^{(k)} \Gamma[\mathbf{G}^{(3-k)}](y) = \mathbf{F}^{(k)}, \quad y \in L_k, \quad k = 1, 2 \quad (2)$$

де $\mathbf{J}^{(k)}$, $k=1,2$ – жорданові матриці, а $\mathbf{G}^{(k)}(y)$, $k=1,2$ – матриці лінійних комбінацій невідомих стрибків напружень і переміщень. Аналіз розв’язків СІР (2) дозволив встановити, що невідомі функції $\mathbf{G}^{(1)}(y)$ мають у вершинах L_1 степеневу особливість, а $\mathbf{G}^{(2)}(y)$ мають у вершинах L_2 кореневу особливість підсилену осциляцією. Останнє дозволяє шукати невідомі функції у вигляді рядів за многочленами Якобі:

$$g_j^{(k)}(t) = (1-t)^{-\gamma_j^{(k)}} (1+t)^{-1+\gamma_j^{(k)}} \sum_{n=0}^{\infty} q_{jn}^{(k)} P_n^{-\gamma_j^{(k)}, -1+\gamma_j^{(k)}}(t), \quad k, j=1,2 \quad (3)$$

Методом ортогональних многочленів системи СІР (3) зведено до нескінченної системи лінійних рівнянь відносно $q_{jn}^{(k)}$, наближений розв’язок якої отримано методом редукції. Отримано формули для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) у вершинах включень:

$$K1_1^{\pm} = \frac{\sqrt{a}}{2l} \left| \left(r_{14}^+ \cdot S_{11}^{(1)} + r_{24}^+ \cdot S_{21}^{(1)} \right) \left(\sqrt{1-\alpha_{02}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{1n}^{(1)} (0.5 \mp i\alpha_{01})_n \pm 2P_1^{(1)}}{(\pm 1)^n n!} \right) \right|, \quad (4)$$

Формули (4) дозволяють дослідити залежність узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень від прикладених зовнішніх сил, анізотропних сталей півплощин і відстані між включеннями.

1. Кривой А.Ф., Радиолло М.В. Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР, МТТ. – 1984. – С.84-92.
2. Кривий О.Ф., Архипенко К.М. Тріщина, що виходить на лінію з’єднання двох різних анізотропних півплощин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 110-116.
3. Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 6. – С.36-45.
4. Arkhypenko K., Kryvyi O. Arbitrary oriented defects in anisotropic quarter plane // Proceedings of the First ICTAEM – 2019. – 5. – P. 392–393.

MIXED PROBLEM ABOUT INTERFACE INCLUSIONS IN ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS PLANE

Has been solved the problem about the interface inclusions in anisotropic nonhomogeneous plane. The problem was reduced to the systems of SIE, the solution of which was found by the method of orthogonal polynomials. For the generalized stress intensity factors the numerical formulae were deduced. Were investigated the relations of GSIFs from the applied forces, anisotropic constants and distance between the inclusions.

МІЖФАЗНЕ КІЛЬЦЕВЕ ВКЛЮЧЕННЯ ЗА УМОВА ПОВНОГО ЗЧЕПЛЕННЯ З КУСКОВО-ОДНОРІДНИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПРОСТОРОМ

Олександр Кривий¹, Юрій Морозов²,

¹ Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса, Україна, krivoy-odessa@ukr.net

² Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса, Україна, morozovyu@gmail.com

Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область $\Omega : \{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$. На вклученні прикладене довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Напружено-деформований стан простору описується вектором

$$\mathbf{v} = \{v_k\}_{k=1,\dots,9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\}.$$

Позначимо стрибки та суми пружних характеристик при перетині площини так:

$$\chi_k^\pm(x, y) = \langle \zeta_k(x, y) \rangle^\pm = \zeta_k^+(x, y) \pm \zeta_k^-(x, y), \{\zeta_k^\pm\}^9 = \{v_k\}^9 \Big|_{z=\pm 0}, k = 1, \dots, 9$$

Враховуючи умови $\chi_k^-(x, y) = 0, k = \overline{1, 6}, (x, y) \notin \Omega$, які відображають факт з'єднання півпросторів поза включеннями, поставлену задачу зведено до системи двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків напружень $\chi_k^-(x, y), k = 1, 2, 3$ [1, 2]. Після переходу до полярних координат і застосування скінченного перетворення Фур'є, отримана систему інтегральних рівнянь відносно трансформант шуканих функцій:

$$-2q_{31} \int_a^b \mathbf{V}_n^-(\rho) \mathbf{M}_n(r, \rho) \rho d\rho = \mathbf{Q}_n(r), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_n(r, \rho) = \begin{pmatrix} -2q_{31} w_{n+1,n}(r, \rho) & -2q_{31} w_{n-1,n}(r, \rho) & 2q_{41} w_{n,n}(r, \rho) \\ q_{32}^+ w_{n+1,n+1}(r, \rho) & -q_{32}^- w_{n-1,n+1}(r, \rho) & -q_{42} w_{n,n+1}(r, \rho) \\ -q_{32}^- w_{n+1,n-1}(r, \rho) & q_{32}^+ w_{n-1,n-1}(r, \rho) & q_{42} w_{n,n-1}(r, \rho) \end{pmatrix},$$

$$w_{\mu, m}(r, \rho) \int_0^\infty J_\mu(rt) J_\nu(\rho t) dt \quad V_n^{j, -}(\rho) = \Phi_n[\chi_k^-] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi v_j^-(\rho, \varphi) e^{-i m \varphi} d\varphi, \quad j = 1, 3, 5$$

$$V_{-n}^{3, -}(\rho) = \bar{V}_n^{3, -}(\rho), \quad \bar{V}_n^{3, -}(\rho) = \Phi_n[\bar{v}_3^-].$$

До розв'язання системи (1) застосовано узагальнений метод граничних

елементів, згідно якого, розшукувані функції подано N -сплайнми

$$V_n^{k,-}(\xi) = \sum_{j=1}^N v_j^{k,-}, v_j^{k,-} = \begin{cases} \sum_{l=1}^3 C_{n,l,j}^k (\xi - a)^{-1/2-\gamma_l} & j = 1 \\ C_{n,j}^k (\xi - a)^{-1/2} & j = 2 \dots N/2 \\ C_{n,j}^k (b - \xi)^{-1/2} & j = N/2 \dots N-1 \\ \sum_{l=1}^3 C_{n,l,j}^k (b - \xi)^{-1/2-\gamma_l} & j = N \end{cases} \quad (2)$$

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^N \Delta_j, \Delta_j = [\rho_j, \rho_{j+1}], j = 0 \dots N, a \leq \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_N \leq b,$$

Підставивши (3) в систему (2) і розглядаючи отриману систему в точках $r_q, q = 1 \dots N$, які є серединами відрізків розбиття Δ_j , для визначення $C_{n,j}^k$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Отже, запропоновано і проведена апробація ефективного чисельно методу розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь, що дозволило дослідити розподіл нормальних напружень в околі міжфазного кільцевого включення, яке знаходиться в умовах повного зчеплення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі.

1. *Кривий О.Ф.* Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space. In: Materials Science iss.2, vol.3, pp.245–253 (2014).
2. *Кривий О. Ф., Морозов Ю. О.* Fundamental solutions for a piecewise-homogeneous transversely isotropic elastic space // J. Math. Sci. – 2019. – **270**, No. 1. – P. 143–156.

INTERFACIAL ANNULAR INCLUSION UNDER CONDITIONS OF FULL COUPLING WITH PIECEWISE HOMOGENEOUS TRANSVERSAL-ISOTROPIC SPACE

The problem of an interfacial annular ring absolutely rigid inclusion under conditions of full coupling with a piecewise homogeneous transversal-isotropic space is reduced to a system of three singular integral equations. An efficient numerical method for solving the obtained system is proposed. The distribution of normal stresses in the vicinity of the defect is investigated.

НАПРУЖЕННЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ З КРУГОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ І КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Олександр Пономаренко

Львівський національний університет природокористування, alexanderponomarenko54@gmail.com

Розглянуто нескінченну тонку пластину, що містить кругове включення з іншого матеріалу та круговий отвір. Приймаємо, що пластина, включення та отвір перебувають у загальному плоскому напруженому стані. Осі декартової системи координат x, y направлено вздовж осей симетрії. Задачу сформульовано в біполярних координатах α, β , які пов'язано з декартовими координатами x, y співвідношенням $x = J \operatorname{sh} \alpha$, $y = -J \sin \beta$, де $J = a / (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)$ – масштаб перетворення, a – віддаль від полюса до осі симетрії.

Задача полягає у визначенні розподілу напружень всередині і на спільній межі пластини і включення та на контурі отвору за двовісного розтягу на нескінченності пластини паралельно до x і y . Позначимо спільну межу пластини і включення $\alpha = +c$, контур отвору $\alpha = -c$. Центр включення розташуємо в точці $x = +\operatorname{arctg} c$, а отвору – $x = -\operatorname{arctg} c$.

Тоді крайові умови даної задачі подаємо для компонент напружень і зміщень наступним чином: $\sigma_\alpha = pT$, $\sigma_\beta = qT$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ – на нескінченності; $\sigma_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha$, $\tau_{\alpha\beta} = \hat{\tau}_{\alpha\beta}$, $u_\alpha = \hat{u}_\alpha$, $u_\beta = \hat{u}_\beta$ – на спільній межі пластини і включення; $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, $u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$ – на контурі отвору. Тут “шапочка” позначає величини, які відносяться до включення, а без “шапочки” – до пластини поза включенням.

Задаємо:

$$p = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \quad i \quad q = \begin{cases} 1 & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } y; \\ 0 & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } x; \\ 1 & \text{для всестороннього розтягу.} \end{cases}$$

Розглянемо функції напружень χ і $\hat{\chi}$ у формі $\chi / J = \alpha T (\chi_0 / J + \chi_1 / J)$ та $\hat{\chi} / J = \alpha T \hat{\chi}_1 / J$, в яких χ_0 / J відповідає розв'язку для суцільної нескінченної пластини без включення та отвору, і може бути записана у вигляді:

1) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y :

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\text{ch} \alpha - \cos \beta} - \text{sh} \alpha ;$$

2) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі x :

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\text{ch} \alpha - \cos \beta} ;$$

3) для випадку всестороннього розтягу:

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\text{ch} \alpha - \cos \beta} - \text{sh} \alpha .$$

Аналіз здійснено на основі функцій напружень Ері для загального плоского напруженого стану з використанням біполярних координат. Для визначення невідомих коефіцієнтів функції напружень застосовано метод збурення за параметром. Отримано розподіл максимальних напружень на спільній межі включення і пластини та на контурі отвору для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y в залежності від r/d , де r – радіус включення та отвору, d – віддаль від центру включення чи отвору до осі симетрії та залежно від співвідношень модулів пружності матеріалу пластини E та включення \hat{E} .

Результати, отримані в роботі, дають змогу теоретично визначити коефіцієнт концентрації напружень біля включень та отворів і можуть бути використані в інженерній практиці при проектуванні деталей в кораблебудуванні, авіабудуванні та машинобудуванні [1].

1. Калоеров С.А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинах / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко. Министерство образования и науки Украины – Донецкий национальный университет, 2013. – 440с.

STRESSES IN INFINITE PLATE WITH CIRCULAR INCLUSION AND CIRCULAR HOLE

An analytical solution is constructed to a problem for an infinite plate containing circular hole filled with elastic inclusion of another material and circular hole, and subjected to the uniform tension in the direction of the x and y axes. The analysis is performed on the basis of the Airy stress function in the generalized plane stress and by applying the bipolar coordinates. The perturbation method is adopted for the determination of unknown coefficients in the solution.

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ ТОНКОГО ТРИШАРОВОГО АНІЗОТРОПНОГО СТРІЧКОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Кирил Васильєв¹, Георгій Сулим²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹kirill.all@gmail.com, ²gtsulym@gmail.com

Досліджується задача поздовжнього зсуву тонкого тришарового анізотропного стрічкового включення L у анізотропному просторі зусиллями на нескінченності $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$. Вважається, що шари є однакової довжини але різної товщини. Між шарами наявний ідеальний механічний контакт та відомі компоненти тензора сталих модулів пружностей.

Запропоновану у [1] модель тонкого багатошарового включення тут поширено на випадок загальної анізотропії матеріалу простору і шарів включення. З використанням методу функцій стрибків [2] вихідну задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку для уніфікації запропоновано розв'язувати з використанням методу колокацій у припущенні про кореневу особливість у вершині неоднорідності. На прикладах дво- і тришарового включення досліджено межі застосовності такого припущення. Проаналізовано вплив компонентів тензора сталих модулів пружності шарів включення та окремих геометричних параметрів неоднорідності на її узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень.

1. Hutsaylyuk V., Piskozub Y., Piskozub L., Sulym H. Deformation and strength parameters of a composite structure with a thin multilayer ribbon-like inclusion. // Materials. – 2022. – **15**(4), 1435. – P. 1–19.
2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

LONGITUDINAL SHEAR OF A THREE-LAYER THIN ANISOTROPIC BAND INCLUSION

The model of a thin multilayer band inclusion, proposed in [1] is extended to the case of general anisotropy of the material of the space and inclusion layers. Using the method of jump functions [2], the problem is reduced to a system of singular integral equations, which is proposed to be solved using the method of collocations under the assumption of a root singularity at the tip of inhomogeneity. The limits of applicability of such an assumption were investigated on the examples of two- and three-layer inclusion. The influence of the components of modulus of elasticity and individual geometric parameters of inhomogeneity on its generalized stress intensity factors are analyzed.

ЗГИН ПОЛОГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОПЕРЕЧНИМИ ТРІЩИНОЮ ТА ЩІЛИНОЮ

Тарас Далак¹, Микола Маковійчук²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ, ¹tdalyak@gmail.com, ²makoviy@ua.fm

У рамках двовимірних теорій досліджується згин пологої ізотропної циліндричної оболонки, послабленої двома поперечними (розташованими вздовж напрямної циліндричної поверхні), наскрізними дефектами – тріщиною та щілиною однакової довжини. Під тріщиною мається на увазі математичний розріз, береги якого можуть контактувати у зоні стискаючих напружень; щілину розглядаємо як розріз з вільними від напружень поверхнями, на якому у прийнятій постановці задачі допускається від’ємний стрибок переміщень. Закриття тріщини описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в одній з лицьових поверхонь оболонки [1].

Розв’язок задачі будували за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та числового методу квадратур. За знайденими стрибками переміщень та кутів повороту нормалі обчислено коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефектів та контактне зусилля на зімкнутих берегах тріщини. Досліджено розподіл контактної реакції вздовж лінії тріщини та вплив взаємодії системи тріщина – щілина на напружено-деформований стан циліндричної оболонки залежно від її кривини та взаємного розташування дефектів.

1. *Шацький І.П.* Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 26–29.

BENDING OF A SHALLOW CYLINDRICAL SHELL WITH CIRCUMFERENTIAL CRACK AND SLOT

The problem of the interaction of two collinear defects – a closure-capable crack and a slot whose edges do not contact in the bending process of a shallow cylindrical shell is considered in the two-dimensional formulation. Crack closure is described using the contact model along a line in the facial surface of the shell. By the slot, we mean a section with stress-free surfaces, on which, in the accepted problem formulation, a negative jump of displacements in the zone of compressive stresses is allowed. The problem was solved using the method of singular integral equations and the numerical method of quadrature. The intensity factors of forces and moments in the inner and outer vertices of the crack and the slot were calculated. The distribution of the contact reaction along the crack line and the influence of the interaction of the crack-slot system on the stress-strain state of the shell depending on its curvature and the mutual location of defects were studied.

ПРО ФРИКЦІЙНУ ВЗАЄМОДІЮ ДЕФОРМІВНОГО ПОРШНЯ ЗІ СТІНКОЮ ТРУБОПРОВОДУ

Сергій Стецюк¹, Іван Шацький², Ярослав Дорошенко³, Андрій Величкович⁴

¹Український-науково-дослідний інститут природних газів, м. Харків, stetsyuk.sergey@ugv.com.ua

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, ipshatsky@gmail.com

^{3,4}Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ, yaroslav.doroshenko@nung.edu.ua, ⁴a_velychkovych@ukr.net

Для очищення промислових газопроводів від забруднень використовують очисні поршні, виготовлені із вискоеластичних матеріалів [1]. Щоби забезпечити просування поршня у штатному режимі та на звужених ділянках труби слід створити належний рушійний тиск газу у запоршневому просторі. Мета цього дослідження – встановити умови руху деформівного поршня у циліндричному каналі без зупинок.

Використовуючи попередні напрацювання [2], розроблено одновимірну квазістатичну модель для аналітичного дослідження фрикційної взаємодії рухомого деформівного стержня зі стінкою циліндричної труби за умов рівномірного радіального натягу. Нормальний контакт передбачається щільним, без інтерфейсного перетікання газу вздовж поршня. За розв'язком сформульованої контактної задачі досліджено вплив лобового опору, натягу, тертя, пружних модулів матеріалу та геометричних розмірів стержня на його напружений стан та на величину запоршневого тиску, необхідного для проходження поршнем траси без зупинок. Показано, що зростання величини кожного з перелічених чинників призводить до збільшення рушійного тиску газу.

1. Stetsiuk S., Doroshenko Y., Bondarenko R., Filipchuk O., Volovetskyi V. Investigation on the dynamics of movement of cylindrical cleaning pigs through the bends of pipeline systems for fluid transportation // Scientific Journal of Silesian University of Technology. Ser. Transport. – 2024. – 123. – P. 303–317.
2. Понадюк І.Й., Шацький І.П., Шона В.М. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.

ON FRICTIONAL INTERACTION OF DEFORMABLE PISTON WITH PIPELINE WALL

A one-dimensional quasi-static model was developed for the analytical study of the frictional interaction of a deformable rod with the wall of a cylindrical pipe under conditions of uniform radial tension. The effect of frontal resistance, tension, friction, elastic moduli of the material and geometric dimensions of the rod on its stress state and on the amount of piston pressure necessary for the piston to travel the track without stops was studied.

ПРО ЗАДАЧІ ЗГИНУ ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ ПЛАСТИН З КОНТАКТНИМИ ТРІЩИНАМИ

Іван Шацький¹, Василь Петрашук²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,
¹ipshatsky@gmail.com, ²rockeman2013@gmail.com

У двовимірній постановці розглядається проблема контактної взаємодії берегів наскрізних тріщин під час згину тонких неоднорідних по товщині пластин. На підставі гіпотези про жорстку нормаль неповне по товщині закриття тріщини інтерпретується як змикання її берегів у лицьовій поверхні пластини (модель контакту вздовж лінії [1]).

Сформульовано крайові задачі для пари бігармонічних операторів в областях з розрізами, що відповідають такій моделі. Для прямолінійного дефекта методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовано замкнутий аналітичний розв'язок.

Зокрема, у разі сталого коефіцієнта Пуассона та симетричного відносно серединної поверхні пластини розподілу модуля Юнга коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів обчислюються за формулами:

$$K_N = \frac{\kappa |m| \sqrt{l}}{1 + \kappa}, \quad K_M = \frac{m \sqrt{l}}{1 + \kappa}, \quad \kappa = \frac{h^2 \int_{-h}^h E(z) dz}{\int_{-h}^h E(z) z^2 dz} \frac{1 + \nu}{3 + \nu},$$

де l – півдовжина контактної тріщини, h – півтовщина пластини, E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу, m – величина рівномірно розподіленого згинального навантаження.

Проаналізовано вплив неоднорідності матеріалу на величину коефіцієнтів інтенсивності напружень поблизу вістря тріщини та на розподіл контактної реакції на зімкнутих берегах розрізу.

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А – 1988. № 7. С. 4951.

ON PROBLEMS OF BENDING OF FUNCTIONALLY GRADIENT PLATES WITH CONTACT CRACKS

The problem of cracks closure in bending of functionally gradient plate is considered in two-dimensional statement. Interaction of cracks edges is described using the model of contacting along a line. The influence of heterogeneity of the material on forces and moments intensity factors and on contact reaction is investigated.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Андрій Чорненький, Михайло Саврук, Володимир Кравець

Фізико-механічний інститут імені Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів, A.B.Chornenkyi@gmail.com

Розглянемо двовимірну задачу теорії пружності для анізотропної площини S_0 (матриці), із гладким криволінійними анізотропними включеннями S_j ($j = 1, \dots, J$), коли за переходу їх контурів L_j напруження неперервні

$$[N(t) + iT(t)]^+ = [N(t) + iT(t)]^-, \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J}; \quad (1)$$

і стрибки похідної вектора переміщень рівні нулю:

$$(d/dt)\{[u_x(t) + iu_y(t)]^+ - [u_x(t) + iu_y(t)]^-\} = 0, \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J}. \quad (2)$$

Тут верхні індекси «+» і «-» вказують на граничні значення відповідних величин, коли $z = x + iy \rightarrow t \in L_j$ відповідно зліва (+) та справа (-) щодо вибраного додатного напрямку обходу контуру L_j . Анізотропна площина S_0 на нескінченності знаходиться під дією двовісного розтягу та зсуву

$$\sigma_y^\infty = p, \quad \sigma_x^\infty = q, \quad \tau_{xy}^\infty = \tau. \quad (3)$$

Комплексні потенціали напружень для матриці та включень є кусково-аналітичні функції у допоміжних математичних площинах $z_k^j = x + \mu_k^j y$ (μ_k^j – корені характеристичного рівняння для j -го анізотропного матеріалу, $k=1;2$) і можуть бути подані через інтеграли типу Коші [1]

$$\Phi_k^j(z_k^j) = \Gamma_k^j + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k^j} \frac{\phi_k^j(\tau_k^j)}{\tau_k^j - z_k^j} d\tau_k^j = \Gamma_k^j + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi_k^j(\tau_k^j)}{\tau_k^j - z_k^j} \frac{d\tau_k^j}{d\tau} d\tau, \quad z \in S_j, \quad j = \overline{0, J}; \quad (4)$$

де Γ_k^j – комплексні сталі [1], що описують однорідний напружений стан матриці та включень за навантаження (3), $L=L_j$ – для включень S_j ($j=1, \dots, J$), $L=\cup L_j$ – для матриці S_0 . Використавши відомий зв'язок між густинами потенціалів (4) та стрибком похідної переміщень на контурі тріщини в анізотропній площині [2], отримаємо:

$$\Phi_k^j(z_k^j) = \Gamma_k^j + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{c_{1k}^j g^{1j}(\tau) d\tau + c_{2k}^j g^{2j}(\tau) d\bar{\tau}}{\tau_k^j - z_k^j}, \quad k=1;2, \quad z \in S_j, \quad j = \overline{0, J}, \quad (5)$$

де коефіцієнти c_{ik}^j (для j -го анізотропного матеріалу) знайдено зі системи двох комплексних лінійних алгебричних рівнянь [2].

Задовольнивши за допомогою граничних значень комплексних потенціалів напружень (5) крайові умови (1), (2), отримаємо систему $2J$ сингулярних інтегральних рівнянь першого та другого родів. Для одного включення ($J=1$, $L = L_1$) вона матиме вигляд:

$$\int_L \left\{ \left[K^1(\tau, t) g^1(\tau) + K^0(\tau, t) g^0(\tau) \right] d\tau + \left[L^1(\tau, t) \overline{g^1(\tau)} + L^0(\tau, t) \overline{g^0(\tau)} \right] d\bar{\tau} \right\} = 0 ;$$

$$-4\{a_{11}^0 g^0(t) + a_{11}^1 g^1(t)\} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[M^1(\tau, t) g^1(\tau) + M^0(\tau, t) g^0(\tau) \right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \left[N^1(\tau, t) \overline{g^1(\tau)} + N^0(\tau, t) \overline{g^0(\tau)} \right] d\bar{\tau} \right\} = -i\Gamma_*(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Ядра $K^j(\tau, t)$, $L^j(\tau, t)$, $M^j(\tau, t)$, $N^j(\tau, t)$, $j = 0; 1$ визначаються механічними та геометричними параметрами задачі, поданими у комплексних площинах z^0, z^1 ; a_{11}^0, a_{11}^1 – пружні сталі анізотропних матриці ($j=0$) та включення ($j=1$).

$$\Gamma_*(t) = [(p_1^1 + iq_1^1) \frac{dt_1^1}{dt} \Gamma_1^1 - (p_1^0 + iq_1^0) \frac{dt_1^0}{dt} \Gamma_1^0] + [(\bar{p}_1^1 + i\bar{q}_1^1) \frac{d\bar{t}_1^1}{dt} \bar{\Gamma}_1^1 - (\bar{p}_1^0 + i\bar{q}_1^0) \frac{d\bar{t}_1^0}{dt} \bar{\Gamma}_1^0] +$$

$$+ [(p_2^1 + iq_2^1) \frac{dt_2^1}{dt} \Gamma_2^1 - (p_2^0 + iq_2^0) \frac{dt_2^0}{dt} \Gamma_2^0] + [(\bar{p}_2^1 + i\bar{q}_2^1) \frac{d\bar{t}_2^1}{dt} \bar{\Gamma}_2^1 - (\bar{p}_2^0 + i\bar{q}_2^0) \frac{d\bar{t}_2^0}{dt} \bar{\Gamma}_2^0],$$

де $p_k^j, q_k^j, j = 0; 1, k = 1; 2$ визначено через пружні сталі матеріалів [1].

На основі числового розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь (6) визначено розподіли контурних $\sigma_s^+(t), \sigma_s^-(t)$ та контактних напружень $N^+(t) + iT^+(t) = N^-(t) + iT^-(t)$ зі сторони включення (+) та матриці (-). Розглянуто різні рівні ортотропії та жорсткості анізотропних матеріалів матриці та включення для низки форм гладких контурів включення.

1. Savruk M. P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.
2. Savruk M.P., Kazberuk A. Curvilinear cracks in anisotropic plane and limit passage to the degenerate material // Materials Science. – 2014. – 50, № 2. – P. 189–200.

INTEGRAL EQUATIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS ANISOTROPIC BODY

The plane problem of the theory of elasticity for an anisotropic body with anisotropic inclusions is considered. For the one inclusion the obtained system of singular integral equations of the first and second kind is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations by the quadrature method. The distributions of contour and contact stresses at the contour of inclusion of various shapes were determined.

ФРИКЦІЙНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ СМУГИ НА ЗАКРІПЛЕНІЙ ОСНОВІ

Ольга Соляр, Тетяна Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
solyarolya@gmail.com

Розглядається контактна задача для анізотропної смуги із закріпленою основою, за врахування тертя під штампом [1,2]. До штампа прикладено сили (kP, P) , головний момент сил M , або кут повороту штампа ω , смуга займає область $-h < y < 0$. Інтегральне рівняння для визначення контактних напружень $Y = \sigma_y(x, 0)$ має вигляд

$$-\operatorname{Re}(\lambda)Y(x) + \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\pi} \int_a^b \frac{Y(t)}{t-x} dt + \int_a^b Y(t)K(x,t)dt = f'(x) + \omega, \quad (1)$$

де $y = f(x)$ – рівняння основи штампа, (a, b) – область контакту, λ – стала, яка визначається через пружні сталі смуги та коефіцієнт тертя k , $K(x, t)$ – неперервна функція. Невідомі контактні напруження задовольняють додатковим умовам

$$\int_a^b Y(t)dt = P, \quad \int_a^b tY(t)dt = M. \quad (2)$$

У випадку, коли задано кут повороту штампа ω , у співвідношеннях (2) задається тільки перша умова.

Перейдемо до нових змінних $t = c + d\tau$, $x = c + d\xi$, де $d = (b - a)/2$, $c = (b + a)/2$. Тоді рівняння (1) набуває канонічного вигляду

$$-\operatorname{Re}(\lambda)Y_*(\xi) + \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Y_*(\tau)}{\tau - \xi} d\tau + d \int_{-1}^1 Y_*(\tau)K_*(\xi, \tau)d\tau = g(\xi) + \omega, \quad (3)$$

де $Y_*(\xi) = Y(c + d\xi)$, $K_*(\xi, \tau) = K(c + d\xi, c + d\tau)$, $g(\xi) = f'(c + d\xi)$, а додаткові умови будуть $\int_{-1}^1 Y_*(\tau)d\tau = P/d$, $\int_{-1}^1 (c + d\tau)Y_*(\tau)d\tau = M/d$. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Y_*(\xi) = U(\xi)\varpi(\xi), \quad (4)$$

де $U(\xi)$ – гладка функція, $w(\xi) = (1 - \xi)^\alpha (1 + \xi)^\beta$, $\alpha = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\text{Im} \lambda}{\text{Re} \lambda}$, $\beta = -1 - \alpha$, причому для контактної задачі $-1 < \alpha$, $\beta < 0$.

Для розв'язання рівняння (3) використано квадратурні формули Гаусса-Якобі для сингулярних і регулярних інтегралів з N вузловими точками. Інтегральне рівняння (3) тоді зводиться до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\text{Im} \lambda}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \frac{U(t_k)}{t_k - x_n} + d \sum_{k=1}^N A_k U(t_k) K_*(x_n, t_k) = g(x_n) + \omega, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^N A_k U(t_k) = P/d, \quad \sum_{n=1}^N A_k (c + dt_k) U(t_k) = M/d. \quad (6)$$

Тут t_k – корені полінома Якобі $P_N^{(\alpha, \beta)}(t)$, x_n – корені полінома Якобі $P_{N-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)$, $k = 1, \dots, N$, $n = 1, \dots, N-1$, $A_k = -\frac{2\pi}{\sin \alpha \pi} \frac{P_{N+1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_k)}{P_N^{(\alpha, \beta)}(t_k)}$.

За дії штампів гладкої форми невідомими є і межі області контакту. Їх визначаємо з умов $Y(a) = 0$, $Y(b) = 0$. У випадку, коли штамп не обертається, покладаємо $\omega = 0$ та другу умову з (6) не використовуємо. Розрахунки виконано для штампа, який має основу параболічну або близьку до плоскої із закругленими краями. При цьому розглянуто штамп, який зміщується тільки вертикально, або може повертатись в процесі навантаження.

На основі побудованого розв'язку розглянуто контактну задачу для анізотропної смуги за врахування тертя. Розрахунки виконано для штампа, який має основу параболічну або близьку до плоскої із закругленими краями. При цьому розглянуто штамп, який зміщується тільки вертикально або може повертатись в процесі навантаження. Досліджено взаємодію двох штампів при врахуванні тертя. Виконано дослідження поздовжніх напружень під штампом. Встановлено, що за врахування тертя в околі штампа ці напруження можуть досягати значень сумірних з максимальними тисками.

1. Çömez İ. Frictional moving contact problem of an orthotropic layer indented by a rigid cylindrical punch // *Mechanics of Materials*. – 2019. – **133**. – С. 120-127.
2. Maksymovych M. O., Kharchenko Y. V. Determination of stresses in an anisotropic strip with holes by using singular integral equations and green's solution // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2023. – **273**, No. 1. – С. 79-91.

FRICIONAL CONTACT PROBLEM FOR AN ANISOTROPIC STRIP ON A FIXED BASE

An approach has been developed to solve a frictional contact problem for a strip with a rigidly fixed base, based on the method of integral equations.

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ

Роман Кушнір, Ольга Соляра

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹roman.kushnir.54@gmail.com, ²solyarolya@gmail.com

Розглядається контактна задача для шару $0 < z < h$, який розміщений на жорсткій гладкій основі при $z = 0$. Прийmemo, що до верхньої межі прикладено штамп, причому взаємодія відбувається з тертям. Дотичні напруження в області контакту, яка наперед незадана, описуються за законом Кулона. Позначимо модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона шару через G, ν , форма штампа, який приймаємо жорстким, в області контакту описується рівнянням $z = f(x, y)$. В області контакту діють нормальні напруження σ_z та дотичні напруження $\tau_{xz} = -k\sigma_z$ де k – коефіцієнт тертя. Для запису інтегрального рівняння задачі попередньо знайдено переміщення верхньої межі шару, зумовлені зосередженими силами $(0, 0, Z)$ та $(X, 0, 0)$, які прикладені в довільній точці верхньої межі (ξ, η, h) ,

Для їх знаходження спочатку використано операторний метод Лур'є. В результаті переміщення записано у вигляді рядів з коефіцієнтами, які містять функції Макдональда. Ці ряди швидкозбіжні при знаходженні переміщень на великих відстанях від сил. Для знаходження переміщень в точках близьких до прикладених сил використано інтегральне перетворення Ханкеля.

Приймаючи відомими нормальні напруження і інтегруючи по області контакту, для визначення нормальних переміщень межі $z = h$, отримуємо

$$w(x, y, h) = \gamma h \int_D \sigma_z(\xi, \eta, h) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1)$$

$$\text{де } \gamma = \frac{1 - \nu}{2\pi G}, \quad K(\alpha, \beta) = F_0(\alpha, \beta) + F_1(\alpha, \beta). \quad F_0 = \frac{1}{\rho} + \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} k \frac{x - \xi}{h\rho^2},$$

$$F_1 = \begin{cases} f_z(\rho) - 2 \frac{x - \xi}{h\rho} f_x(\rho), & \rho \leq 3, \\ -\frac{1}{\rho} - 2 \operatorname{Re} \sum_i t g^2 \alpha_i K_0(\alpha_i, \rho) - k \frac{x - \xi}{h\rho} \left(\frac{1}{2\rho} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} K_1(\alpha_i, \rho) \right] \right), & \rho > 3. \end{cases} \quad (2)$$

$\rho = R/h$, $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, $K_{0,1}(z)$ – функції Макдональда, α_i – корені з додатною дійсною частиною рівняння $\sin 2\alpha/2\alpha + 1 = 0$.

Функції $f_{z,x}(\rho)$, які визначені на основі перетворення Ханкеля на проміжку $\rho \leq 3$, апроксимовані поліномами. Коефіцієнти поліномів знайдено методом найменших квадратів. Розглянуто випадок, коли дотичні напружен-

ня діють в напрямку дії осі Ox . При заданих переміщеннях штампів рівняння (1) є інтегральним рівнянням відносно невідомих контактних напружень.

Для фрикційних задач області контакту, як правило наперед невідомі і тому для їх розв'язування використано числовий метод, який ґрунтується на рівностях-нерівностях Сін'юоріні та методі квадратичного програмування.

У підході Сін'юоріні вводиться в розгляд область S , яка вміщує в собі область контакту D . Довизначаємо функцію $\sigma(x, y) = \sigma_z(x, y, h)$ в області S поза областю D нулем. Для відшукування контактних напружень приходимо до задачі знаходження мінімуму величини

$$J = \iint_S \sigma(x, y) \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) dS_{\xi\eta} dS_{xy} - \iint_S \sigma(x, y) f(x, y) dS - w_0 \iint_S \sigma(\xi, \eta) dS, \quad (3)$$

за умови

$$\iint_S \sigma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta - f(x, y) - w_0 \leq 0, \quad \text{при } \sigma \leq 0, (x, y) \in S, \quad (4)$$

де w_0 – вертикальне зміщення штампів.

При виконанні умов (4) величина J є додатною і дорівнює нулю на точному розв'язку контактної задачі. Сформульована задача є задачею квадратичного програмування, розв'язавши її отримуємо розподіл контактних тисків на всіх ділянках контакту, причому між ділянками контакту отримуємо нульові напруження. З використанням розробленого алгоритму розглянуто фрикційну контактну задачу про взаємодію шару з штампами різної форми. Широке коло контактних задач для шару зводяться до випадку, коли функція, яка описує геометрію основи штампів має вигляд $f(x, y) = Ax^2 + By^2$. Розрахунки проведено при різних A і B , різних значеннях взаємного проникнення (w_0), різних значеннях коефіцієнтів тертя (k) та Пуассона (ν).

Отже, побудовано чисельний алгоритм розв'язування фрикційної контактної задачі про взаємодію шару з штампами складної форми. Алгоритм ґрунтується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування. Проведена оцінка достовірності отриманих результатів. Показано, що алгоритм є ефективним і дає змогу розв'язувати фрикційні контактні задачі з контрольованою точністю.

A CONTACT PROBLEM FOR A LAYER WITH FRICTION EFFECTS

A numerical algorithm has been developed to solve the frictional contact problem involving the interaction of a layer with stamps of complex shapes. The algorithm combines the method of integral equations and inequalities with quadratic programming. It is shown that the developed algorithm is efficient and allows solving frictional contact problems with controlled accuracy.

СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТИБКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З ТОНКИМИ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА НЕЛІНІЙНОГО ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ

Роман Кушнір¹, Георгій Сулим², Йосиф Піскозуб³

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
dyrector@iapmm.lviv.ua, gtsulym@gmail.com,

³Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, yosyf.z.piskozub@lpnu.ua,
Краківський технологічний університет, м. Краків, yosyf.piskozub@pk.edu.pl

Тонкі неоднорідності різноманітної фізичної природи у вигляді дефектів або конструкційних чи функціональних елементів практично завжди порушують однорідну будову матеріалів і тіл. Визначення напружено-деформованого стану (НДС) та інших параметрів таких структур, підданих впливу різноманітних силових чинників є складною та важливою проблемою. Задачі такого типу у разі нелінійності фізико-механічних властивостей таких неоднорідностей, неідеального контакту між складовими та невизначеність області їх контакту у разі можливості її порушення вивчені цілком недостатньо. Метою даного напрямку досліджень є розвиток структурно-модульного методу функцій стрибка та побудова математичних моделей тонких включень-прошарків, в т.ч. багатощарових, матеріал яких має істотно нелінійні деформаційні властивості, за різного навантаження тіла при умові нелінійного фрикційного контакту між складовими елементами композиту.

Досліджено НДС безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими G_1, G_2 , на межі яких вздовж відрізка $L' = [-a; a]$ розташоване стрічкоподібне включення довільної фізичної природи товщиною $2h \ll 2a$ (рис.1). Величина й напрямок дії зовнішніх силових чинників (рівномірно розподілених на нескінченності напружень, зосереджених сил, гвинтових дислокацій), що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично. На верхній та нижній ділянках контакту включення і матриці приймаємо умови кінематичного дотикового третьового контакту [1-4], які передбачають, що в усіх точках L' в певний момент часу t за умови

$$|\sigma_{yz}(x, \pm 0, t)| < \tau_{yz}^{\max}(x, 0, t) \quad (\sigma_{yy} < 0) \quad (1)$$

виконуються умови ідеального контакту

$$w(x, +h, t) = w(x, -h, t), \quad \sigma_{yz}(x, +h, t) = \sigma_{yz}(x, -h, t), \quad (2)$$

а на деякій ділянці $L'' = [-b; b]$, ($b \leq a$) дотичні напруження (зусилля тертя) дорівнюють

$$\sigma_{yz}(x, \pm 0, t) = -\operatorname{sgn}(w(x, -0, t) - w(x, +0, t)) \tau_{yz}^{\max}(x, V(t)), \quad (3)$$

де $\tau_{yz}^{\max}(x, V(t), t) = -\alpha(x, V(t))\sigma_{yy}(x)$ ($\sigma_{yy} < 0$), $\alpha(x, V(t))$ – кінематичний коефіцієнт тертя, $V(t)$ – швидкість проковзування поверхонь контакту.

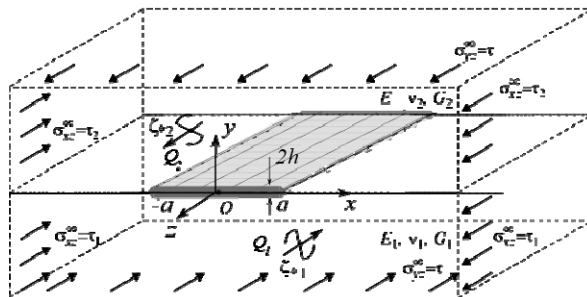


Рис.1. Геометрична та силова структура задачі

Значення кінематичного коефіцієнту тертя істотно нелінійно залежить від швидкості фрикційного проковзування поверхонь контакту [1-4] і тому розв'язування задачі наяв відміння від часткового випадку закону тертя Амонтона-Кулона вимагає ітеративного узгодження цього значення як жорсткості контакту, так і моменту часу.

1. Gnecco E., Bennewitz R., Gyalog T., Loppacher C., Bammelin M., Meyer E., Guntherodt H. J. Velocity dependence of atomic friction // Phys. Rev. Lett. – 2000. – **84**. – P. 1172–1175.
2. Popov V.L., Gray J.A.T. Prandtl-Tomlinson model: History and applications in friction, plasticity, and nanotechnologies // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. – 2012. – **92**, 9. – P. 683–708.
3. Prandtl L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper // ZAMM. – 1928. – **8**. – P. 85–106.
4. Tomlinson G. A. A molecular theory of friction // Phil. Mag. – 1929. – **7**. – P. 905–939.

STRUCTURAL-MODULAR METHOD OF JUMP FUNCTIONS FOR STUDYING THE DEFORMATION OF COMPOSITE STRUCTURES WITH THIN RIBBON INCLUSIONS UNDER NONLINEAR FRICTIONAL CONTACT

This study considers development of the structural-modular method of jump functions and construction of mathematical models of thin inclusions-layers, including multilayers, the material of which has significantly nonlinear deformation properties, under different body loads under the condition of nonlinear frictional contact between the constituent elements of the composite.

я

АНАЛІЗ ЗНОШУВАННЯ ТОНКОГО ПОКРИТТЯ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ ПЕРІОДИЧНИМИ ШТАМПАМИ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ МЕТОДАМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Олександр Максимук¹, Іван Васильків², Володимир Широков³

¹Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,

¹ov.maksymuk@gmail.com, ²ivanvasylkiv@ukr.net

³Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, vvshyrovok@gmail.com

Досліджено контактну взаємодію з урахуванням тертя і зношування штампами канонічної форми та періодичної структури жорсткої основи захищеною покриттям з двома коефіцієнтами постелі. В умовах плоскої задачі теорії пружності та на основі абразивної моделі зношування, побудовано основне інтегро-диференціальне рівняння задачі для визначення контактної тиску між штампом і покриттям. Для розв'язування рівняння було запропоновано покроковий алгоритм за часом [1, 2].

Для двох реальних пар матеріалів напівоберненим методом пораховано відповідну початкову область контакту та області зношування на заданих часових відрізках роботи фрикційної пари. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для чотирьох канонічних форм штампів з використанням математичного апарату імітаційного моделювання на основі аналітико-числових методів [3, 4]. У середовищі для інженерних розрахунків Matlab реалізовано імітаційну модель задачі та розроблено відповідні програмні модулі із використанням вбудованих математичних бібліотек та візуальних компонентів.

1. Максимук О.В., Васильків І.М., Сачук Ю.В. Періодична контактна задача для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – Т. 64, №4. – С. 117–123.
2. Максимук О. В. Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 88–92.
3. Максимук О.В., Сачук Ю.В., Лехіцький Т.В. Імітаційне моделювання процесу зношування тонкого покриття пружної півплощини штампами канонічної форми // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фізико-математичні науки.* – 2022. Вип. 23. С. 118 – 129. DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.
4. Siauw T., Bayen A. An Introduction to MATLAB Programming and Numerical Methods for Engineers. New York: Academic Press, 2014. – 311 p.

ANALYSIS OF WEAR OF A THIN COATING WITH TWO BED COEFFICIENTS BY PERIODIC STAMPS OF THE CANONICAL FORM BY SIMULATION METHODS

The contact interaction is investigated taking into account friction and wear by stamps of canonical shape and periodic structure of a rigid base protected by a coating with two bed coefficients. The characteristics of wear of the coating for various forms of stamps were analyzed using the mathematical apparatus of simulation modeling based on analytical and numerical methods in the Matlab environment for engineering calculations.

A PIEZOELECTRIC BIMATERIAL WITH A SYSTEM OF ELECTRICALLY LIMITED PERMEABLE INTERFACE CRACKS

Volodymyr Loboda¹, Alla Sheveleva², Frederic Chapelle³, Yuriy Lapusta⁴

^{1,2}Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine, ¹loboda@dnu.dp.ua, ²shevelevaee@dnu.dp.ua, ^{3,4}Université Clermont Auvergne, Clermont-Ferrand, France, ³frederic.chapelle@sigma-clermont.fr, ⁴lapusta@sigma-clermont.fr

A bimaterial with a system of collinear electrically limited permeable cracks along the material's interface of a piezoelectric space is considered. The distances between the cracks, their location and number can be arbitrary. The plane strain conditions are adopted. Remote mixed-mode mechanical loading and electric charge are prescribed at infinity.

Using the presentations of the electro-mechanical quantities via sectionally analytic functions, the problem of linear relationship is formulated. An exact solution of this problem is presented. The following algebraical equation with respect to the electric flux D over the crack regions L' if obtained

$$D = \varepsilon_a \frac{n_{43} \left[\alpha(x_1) \sigma_1^* + \chi(x_1) \tau_1^* \right] - n_{13} \sigma_4^*}{n_{44} \left[\alpha(x_1) \sigma_1^* + \chi(x_1) \tau_1^* \right] - n_{14} \sigma_4^*} \text{ for } x_1 \in L'.$$

This equation depends on the electric permittivity of the crack medium, electric loadings and material characteristics. Very small dependence on x_1 of the parameters $\alpha(x_1)$ and $\chi(x_1)$ was found out and electrical flux D was determined analytically. The closed-form expressions for the stresses and electric displacement outside cracks and also for displacements and electric potential jumps over cracks regions are found. The energy release rates (ERRs) at the crack tips were also derived in an analytical form. Numerical analysis is performed for different electric loading, cracks permittivity, their number, length and location. Particular attention is devoted to the uttermost models of electrically impermeable and permeable cracks. A comparison of the last case with the special solution for electrically permeable crack is made and their excellent agreement is found out.

П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИЙ БІМАТЕРІАЛ ІЗ СИСТЕМОЮ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН ЗІ СКІНЧЕНОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ ПРОНИКНІСТЮ

Для довільної системи колінеарних міжфазних тріщин зі скінченою електричною проникністю у п'єзоелектричному біматеріалі п роблема зведена до задач лінійного спряження, для яких виписані аналітичні розв'язки. Знайдені необхідні електромеханічні величини на межі поділу матеріалів, а також швидкості звільнення енергії біля вершин тріщин.

CRACK HEALING IN ANISOTROPIC ELASTIC-PLASTIC PLATE UNDER TENSILE LOAD

Viktor Sylovanyuk, Vitalii Melnyk

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv,
 melnyk.vitalii@ipm.lviv.ua

Crack propagation in composite materials exhibits several unique characteristics. One notable aspect is the development of large pre-fracture zones near the crack tips. These zones consist of unbroken fibers from the reinforcing material and a sufficiently plastic matrix. To calculate the critical load for such materials, nonlinear fracture mechanics is employed, specifically the use of the δ_c -criterion, which focuses on the critical opening or shear displacement of the crack edges.

In engineering applications, particularly within the construction industry, injection technologies are commonly used to restore the strength of structural elements compromised by cracks [1-3]. These methods involve injecting liquid polymers into defect zones, where, after hardening, the polymers prevent further displacement of the crack surfaces. This process reinforces the structure, allowing it to withstand operational loads.

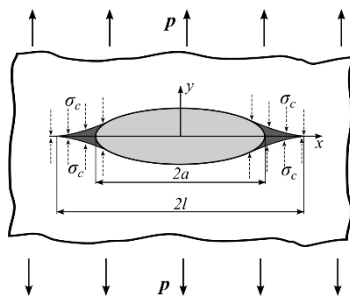


Fig. 1. Tensile schematic of a plate with a filled crack

We consider an elastic-plastic body containing a crack under the tensile load (Fig. 1). The crack is filled with injection material. In the framework of nonlinear fracture mechanics, we reduce the problem to solving an integro-differential equation, using the model of an elastic Winkler-type layer

$$Re \left(\frac{1}{\pi i} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{q_1 \mu_2 - q_2 \mu_1} \right) \int_{-l}^l \frac{g'(x) dx}{x-t} - \frac{g(t)}{h(t)} E + \quad (1)$$

$$+ p - p a_{22} E - \sigma_c = 0, |t| \leq l,$$

where $g(x)$ is the displacement of the crack edges; μ_1, μ_2 – the roots of a certain characteristic equation; q_1, q_2 – parameters of anisotropy; $\varepsilon = a_{22} E$.

The analytical solution of equation (1) can be obtained if the crack surface is elliptic with semi-axes a, b , $h(x) = \beta^{-1} \sqrt{a^2 - x^2}$, $\beta = a/b, a \gg b$, and the stress state in the elliptical layer changes little with the formation of plastic zones and is homogeneous, as is the case with the elastic body model [4].

Based on the dependencies above, the following expression of function $g(x)$ can be obtained:

$$g(t) = \frac{\sigma_c - p(\varepsilon - E\beta A)}{\pi Re((\mu_2 - \mu_1) / (i(q_1\mu_2 - q_2\mu_1)))}^* \times \\ \times [(t - a)\Gamma(l, t, a) - (t + a)\Gamma(l, t, -a)], \quad (2)$$

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{Re((\mu_2 - \mu_1) / (i(q_1\mu_2 - q_2\mu_1))) + E\beta}.$$

To calculate the ultimate load, we will apply the criterion of critical crack surface shear $2g(a) = \sigma_{Ic}$. As a result, we obtain an equation to establish the strength reserve for tensile shear in an anisotropic elastic-plastic body with a healed crack

$$-\frac{8a(\sigma_c - p_*(\varepsilon + E\beta A))}{\pi Re[(\mu_2 - \mu_1) / (i(q_1\mu_2 - q_2\mu_1))]} \ln \cos \frac{\pi p_*(1 - \varepsilon - E\beta A)}{2(\delta_c - p_*(\varepsilon + E\beta A))} = \delta_{Ic} \quad (3)$$

Our findings indicate that the success of restoring the strength of a cracked body using injection reinforcement technology is influenced by the defect's geometric parameters and the elastic properties of the materials. Additionally, we identify the defect sizes at which linear fracture mechanics can be applied.

This work was carried out within the framework of project No. 2023.04/0132 of the National Research Foundation of Ukraine.

1. *Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П.* Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 298 p.
2. *Czarnecki L., Emmons P. H.* Naprawa i ochrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 p.
3. *Panasyuk V. V., Marukha V. I., Sylovanyuk V. P.* Injection technologies for the repair of damaged concrete structures. – Dordrecht-Heidelberg-New York-London: Springer, 2014. – 230 p.
4. *Sylovanyuk V. P., Ivantyshyn N. A.* Healing of ckracks in anisotropic bodies // Mater. Sci. – 2020. – 55, No. 6. – P. 804 – 811.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ АКСІАЛЬНО ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ БАЛОК КРИВОЛІНІЙНО ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

В'ячеслав Бурлаєнко¹, Віктор Веретельник², Світлана Дімітрова³

^{1,2,3}Національний технічний університет «ХПІ», м. Харків, ¹burlayenko @yahoo.com, ²veretelnyk.victor@gmail.com, ³s.dimitrovaburlayenko @gmail.com

Використання балок змінного перерізу дає змогу оптимізувати спів відношення ваги та міцності. Поєднання функціонально градієнтних матеріалів з різноманітною геометрією забезпечує необхідні характеристики при заданій вазі та адаптує балкові конструкції до специфічних вимог.

Динаміка матеріально неоднорідних балок зі змінним поперечним перерізом активно досліджується [4]. Проте, комплексні та систематичні дослідження модальних характеристик аксіально функціонально градієнтних балок з криволінійним змінним перерізом досі недостатньо розроблені [2].

Поточне дослідження зосереджується на аналізі власних коливань балок із аксіально функціонально градієнтних матеріалів (АФГМ) з криволінійно змінними поперечними перерізами вздовж їхньої довжини. Розглядаються балки різних форм, включаючи форми увігнутих та опуклих конічних перерізів, як показано на Рис. 1.

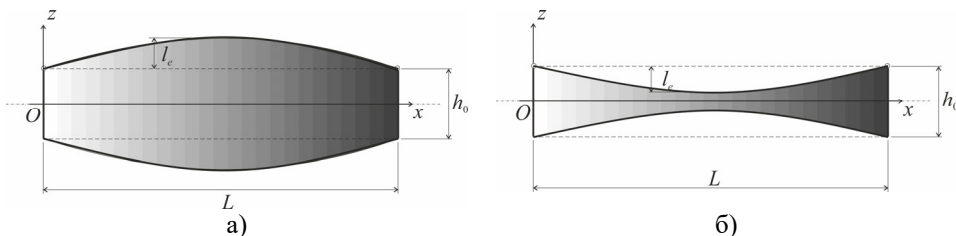


Рис. 1. Геометрії АФГМ балок змінного перерізу: (а) опукла форма; (б) увігнута форма.

Припускається також, що матеріальні властивості балки, зокрема модуль Юнга, модуль зсуву та щільність матеріалу, змінюються вздовж поздовжньої осі за експоненціальною (1) або поліноміальною (2) функцією:

$$P(x) = P_0 V_e, V_e = e^{\gamma_e(1-a(1-x/L))} \quad (1)$$

та

$$P(x) = P_c + (P_m - P_c) V_c, V_c = (1 - b(1 - x/L))^{\gamma_c} \quad (2)$$

де $P(x)$ - будь-яка з матеріальних властивостей, P_0 - її значення при $x = 0$, а P_c і P_m - властивості металевих і керамічних складових функціонально

градієнтного матеріалу відповідно.

Рівняння руху балки виведено на основі принципу Гамільтона в рамках теорії балки Тимошенка. Ці рівняння зі змінними коефіцієнтами та різними граничними умовами розв'язуються методом диференціального перетворення (МДП) [3].

Запропонований підхід перевірено шляхом порівняння розрахованих власних частот із даними з літератури та результатами тривимірного аналізу, проведеного в пакеті ABAQUS. Для врахування матеріальних градієнтів у скінченно-елементних моделях використано користувацьку підпрограму матеріалу (UMAT) [1].

У дослідженні детально вивчено вплив різних факторів на власні частоти АФГМ балок, зокрема параметрів матеріальних законів, форм поперечного перерізу, коефіцієнта струнності та граничних умов. Це дозволяє глибше зрозуміти модальну динаміку таких балок і надає цінну інформацію для оптимізації проектування балкових конструкцій з функціонально градієнтних матеріалів.

1. *Burlayenko, V.N., Kouhia, R., Dimitrova, S.D.* One-dimensional vs. three-dimensional models in free vibration analysis of axially functionally graded beams with non-uniform cross-sections // *Mech. Compos. Mater.* – 2024. – **60**, No. 1. – P. 83–102.
2. *Burlayenko, V.N., Kouhia, R., Dimitrova, S.D.* Free vibration analysis of curvilinearly tapered axially functionally graded material beams. *Appl. Sci.* – 2024. – **14**, No. 1. – P. 1–22.
3. *Pukhov, G. E.* differential transformations of functions and equations. – Kyiv: Naukova Dumka, 1980. – 420 p.
4. *Trapezon, K., Trapezon, A.* Analytical study of the natural bending oscillations of a concave beam with parabolic change in thickness // *East.-Eur. J. Enterp. Technol.* – 2021. – **3/7**, No. 111. – P. 15–23.

ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS IN AXIALLY FUNCTIONALLY GRADED BEAMS WITH CURVILINEAR VARIABLE CROSS-SECTIONS

This study investigates the free vibration behavior of beams made of axially functionally graded materials (AFGM) with curvilinear variable along their length cross-sections. The beams feature a range of geometries, including concave and convex conic sections, and different material properties that vary according to axial polynomial and exponential profiles. The equations of motion are derived using Hamilton's principle within the framework of Timoshenko beam theory. These equations, under various boundary conditions, are solved using the differential transform method (DTM). A comprehensive analysis is conducted to explore the effects of multiple factors on the natural frequencies of functionally graded beams, including material law parameters, variable beam geometries, slenderness ratios, and boundary conditions.

ПРО ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ КРУЧЕННЯ В ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ПРОКОВЗУВАННІ ШАРІВ

Андрій Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, ndrew.gl@gmail.com

В рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями досліджено поширення хвиль кручення в шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

Розглянуто шаруватий композит з початковими напруженнями, який складається з почерезних шарів двох типів, в кожному з яких матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими для розглянутого типу шарів. Застосовано лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3 , які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами. Декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) в початковому напружено-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів. У разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3 .

Вважаємо початковий напружений стан однорідним. Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Також, як і в [1], приймаємо, що

$$u_{r'}^{(j)} \equiv 0; \quad u_0^{(j)} = u_0^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_3^{(j)} \equiv 0; \quad u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} \equiv 0. \quad (2)$$

У цьому випадку в поданні спільних рішень просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності стосовно до загального рішення задачі в циліндричних координатах можна прийняти

$$\Psi^{(j)} = \Psi^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad X^{(j)} \equiv 0. \quad (3)$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u_0^{(j)}$ в кожному з шарів маємо наступні співвідношення [1]

$$u_0^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \Psi'^{(j)}. \quad (4)$$

Для складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3 = const$ отримуємо вирази

$$Q'_{30}{}^{(j)} = \kappa'_{3113}{}^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_3} u_0^{(j)}. \quad (5)$$

В співвідношеннях (4) функції $\Psi'^{(j)}$ визначаються із рівнянь

$$\left(\Delta' + \kappa'_{3113}{}^{(j)} \kappa'_{1221}{}^{(j)-1} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho'^{(j)} \kappa'_{1221}{}^{(j)-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi'^{(j)} = 0. \quad (6)$$

Тут $\Delta'_1 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'}$; $\rho'^{(j)}$ – щільність матеріалів кожного з шарів в попередньо напруженому стані; τ – час. Складові тензорів $\kappa'^{(j)}$ визначаються для конкретних постановок задач [1].

За умови проковзування при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності

$$Q'_{30}{}^{(1)(0)}(0) = 0; \quad Q'_{30}{}^{(2)(0)}(0) = 0; \quad (7)$$

і умови періодичності

$$Q'_{30}{}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = 0; \quad Q'_{30}{}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \quad (8)$$

Таким чином, відповідно до вище викладеного дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (6) при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів (7) і умов періодичності (8), відповідно теорії Флоке.

1. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частично ограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.

ON THE PROPAGATION OF TORSIONAL WAVES IN LAYERED COMPOSITE INCOMPRESSIBLE MATERIALS WITH INITIAL STRESSES AT THE SLIP OF LAYERS

In the framework of the linearised theory of elasticity for bodies with initial stresses, the torsional wave propagation in layered composite incompressible materials with initial stresses at layer slippage is investigated. The case of wave propagation along the layers is considered. The dispersion equations for symmetric and antisymmetric waves and their long-wave approximations are obtained.

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ ТА ШВИДКОСТІ НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ

Юрій Глухов

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, м. Київ, gluchov.ury@gmail.com

Розглядається попередньо напружений стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю під довільним кутом. Шар моделюється зосередженими масами з певною густиною. Граничні поверхні елементів шаруватого середовища є плоскі і паралельні між собою. Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним. Вважаємо можливими два варіанта контакту між елементами шаруватого середовища на граничних поверхнях: жорсткий контакт і нежорсткий контакт. Припускаємо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, значно менші початкових напружень. Це припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності [1] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Розв'язок задачі отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Розв'язок в просторі зображень представлений в загальному вигляді для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних матеріалів елементів багат шарового середовища, умов їх сполучення і для будь-якої швидкості руху поверхневого навантаження.

Чисельні дослідження проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій для матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу при дозвукових, транзвукових і надзвукових швидкостях руху навантаження.

Аналіз отриманих числових результатів дозволяє зробити наступні висновки.

Для дозвукових швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами заданої точки. Найбільше початкові напруження впливають на напружено-деформований стан основи в зоні прикладання поверхневого навантаження.

Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

При заданих початкових видовженнях значення величин, що характеризують напружено-деформований стан основи, при стискуванні більше, ніж при розтязі. Зі збільшенням швидкості руху навантаження напруження і швидкості переміщення зменшуються. Напруження і швидкості

переміщення також зменшуються у випадку більш жорсткого поверхневого шару. Зі збільшенням швидкості руху навантаження в дозвуковій області характер впливу початкових напружень майже не змінюється. Значення величин, що характеризують напружено-деформований стан півпростору при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті. При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень менший, ніж при нежорсткому контакті.

Для трансзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджувались, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотня. Наявність початкових напружень суттєво впливає на розподіл напружень і швидкостей переміщень в півпросторі. Цей вплив різний в залежності від положення даної точки півпростору щодо точки прикладання навантаження.

Значення напружень та швидкостей переміщень, як і у випадку дозвукової швидкості навантаження, при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті, але при жорсткому контакті існує більш значна залежність цих параметрів від початкових напружень.

Так само, як і у випадку дозвукової швидкості навантаження існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

Зі збільшенням швидкості (надзвукова швидкість) симетрія все більше порушується, а пряма хвиля згасає набагато швидше. При цьому вона не зникає повністю. Пов'язано це, мабуть, з шаруватістю середовища.

Залежність параметрів напружено-деформованого стану від початкових напружень і умов контакту має такий же якісний характер, як і у випадку трансзвукової швидкості навантаження.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К.», 2004. – 672 с.

INFLUENCE OF INITIAL STRESSES AND LOAD VELOCITY ON STRESS-STRAIN STATE OF COMPRESSIBLE HALF-SPACE

This work is devoted to the study of the influence of the protective coating, initial stresses, mechanical characteristics of materials, movement parameters of the surface load on the stress-deformed state of the elastic base. A prestressed compressible half-space with inhomogeneity in the form of a thin surface layer is considered. The solution of the problem was obtained using the method of integral Fourier transformations. The material with a harmonic potential is considered for numerical analysis. The calculations were carried out within the framework of the theory of finite initial deformations.

DIFFUSION SPLITTING METHOD FOR NON-STATIONARY DIFFUSION-ADVECTION-REACTION PROBLEMS

Roman Drebotiy

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, roman.drebotiy@lnu.edu.ua, roman.drebotiy@gmail.com

We propose certain semi-discrete splitting scheme for two-dimensional diffusion-advection-reaction initial-boundary value problem. Proposed approach admits further parallelizable full discretization with usage of the finite element method.

Denote by Ω a bounded domain with a Lipschitz boundary $\Gamma = \partial\Omega$. Let us define model parameters: diffusion $\mu = \text{const} > 0$, advection velocity $\vec{\beta} = (\beta_1(x), \beta_2(x))$, reaction speed $\sigma = \text{const} > 0$ and source term $f = f(x)$. Let us consider the following problem:

$$\begin{cases} \text{find function } u = u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ such that:} \\ u'_t - \mu \Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u + \sigma u = f \text{ in } \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \quad \Gamma := \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (1)$$

Problem (1) can be used in modeling of air pollution transfer over some geographical region. For this we should have known distribution of winds, or we can consider one-way coupled problem, where velocity $\vec{\beta}$ is a solution of Navier-Stokes equations.

We represent (1) in the corresponding variational formulation:

$$\begin{cases} \text{find } u \in L^2(0, T; V) \text{ such that:} \\ \langle u'_t, v \rangle + a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2)$$

where $V := H_0^1(\Omega)$ is a standard Sobolev space, $(w, q) := \int_{\Omega} wq dx$ and

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} (\mu \nabla u \cdot \nabla v + \vec{\beta} v \cdot \nabla u + \sigma uv) dx \quad \forall u, v \in V, \\ \langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3)$$

Let us denote by $\bar{b}(x) := \vec{\beta} / \|\vec{\beta}\|$. Define vector field $\vec{\gamma}(x) = (\beta_2(x), -\beta_1(x))$ and corresponding normalized field $\bar{p} = \vec{\gamma} / \|\vec{\gamma}\|$. Let us define time step Δt and

parameter $\theta \in (0,1)$. Let us denote by u_j (for integer j) an approximation to the function $u(x, t_j)$ at the time $t_j := j\Delta t$.

With certain restrictions on the vector $\bar{\beta}$, we introduce semi-discretization in time of the variational problem (2) with the following multi-step recurrent scheme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given } u_j \in V, \text{ find } \dot{u}_{j+\frac{1}{4}}, u_{j+\frac{1}{2}}, \dot{u}_{j+\frac{3}{4}}, u_{j+1} \in V \text{ such that:} \\ (\dot{u}_{j+\frac{1}{4}}, v) + \theta \Delta t s(\dot{u}_{j+\frac{1}{4}}, v) = \langle l, v \rangle - s(u_j, v), \\ u_{j+\frac{1}{2}} = u_j + \Delta t \dot{u}_{j+\frac{1}{4}}, \\ (\dot{u}_{j+\frac{3}{4}}, v) + \theta \Delta t m(\dot{u}_{j+\frac{3}{4}}, v) = -m(u_{j+\frac{1}{2}}, v), \\ u_{j+1} = u_{j+\frac{1}{2}} + \Delta t \dot{u}_{j+\frac{3}{4}}, \\ \forall v \in V, \quad 0 \leq j \leq T / \Delta t, \end{array} \right. \quad (4)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} s(u, v) := \int_{\Omega} (\mu(\bar{b} \cdot \nabla u)(\bar{b} \cdot \nabla v) + \nu \bar{\beta} \cdot \nabla u + \sigma uv) dx, \\ m(u, v) := \int_{\Omega} \mu(\bar{p} \cdot \nabla u)(\bar{p} \cdot \nabla v) dx. \end{array} \right. \quad (5)$$

We suppose that the problem data is quite regular, so all considered above variational problems have unique solutions.

We show, that we can build efficient parallelizable discretization procedure for finding the solution of each one of two variational subproblems of (4), in particular, with leveraging finite element method.

Proposed method uses typical approaches of building recurrent time integration schemes for variational problems [2]. The general idea of splitting the scheme and introducing intermediate fractional steps is known in the literature. For example, we can note famous Chorin's splitting method for Navier-Stokes equations [1].

1. *Chorin A.J.* Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, Mathematics of Computation, Vol. 22, No. 104 (Oct., 1968), pp. 745-762
2. *Trushevsky V.M., Shynkarenko H.A., Shcherbyna N.M.* Finite element method and artificial neural networks: theoretical aspects and application. – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2014, ISBN 978-617-10-0127-5 (in Ukrainian)

ВПЛИВ РОЗПОРЯДКУВАННЯ У КАСКАДІ З ПЕРІОДИЧНИХ КРУГОВИХ ТРІЩИН НА ПРОХОДЖЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ

Віктор Михаськів¹, Ігор Жбадинський²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹tex@iapmm.lviv.ua, ²zhbadynskiy.igor@gmail.com

Для тривимірних пружних метаматеріалів характерні практично важливі явища селективного проходження чи блокування гармонічних хвиль за частотою, що виявлено, зокрема, за присутності пластового регіону, сформованого набором еквідистантних площин з дво-періодичними масивами кругових тріщин. Показано ефективність такого дослідження через використання широко-інтервальної апроксимації хвильових полів [1].

Узагальнення підходу стосовно каскаду з $N \geq 3$ нерівновіддалених площин з дво-періодичними круговими тріщинами на шляху поздовжньої пружної хвилі передбачає розрахунок коефіцієнтів хвильового відбиття R_N та проходження T_N за рекурсивними формулами

$$R_N = R_{N-1} + \frac{\exp\left[2ik_1 \sum_{l=2}^N \Delta_l\right] T_{N-1}^2 R}{1 - \exp\left[2ik_1 \Delta_{N-1}\right] R_{N-1} R}, \quad T_N = \frac{T_{N-1} T}{1 - \exp\left[2ik_1 \Delta_{N-1}\right] R_{N-1} R}, \quad (1)$$

де Δ_i – відстань між $(i-1)$ -ю та i -ю ($i=1,2,\dots,N$) площинами, k_1 – хвильове число поздовжньої хвилі, R і T – відомі коефіцієнти хвильового відбиття і проходження для поодинокі площини з тріщинами [2].

Числові результати стосуються частотної поведінки коефіцієнтів хвильового відбиття R_N та проходження T_N залежно від контрасту дистанцій у триплощинному каскаді.

1. Zhbadynskiy I.Ya., Mykhas'kiv V.V. Acoustic filtering properties of 3D elastic metamaterials structured by crack-like inclusions // Proceedings of the XVIIIth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), September 24–28, 2018, Tbilisi, pp. 145–148.
2. Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskiy I.Ya., Zhang Ch. On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks // European Journal of Mechanics / A Solids – 2019. – 73, – P. 306-317.

INFLUENCE OF DISORDERING IN A CASCADE OF PERIODIC CIRCULAR CRACKS ON ELASTIC WAVE PENETRATION

Basing on a wide-spacing approximation, the wave reflection and transmission coefficients are determined numerically for 3D elastic metamaterial containing a finite number of non-equidistant planes with the doubly-periodic circular cracks.

ЗВОРОТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕУДАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ ЗІ ЗОВНІШНІМ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНИМ ТЕРТЯМ

Василь Перепічка

Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ,
v.v.perepichka@gmail.com

Розглядається півнескінченний стержень Бернуллі на бокових поверхнях якого наявне зовнішнє тертя. Механічний аналог прийнятої моделі тертя – паралельне з'єднання елемента Сен-Венана з елементом Ньютона, що дає в залежності від швидкості висхідну характеристику. В випадку під'єднання поршня через реверс отримуємо в'язкопластичне тертя з ниспадною характеристикою: сухе некулонівське тертя. Під зворотністю задачі розуміємо, що по заданому законі поширення збурення знаходиться поле переміщень для області зрушених елементарних перерізів і зусилля на торці.

Зворотна початково-крайова задача для знаходження переміщення стержня $u(X, T)$ має вигляд:

$$u'' + \frac{\Pi}{A} \frac{\tau_x}{E} = \frac{\rho}{E} \ddot{u}, \quad X > 0, \quad T > 0;$$

$$\tau_x = -\tau_c \operatorname{sgn} \dot{u} - \beta \dot{u}, \quad \dot{u} \neq 0 \quad \text{або} \quad \dot{u} = 0, \quad |\tau_x| < \tau_c;$$

$$u(X, 0) = 0, \quad \dot{u}(X, 0) = 0, \quad X > 0;$$

$$u'(0, T) = -\frac{\sigma_0}{E} g(T) H(T), \quad u(\infty, T) = 0, \quad T > 0.$$

$$\operatorname{sgn} \dot{u} = H(T - \alpha(X)), \quad X > 0, \quad T > 0.$$

Тут X, T – координата та час; A, Π – площа та периметр перерізу, E, ρ – модуль Юнга та густина матеріалу стержня; τ_x – дотичне напруження на бічній поверхні, τ_c – межа текучості, β – коефіцієнт в'язкості; σ_0 – нормуюче напруження, $g(T)$ – невідома функція закону навантаження торця; $\alpha(X)$ – задана лінія фронту збурення, $H(T)$ – функція Гевісайда.

В полі трансформант інтегрального перетворення Лапласа за часом побудовано загальний розв'язок поставленої задачі. В випадку постійної швидкості збурення отримано розв'язок в дійсних змінних.

INVERSE PROBLEMS FOR NON-IMPACT LOADS OF AN ELASTIC ROD WITH EXTERNAL VISCOPLASTIC FRICTION

The inverse problem for a semi-infinite elastic rod interacting with the external environment is considered. An analytical solution is obtained for a given constant speed of propagation of the disturbance. The analysis of the obtained results for the moving part of the rod was carried out.

ДРОБОВІ ПОХІДНІ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Ярослав П'янило

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Пядстригача НАН України, м. Львів,
danylo794@gmail.com

Основою побудови математичних моделей різного роду процесів є диференціальні рівняння або системи диференціальних рівнянь як звичайних, так і в частинних похідних. Як правило, такий підхід дозволяє описувати процеси в даний час і в даній точці. В такому випадку не враховується вплив сусідніх областей та історії процесу. Одним із методів вирішення цього питання є застосування дробового інтегрального числення, зокрема похідних дробового порядку [1,2]. На цей час найбільш вживаними є похідні дробового порядку у термінах Капуто

$${}^c D_{\tau}^{\delta} = \frac{c \partial^{\delta}}{\partial \tau^{\delta}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\delta)} \int_0^{\tau} \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi) (\tau-\xi)^{\delta-m} d\xi,$$

де $m = [\alpha]$, $[\cdot]$ – ціла частина дійсного числа, та Рімана-Ліувіля -

$$D_{\tau}^{\delta} = \frac{c \partial^{\delta}}{\partial \tau^{\delta}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\delta)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \int_0^{\tau} \varphi(\xi) (\tau-\xi)^{\delta-m} d\xi.$$

Між похідними Капуто і Рімана-Ліувіля має місце наступний зв'язок [12]

$${}^C D_{\tau}^{\delta} \varphi = D_{\tau}^{\delta} \varphi - \sum_{k=0}^m \frac{\tau^{k-\delta}}{\Gamma(k-\delta+1)} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \varphi.$$

Однак в багатьох роботах є узагальнення цих операторів на різні види інтегральних ядер: У 2014 році Гарра та ін. ввів дробову похідну у виду

$$D_{+}^{(\alpha)} f(x) = \int_a^x (\tau-t)^{\mu+n-\beta-1} E_{\alpha, \mu+n-\beta}^{\varphi} \left(\varpi(x-t)^{\alpha} \right) \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt,$$

де $E_{\alpha, \mu+n-\beta}^{\varphi} \left(\varpi(x-t)^{\alpha} \right)$ — узагальнена функція Міттаг-Леффлера

У 2015 році Капуто і Фабріціо представили дробову похідну з показникова функція у вигляді

$$D_{+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{(2-\alpha) \mathfrak{Z}(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_a^x \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-t)\right) \frac{df(t)}{dt} dt,$$

де $\mathfrak{Z}(\alpha)$ - параметр.

В літературі відомо значно більше узагальнень диференціального числення дробового порядку [2]. Незважаючи на велику кількість похідних дробового порядку застосування їх в математичному моделюванні фізичних процесів пов'язане з певною кількістю недоліків, зокрема: 1) ядра інтегродиференціальних рівнянь не містять параметрів середовища та процесів, які вивчаються; 2) невідомі критерії вибору виду похідної дробового порядку та її порядку тощо.

Застосування похідних дробового порядку до математичного моделювання масопереносу в складних пористих середовищах підтверджує ефективність їх ефективність – отримані результати відповідають якісній картині процесу та підтримують балансові співвідношення незалежно від параметру порядку похідної. Однак вказані вище недоліки залишаються. Слід відмітити, що поряд в вказаними недоліками у випадку моделювання фізичних процесів є наявними і інші проблеми, як методичні, так і обчислювальні.

Відзначимо, що для розв'язування крайових задач в термінах похідних дробових порядків побудовано значну кількість методів, в основному числових: дискретизація інтегродиференціальних рівнянь; застосування квадратурних формул; інтерполяція в базисі ортогональних многочленів; застосування вейвлет методу тощо.

Ефективне застосування дробового числення пов'язане з вирішенням ряду задач, основними з яких є:

- оптимальний вибір виду дробової похідної;
- критерій вибору порядку дробової похідної;
- вибір методу розв'язування сформульованих крайових задач, який би враховував точність час обчислення.

1. Lopuh N. B., Pyanylo Ya. D. Mathematical modeling of gas filtration in the bottomhole zone of underground gas storage wells using fractional derivatives // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – 279, No. 2. – P. 282–292.
2. Yang X.-J. General fractional derivatives theory, methods and applications. – Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2019. – 361 p.

FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES

Derivatives of fractional orders are considered in the paper in relation to mathematical modeling of various kinds of processes. The main types of derivatives of fractional order, the methods of solving the corresponding integrodifferential equations are presented, the main advantages and unsolved problems are noted. The effectiveness of the application of derivatives of fractional orders in mathematical modeling of mass transfer processes in complex porous structures is shown.

СУМІСНИЙ РУХ СИСТЕМИ СПІВВІСНИЙ РЕЗЕРВУАР-РІДИНА ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Катерина Семенович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, katelyna.semenovych@knu.ua

В рамках нелінійної моделі сумісного руху системи резервуар-рідина [1] досліджено задачу динаміки співвісного циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, у випадку дії зовнішнього гармонічного імпульсу. Розгляд обмежено кутовими рухами резервуара. Рух рідини вважається безвихровим, стінки резервуару вважаються абсолютно твердими. Дослідження кутових рухів системи вимагає введення векторного потенціалу для опису руху рідини, що суттєво поскладнює модель динаміки системи. Сумісність руху системи призводить до суттєвої зміни величини та черговості власних частот порівняно із випадком заданого руху несучого тіла [2], такий підхід дозволяє описати внутрішні резонанси, що виникають в системі. Співвісність несучого тіла порівняно зі звичайним резервуаром вимагає розгляду додатково набору базисних функцій з метою задовільнення умови непротікання на внутрішній стінці. Розглянуто особливості нелінійного перерозподілу енергії між власними формами коливань вільної поверхні рідини, взаємозалежність різних типів рухів в системі. Проведено порівняння із випадком циліндричного резервуару [3].

1. *Limarchenko O., Matarazzo G., Yasinsky V.* Rotational motion of structures with tanks, partially filled by liquid.– Kyiv: FADA Ltd, 2003.– 286 p.
2. *Луковський І. О.* Дослідження вимушених нелінійних коливань рідини у кругових циліндричних ємностях на основі семимодової моделі третього порядку / І. О. Луковський, О. В. Солодун // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Київ: Праці Інституту математики НАН України. – 2003. – 47. – С. 161–179.
3. *Limarchenko O.S., Semenovich K.O.* Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // J. Math. Sci. – 2017. – 222, N 3. – P. 296 – 303.

COMBINED MOTION OF A SYSTEM COAXIAL RESERVOIR-LIQUID UNDER EXTERNAL HARMONIC LOADING

Motion of a system coaxial cylindrical tank on pendulum suspension - ideal liquid is considered in combined nonlinear statement. The behavior of the system under external harmonic loading of a reservoir are presented. Peculiarities of nonlinear redistribution of energy between natural modes of oscillations of the free surface of liquid, interdependence of different types of movements in the system are considered. A comparison is made with the case of a regular cylindrical reservoir.

РОЗСІЯННЯ ПРУЖНИХ SH-ХВИЛЬ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ КОМПЗИТІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Роман Рабош¹, Валерій Матус², Роман Андрійчук³

^{1,2,3}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ, м. Львів,
³andriychukroman@gmail.com, ²matus@iapmm.lviv.ua,

¹Львівський національний університет ім. І. Франка, м. Львів, roman.rabosh@lnu.edu.ua

Елементи сучасних сенсорів, актуаторів та пристроїв збору енергії часто виготовлені з п'єзоелектричних матеріалів. З огляду на це важливо дослідити особливості поширення пружних хвиль у п'єзоелектричних композитах з тонкостінними тріщинами та включеннями.

В даній роботі запропоновано методику вивчення пружних хвильових полів, дифрагованих тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням у п'єзоелектричному середовищі. Складові електропружної системи перебувають за умов антиплоского динамічного навантаження. На лінії контакту складових композиту задано умови ідеального механічного та електричного контакту. Матеріали включення та матриці належать до кристалографічного класу $6mm$. Відносна товщина включення характеризується малим параметром $\varepsilon = a^{-1} \max_{|x| < a} h(x) \ll 1$, де $h(x)$ та $2a -$ товщина та довжина неоднорідності в декартовій системі координат (x, y) .

З допомогою методу зрощування асимптотичних розкладів [1] отримано моделі динамічної взаємодії складових композиту при усталених коливаннях. Підставивши отримані моделі в інтегральні подання розв'язку задачі, отримано вираз для комплексної амплітуди розсіяння та встановлено особливості хвильових полів розсіяних у дальню зону Фраунгофера.

1. Рабош Р.В. Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням при поздовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №1. – С. 101-106.
2. Кунець Я.І., Рабош Р.В. Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 3. – С. 141-146.

SCATTERING OF ELASTIC SH-WAVES IN A PIEZOELECTRIC COMPOSITE WITH A THIN INCLUSION

The antiplane dynamic problem for a piezoelectric medium with a thin curvilinear piezoelectric inclusion is considered. The components of the electroelastic system are in perfect mechanical and electrical contact. The technique is based on the theory of singular perturbations with solutions presented through the corresponding Green's functions.

ВПЛИВ ЗМІНИ НАПРЯМКУ ОРТОТРОПІЇ НА ДИНАМІЧНУ ПОВЕДІНКУ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ЗА ДІЇ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ЇЇ ПОВЕРХНІ

Ольга Тужеляк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ,
oliatuzheliak@gmail.com

Розглянуто задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка містить N отворів довільної конфігурації. Серед них є N_1 отворів, на контурах яких задано компоненти переміщень, N_2 отворів, де задано компоненти зусиль та N_3 отворів, де задано комбінації компонент переміщень і зусиль. Конттури отворів позначаємо кривими $L^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$. Зовнішня межа пластини має довільну форму, а її контуром є три взаємодоповнюючі криві $L^{(N+1)}$, $L^{(N+2)}$ та $L^{(N+3)}$, на яких можуть бути задані різні крайові умови. На поверхні пластини діє гармонічне в часі довільне розподілене навантаження, яке задається функціями q , m_1 , m_2 .

Ключова система диференціальних рівнянь даної задачі в межах уточненої теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та всі інерційні компоненти, має вигляд

$$[L]\{U\} = -\{P\}, \quad \{U\} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}^T, \quad \{P\} = \{q, m_1, m_2\}^T,$$

$$L_{11} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{22} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{33} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{23} = (D_1 \nu_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$L_{32} = (D_{12} + D_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad L_{12} = -L_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad L_{13} = -L_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

де $D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{ij} \nu_{ji})}$, $D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3}$, $\Lambda_i = 2hG_{i3}$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. Тут

використано позначення статті [1]. Крайові умови наведені в [2]. Розв'язок задачі побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та послідовнісного представлення функцій Гріна [2]. Отримано числові результати для часткових випадків задачі про коливання прямокутної шарнірно опертої пластини, яка містить два отвори круглої форми з різними

типами закріплення за дії розподіленого навантаження на деякій прямокутній ділянці на поверхні пластини. Досліджено динамічну поведінку пластини у випадку зміни напрямку ортотропії матеріалу.

На рис. 1 показано зміну амплітуди прогину вздовж лінії розташування отворів (осі α_1) прямокутної шарнірно опертої пластини (товщина – $2h = 0.01$ м, сторони: $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м,) з двома круглими отворами ($R_1 = R_2 = 0.2$ м), на контурах яких задано компоненти переміщень, у випадку зміни напрямку ортотропії. Взято такі фізичні характеристики

пластини: $\rho = 2800$ кг / м³,

суцільна лінія – $E_1 = 159$ ГПа,

$E_2 = 63$ ГПа,

$G_{12} = G_{13} = 28$ ГПа,

$G_{23} = 13$ ГПа, $\nu_{12} = 0.27$,

$\nu_{21} = E_1 \nu_{12} / E_2$;

штрихова лінія – $E_1 = 63$ ГПа,

$E_2 = 159$ ГПа, $G_{12} = 13$ ГПа,

$G_{13} = G_{23} = 28$ ГПа,

$\nu_{21} = 0.27$, $\nu_{12} = E_1 \nu_{21} / E_2$. З

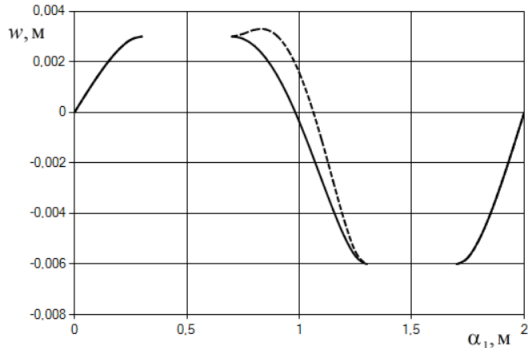


Рис. 1

рисунок видно, що у даній конфігурації зміна напрямку ортотропії суттєво впливає на амплітуду прогину пластини у зоні між отворами, на відміну від ділянок біля її межі.

1. *Shopa T. V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // *Materials Science*. – 2018. – **54**, No. 3. – P. 368–377.
2. *Shopa T. V., Tuzheliak O. I.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a set of holes of any shape with regard for the distributed load on the surface // *Materials Science*. – 2022. – **57**, No. 4. – P. 502–510.

INFLUENCE OF ORTHOTROPY DIRECTION CHANGE ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF THE PLATE WITH CUTOUTS UNDER DISTRIBUTED LOAD ACTING ON THE SURFACE

In the framework of a refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state transverse vibration of the orthotropic plate with any number of cutouts of the arbitrary geometrical form and location is constructed. An arbitrary harmonic in time distributed external load is applied on the surface of the plate. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method. Numerical results for partial cases of the problem are presented and the influence of orthotropy direction change on the dynamic behavior of the plate is investigated.

РОЗСІЯННЯ SH-ХВИЛІ ПРУЖНИМ ВОЛОКНОМ З ТОНКИМ МІЖФАЗНИМ ПЕЗОЕЛЕКТРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Юлія Максимів¹, Валерій Матус², Василь Пороховський³, Павло Турчин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹maksymiv.yulya@gmail.com, ²matus@iapmm.lviv.ua, ³porvas@iapmm.lviv.ua*

Розглянуто усталену за часом задачу розсіяння SH-хвиль пружним волокном неканонічної форми, що містить у необмеженій ізотропній матриці. На межі розділу складових композиту наявна тонке пезоелектричне включення низької жорсткості та змінної товщини, динамічна взаємодія якого з оточуючим середовищем моделюється асимптотично точними ефективними умовами, записаними на контурі волокна [1].

Переміщення у складових композиту задовольняють рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + k_j^2)u^j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_j \quad j=1,2, \quad (1)$$

та умови контакту на міжфазній поверхні

$$u^1(\mathbf{x}) = u^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad \mu_1 \frac{\partial u^1(\mathbf{x})}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u^2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_2,$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} (1 + \eta^2) [u^1(\mathbf{x}) - u^2(\mathbf{x})] = h(\mathbf{x}) \frac{\partial u^1(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_0,$$

$$\frac{\mu_0}{\max(\mu_1, \mu_2)} \ll 1, \quad (2)$$

де $u^1(\mathbf{x}) = u^s(\mathbf{x}) + u^{in}(\mathbf{x})$ та $u^2(\mathbf{x})$ – повні поля зміщень у матриці $W_1 = R^2 \setminus W_2$ та у волокні W_2 ($u^{in}(\mathbf{x})$ та $u^s(\mathbf{x})$ – набігаюча та розсіяна хвиля); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати з початком в W_2 ; S_0 та $S_1 = \partial W_2 \setminus S_0$ – лінії неідеального та ідеального контакту наповнювача з матрицею; μ_j та k_j ($j=1,2$) – модулі зсуву та хвильові числа поперечних хвиль складових композиту; μ_0 , η і $h(\mathbf{x})$ – модуль зсуву, коефіцієнт електромеханічного зв'язку і товщина тонкостінної неоднорідності; \mathbf{n} – зовнішня нормаль до ∂W_2 . Крім цього, виконується умова випромінювання на безмежності.

Розв'язок задачі (1)-(2) шукаємо за допомогою модифікованого методу

нульового поля [2, 3]. Враховуючи специфіку граничних умов (2), невідомі зміщення та напруження на контурі включення доцільно подати у вигляді

$$v(\theta) = \sum_{\sigma, m} x_{\sigma m}^1 C_{\sigma m}(\theta), \quad u^2(\theta) = \sum_{\sigma, m} x_{\sigma m}^2 C_{\sigma m}(\theta), \quad \theta \in S,$$

$$v(\theta) = \begin{cases} a Z(\theta) \frac{\partial u^1(\theta)}{\partial n}, & \theta \in S_1, \\ Z(\theta) [u^1(\theta) - u^2(\theta)], & \theta \in S_0, \end{cases} \quad (3)$$

Тут функція $Z(\theta)$ описує характер поведінки переміщень та напружень в околі вершин тонкостінної неоднорідності. У випадку заокруглених вершин, напруження мають кореневу особливість в їх околах, тому функція $Z(\theta)$ має вигляд, наведений у [2]. Підставляючи представлення (3) у рівняння нульового поля [1, 2], отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку для визначення невідомих коефіцієнтів $x_{\sigma m}^1, x_{\sigma m}^2$, яку розв'яжемо методом редукції.

Знаючи зміщення та напруження на контурі ∂W_2 , за допомогою відповідних інтегральних представлень [1, 2] отримаємо вирази для обчислення комплексних амплітуд розсіяння пружних хвиль у дальньому полі. За допомогою запропонованого аналітико-числового алгоритму проаналізовано вплив механічних та геометричних параметрів пружної структури на амплітудно-частотні характеристики *SH*-хвиль.

1. *Kunets Ya. I., Matus V. V.* Asymptotic Approach in the Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Bodies with Thin Elastic Inclusions // *J. Math. Sci.* – 2023. – **270**. – P. 87–106.
2. *Кушнір Р.М., Скальський В.Р., Кунець Я.І., Матус В.В., Окренкий Ю.С., Селівончик Т.В.* Руйнування пружних тіл із включеннями та його діагностування / Під заг. ред. Р.М. Кушніра. Т.1.: Теоретичні основи динамічних процесів у пружних тілах із включеннями. – Львів: НАН України, ІППИМ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023. – 280 с.

INTERACTION BETWEEN SH-WAVE AND ELASTIC INCLUSION GIVEN A THIN-WALLED INTERPHASE DEFECT OF LOW RIGIDITY

The problem of interaction of a plane time-harmonic SH-wave with an elastic inclusion of non-classical cross-sections, when an elastic thin inhomogeneity of low rigidity is present between the infinite elastic matrix and the fiber, is considered. The method employed is a modified null field approach.

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ОБРОБЛЕННЯ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Ярослав П'янило¹, Валентина Собко¹, Галина П'янило¹, Адріан Торський¹
Анатолій Попатьєв²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів,
²Львівський державний університет фізичної культури імені Івана Боберського, м. Львів

Вивчення медико-біологічних процесів в значній мірі базується на замірах певних параметрів процесів, які вивчаються та їх ефективному обробленні. Для ефективного використання заміряних даних необхідно: дослідити наявність періодичності; визначити інформативний інтервал та величину реперезентативної вибірки; відфільтрувати адитивні та мультиплікативні шуми; провести статистично-ймовірнісну обробку отриманих замірів; дані реперезентативної вибірки використати безпосередньо для вивчення процесу або для формулювання крайових задач.

Існує багато методів вирішення поставлених вище задач. Однак всі вони вимагають проведення великої кількості обчислень і не дають однозначної відповіді на сформульовані задачі. Для адекватного оброблення наявної інформації необхідно застосовувати різні статистично-ймовірнісні методи. Кореляція між результатами використовуваних методів дає можливість отримати доствірний результат.

Основними способами організації вибірки є: простий випадковий відбір; простий відбір з допомогою регулярної процедури (механічний); методи серійного відбору; комбіновані методи.

Для визначення скритих періодичностей застосовують: використання автокореляційної функції; застосування Фур'є аналізу; застосування перетворення Лапласа.

В роботі проведено аналіз методів оброблення медико-біологічної інформації, розглянуто задачі ідентифікації; запропоновано знаходження репрезентативної вибірки на базі коефіцієнта кореляції між параметрами різних процесів тощо. Проведено обчислювальний експеримент на експериментальних даних підготовки спортсменів. Отримані результати підтверджують ефективність застосування пропонуєваних методів.

ON ONE APPROACH TO THE PROCESSING OF MEDICAL AND BIOLOGICAL INFORMATION

In the work, based on experimental data, an analysis of methods of processing medical and biological information was carried out, in particular, the use of the correlation coefficient for the construction of calculation formulas for determining the size of a representative sample.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВНОГО ПРОЦЕСУ В ПОРИСТИХ ТІЛАХ З ВИКОРИСТАННЯМ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ

Ярослав П'янило¹, Софія Твардовська²

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹danylo794@gmail.com, ²sofi.lviv@gmail.com

Вивчення коливного процесу у пористих тілах під дією зовнішнього електричного поля розглядаємо на прикладі коливань пористого шару, до поверхонь якого прикладено змінну напругу. В такому випадку в шарі виникає змінне електричне поле, яке приводить до коливань скелету тіла та порової рідини, а також і їх відносного зміщення. Процес поширення електромагнітних хвиль описується системою рівнянь електромагнітної механіки як в частинних похідних [1, 2], так і в термінах похідних дробового порядку [3]. Розв'язно крайову задачу та отримано її розв'язок із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа-Карсона, що значно спростило процедуру знаходження розв'язку в зображеннях.

В результаті проведення числового експерименту встановлено, що коливання скелету та порової рідини осцилюють на усьому часовому проміжку. Спостерігається їх загасання. Такі дослідження є кількісною оцінкою характеристик матеріалу. Характер коливань для тиску і напружень має загасаючий характер і повторення екстремумів із певним періодом.

1. Фізико–математичне моделювання складних систем / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний та ін.; під ред. Я. Й. Бурака, Є. Я. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
2. Tvardovska S. Influence of external electric field on parameters of mechanical waves in saturated porous medium. – Task quarterly. – Vol.17, No. 3–4. 2013, Pp. 215–222.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

THE RESEARCH OF THE OSCILLATORY PROCESS IN POROUS BODIES USING BY FRACTIONAL TIME DERIVATIVES

The equations of electromagnetic mechanics are written in partial derivatives and in terms of the Caputo fractional derivative. Its solution is obtained using by the Laplas-Carson integral transformation.

ВИБІР ПАРАМЕТРІВ ПРОСТОРОВИХ ПОХІДНИХ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗУ

Назарій Лопух¹, Ярослав П'янило²

^{1,2}Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹lopuh.nazar@gmail.com, ²danylo794@gmail.com

Актуальною задачею є адаптація методу дробових похідних для моделювання фільтраційних процесів у тріщинувато-пористих середовищах і створення нелінійних математичних моделей дробових похідних, що дозволяють вирішити цю проблему. Формування таких моделей дасть можливість точніше прогнозувати обсяги видобутку газу з резервуарів із природною тріщинуватістю, а також моделювати вплив різних технологічних підходів на резервуар, які значно змінюють його структуру.

У реальних умовах наявність тріщин у пористому середовищі часто моделюється через просторово змінний коефіцієнт пористості. Однак під час моделювання фільтрації газу в таких середовищах можливе застосування ефекту дробових похідних. Визначення параметрів цих похідних за простором є непростим завданням. Створення таких моделей дозволить більш точно прогнозувати обсяги газовидобутку в формаціях із природною тріщинуватістю.

Процес масообміну в пористому середовищі аналізується шляхом дослідження фільтрації газу та рідини, яка може бути описана рівнянням, що містить дробову похідну за простором [1, 2].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu z} \frac{\partial^{\beta_x}}{\partial x^{\beta_x}} (p^2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu z} \frac{\partial^{\beta_y}}{\partial y^{\beta_y}} (p^2) \right) = 2mh \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z} \right) + 2qp_{at} \right). \quad (1)$$

У рівнянні (1) $\beta_x, \beta_y \in (0, 2]$ це значення порядків дробових похідних за координатами x та y , що описують природу нестационарного процесу фільтрації.

Тріщинуватість середовища може бути визначено через коефіцієнт проникності, або за допомогою просторових похідних дробового порядку

$\frac{\partial^{\beta_x} p}{\partial x^{\beta_x}}, \frac{\partial^{\beta_y} p}{\partial x^{\beta_y}}$. Існують різні варіанти до встановлення взаємозв'язку між

такими підходами. У цій роботі акцент зроблено на аналізі числових експериментів, які підтверджують обґрунтованість застосування підходу використання дробової похідної.

Досліджується проблема узгодження взаємозалежностей між тисками газу і проникності. Вибір параметрів β_y and β_x залежить як від фактичної проникності середовища, так і від розподілу тиску газу у досліджуваній області.

У контексті супердифузії розподіл значень коефіцієнта проникності відіграє вирішальну роль. Трагування його як постійного у традиційному підході призводить до дисбалансу обсягу газу. Щоб уникнути таких конфліктів, схема Грюнвальда[2] коригує коефіцієнти проникності в геометричних зонах, де існують значні відмінності тисків газу. Здійснюється така схема на кожній процедурній ітерації у МСЕ [2].

У проведених експериментах розглядаються різні випадки форм тріщиноватого середовища, та різні положення тріщинуваних зон відносно ділянки видобутку газу. Експерименти підібрані таким чином, щоб візуально відчуті ефект впливу тріщинуватості області на перебіг нестационарного процесу. Різні типи геометричних моделей пористих середовищ зроблених для числових експериментів по різному проявляють ефекти субдифузії та супердифузії.

Усі моделі фільтрації, розроблені у цьому дослідженні, відносяться до категорії рівнянь аномальної дифузії [3]. Аналіз обчислювальних експериментів виявляє залежність результатів від вибору параметрів, пов'язаних із порядком похідної за простором. Система сховища газу підтримує газовий баланс протягом всього періоду експлуатації. Експериментальні результати підтверджують поведінку тиску газу в пористих середовищах в умовах нетрадиційної фільтрації.

1. Lopuh N. B, Pyanylo Ya. D. Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics – 2014. – 2, No. 1. – P. 15-19.
2. Lopuh, N., Pyanylo, Y. Numerical model analysis of atypical gas filtration in a porous medium // 12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT 2022, 2022, pp. 1–4
3. Ciesielsk M., Leszczynski J. Numerical simulations of anomalous diffusion // CMM 2003 Conference Gliwice/Wisla Poland, June 3-6, 2003, (5pp).

SELECTION OF SPATIAL DERIVATIVE PARAMETERS FOR GAS FILTRATION MODELING

The article describes methods for modeling gas filtration in porous media, taking into account fractured zones. Corresponding numerical experiments have been conducted. The results of the experiment confirmed the behavior of the gas pressure in the presence of atypical filtering. It is found that the order the fractional derivative can serve as the parameter adaptation of the mathematical model.

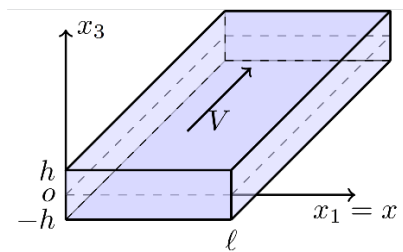
REFINED MATHEMATICAL MODEL OF FLUTTER FOR COMPOSITE PLATE-STRIP

Mykhailo Marchuk^{1,2}, Volodymyr Bodnar¹, Vira Pakosh^{1,2}

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, Lviv,
²Lviv Polytechnic National University, Lviv, mv_marchuk@ukr.net

Modern trends toward reducing material intensity while ensuring the necessary level of reliability in critical structures have led to an increased demand for thin-walled structures made of composite materials, particularly those reinforced with polymer matrices. The primary difference between such materials and traditional homogeneous isotropic materials is their susceptibility to transverse shear.

Plate elements are among the essential components of load-bearing structures in the aerospace industry [5]. Their mechanical behavior under operational, especially dynamic, loads often plays a crucial role in maintaining the integrity and functional suitability of these objects. This is especially relevant when the element is in an aerodynamic gas flow (see figure).



At certain flow velocities and with specific geometric and physical-mechanical characteristics of the plate, a process of self-excited vibrations with increasing amplitude may occur, potentially leading to the destruction of both the plate and the entire structure. This phenomenon is commonly known as flutter [2, 4]. Flutter in plates has been sufficiently studied using classical theories [1], which do not account for the specific deformation characteristics of composites. Therefore, it is essential to develop mathematical models of flutter for composite plates that allow for analytical solutions. These models, in addition to their practical value, can be used to verify numerical and experimental methods for studying the flutter of more complex objects.

In the proposed work, a rectangular plate is considered, with one dimension in the mid-plane significantly smaller than the other. Such a thin-walled element is usually called a plate-strip. One-dimensional relations of the refined plate theory [3] were used to model its dynamic deformation. This theory accounts for the

material's susceptibility to transverse shear and precisely satisfies the boundary conditions for the forces on the surface planes. Based on this, a solvable equation for the dynamic deflection w is derived:

$$w^{IV} - \frac{2\rho h}{D} \ddot{w} - \frac{2\rho h}{\Lambda} \ddot{w}'' - \frac{M_a}{D} \left(\frac{D}{\Lambda} w''' + \frac{D}{V} \dot{w}'' - w' - \frac{1}{V} \dot{w} \right) = 0, \quad (1)$$

where M_a – is a characteristic of the aerodynamic flow, which depends on the Mach number, which has a velocity V ; D and Λ are the bending and shear stiffnesses of the plate-strip, $2h$ is its thickness, and ρ is the material density.

To obtain an analytical solution to equation (1), a characteristic equation (2) for the mode parameters of self-excited vibrations was derived. Unlike the classical case, this equation is a full fourth-order polynomial. Its reduced form was constructed, and based on Ferrari's method an algorithm for solving it was developed and implemented in software. The algorithm was verified using known theoretical and experimental results.

1. *Chai Yuyang, Gao Wei, Ankey Benjamin, Li Fengming, Zhang Chuanzeng.* Aeroelastic Analysis and Flutter Control of Wings and Panels: A Review // International Journal of Mechanical System Dynamics (IJMSD). – 2021. – P. 5–34.
<https://doi.org/10.1002/msd2.12015>.
2. *Hebert Chad, Cowan Dave, Attar Peter J., and Weiseman Carol D.* Aerodynamic Flutter, NASA Langley Research Center, 2011.
3. *Osadchuk V.A., Marchuk M.V.* Mathematical Model of Dynamic Deformation of Shear and Compressive Composite Plates // Appl. Problems of Mechanics and Mathematics, Issue 3. – 2005. – P. 43–50 (in Ukrainian).
4. *Theodorsen Theodore and Garrick I.E.* Mechanism of Flutter a Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem // National Advisory Committee for Aeronautics. Report No 685, N.A.C.A., 1940.
5. *Ventsel E., Krauthammer T.* Thin Plates and Shells Theory: Analysis, and Applications. First Edition, CRC Press, 2001.

УТОЧНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФЛАТТЕРА КОМПЗИТИВНОЇ ПЛАСТИНИ-СМУГИ

Запропонована уточнена математична модель флаттера композитної пластини-смуги, що дозволяє отримати аналітичний розв'язок.

ПОШИРЕННЯ ЗГИННИХ ХВИЛЬ У ПЛАСТИНІ ІЗ ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ НЕКОНТРАСТНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Роман Андрійчук¹, Валерій Матус², Віктор Міщенко³

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹andriychukroman@gmail.com, ²matus@iapmm.lviv.ua, ³misch@iapmm.lviv.ua

Складовою частиною сучасних метаматеріалів є дифракційні решітки – це періодичні структури, які забезпечують активний контроль за поширенням хвиль у середовищах. Завдяки ретельному вибору дизайну решітки можна досягти контрольованого маніпулювання світловими, звуковими та вібраційними хвилями для створення широкого спектру практичних пристроїв. У доповіді досліджується поширення згинних хвиль у пластині з дифракційною решіткою, утвореною неконтрастними тонкостінними наскрізними включеннями.

Розглянемо необмежену тонку пластину товщини h , рух якої описується за допомогою гіпотез Кірхгофа. У пластині в умовах ідеального механічного контакту міститься періодична множина колінеарно розташованих наскрізних тонких прямолінійних пружних включень, які займають область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a + 2nd, 2|x_2| < h_0, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Тут $2a$, $2d$ та h_0 – довжина, період розташування та ширина включень (товщина включення дорівнює h). Відносна ширина неоднорідностей $\varepsilon = h_0 / a \ll 1$ – малий безрозмірний параметр. Розглядаються неконтрастності включення, рух яких також моделюється в рамках гіпотез Кірхгофа. Включення зондуються плоскою гармонійною хвилею згину. Із застосуванням методу сингулярних збурень [1] для взаємодії пластини із такою множиною розсіювачів отримано модель, яка описується стрибками кутів повороту, згинних моментів та перерізувальних сил на серединній лінії включень. Розв'язок задачі поширення хвиль згину у пластині за заданих стрибків на лінії включень отримано шляхом застосування перетворення Фур'є за координатою x_1 .

1. *Kunets Ya. I., Matus V. V. Asymptotic Approach in the Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Bodies with Thin Elastic Inclusions // J. Math. Sci. – 2023. – 270. – P. 87–106.*

PROPAGATION OF FLEXURAL WAVES IN A PLATE WITH A PERIODIC SYSTEM OF NON-CONTRAST INCLUSIONS

Spectral characteristics of bending waves propagating in a thin plate with a periodic set of collinear thin-walled non-contrast inclusions are investigated.

ПОШИРЕННЯ SH -ХВИЛЬ У ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ ІЗ ГРАТКОЮ ТОНКИХ НЕКОНТРАСТНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Роман Андрійчук¹, Юлія Максимів², Роман Рабош³

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
¹andriychukroman@gmail.com, ²maksymiv.yulya@gmail.com, ³rabosh@iapmm.lviv.ua

Тонкі пружні неоднорідності широко застосовуються як наповнювачі композитів, зокрема і за періодичного їх розташування. Окрім вирішення традиційних проблем оцінки міцності та деформативності таких структур, важливими є дослідження спрямовані на вивчення спектральних характеристик полів, розсіяних у них. З цією метою розглянуто двовимірну стаціонарну задачу розсіяння SH -хвилі одноперіодичним масивом колінеарних п'єзоелектричних тонких включень постійної товщини, розташованих в безмежному пружному ізотропному тілі (матриці). Всі включення, товщину яких характеризує малий параметр ϵ , мають однакові геометричні розміри та електро-пружні властивості. Із застосуванням методу сингулярних збурень [1] для взаємодії пружної матриці із такою множиною розсіювачів отримано модель, яка описується стрибками переміщень та напружень на серединній лінії включень. Ці стрибки пропорційні малому параметру, виражаються через задану набігаючу SH -хвилю і мають такий же вигляд, як і у випадку одиночного включення, тобто взаємодія розсіювачів у отриманій моделі не враховується. Розв'язок задачі поширення хвиль у матриці за заданих стрибків переміщень і напружень на лінії включень визначаємо застосуванням перетворення Фур'є за просторовою координатою. В результаті отримуємо суперпозицію плоских хвиль, що поширюються від лінії включень в напрямку на безмежність. Із аналізу цієї суперпозиції виявлено, що у низькочастотному діапазоні за певного співвідношення механічних параметрів матеріалів матриці та включень можливе або повне проходження, або повне відбиття SH -хвиль періодичною множиною колінеарно розташованих неконтрастних п'єзоелектричних розсіювачів.

1. *Kunets Ya. I., Matus V. V. Asymptotic Approach in the Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Bodies with Thin Elastic Inclusions // J. Math. Sci. – 2023. – 270. – P. 87–106.*

PROPAGATION OF SH-WAVES IN AN ELASTIC MATRIX WITH A GRATING OF THIN NON-CONTRAST PIEZOELECTRIC INCLUSIONS

In this report, using the singular perturbation method, a model of the interaction of an elastic matrix with a system of collinear periodically located piezoelectric thin non-contrast inclusions of constant thickness was obtained. The study was carried out under conditions of anti-plane wave loading.

МЕТОДИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ У МОДЕЛЮВАННІ ХАРАКТЕРИСТИК НАПІВПРОВІДНИКОВОГО P-I-N-ДІОДА (ГІДРОДИНАМІЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ)

Андрій Бомба¹, Ігор Мороз²

¹Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, abomba@ukr.net

²Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, igor_moroz@yahoo.com

Запропоновано методику математичного моделювання вольт-амперних характеристик (ВАХ) напівпровідникового об'ємного p-i-n-діода (рис. 1, схематичне зображення (a), геометрія задачі (b)), що ґрунтується на системному підході до вивчення досліджуваного електронного пристрою та проведенні аналізу фізичних процесів у ньому методами теорії збурень. Стаціонарні процеси протікання струму під дією прикладеної різниці потенціалів у високолегованих, контактних та активній областях діода розглядаються в гідродинамічному наближенні. Моделювання ВАХ зводиться до пошуку розподілів концентрацій носіїв заряду та потенціалу в структурних елементах досліджуваної системи. Основу математичної моделі складає традиційна нелінійна сингулярно збурена система рівнянь неперервності електронно-діркових струмів та рівняння Пуассона з відповідними граничними умовами [1,2,6]. Особливостями запропонованого підходу є подання розв'язку поставленої нелінійної задачі у вигляді асимптотичних рядів, які будуються шляхом використання методу примезових поправок теорії збурень [1,3-6], та врахування впливу бар'єрів (p-i-, n-i- переходів) [7] на формування електронно-діркової плазми в активній області p-i-n-діода.

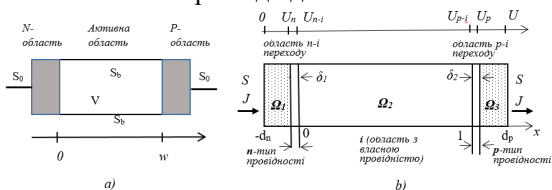
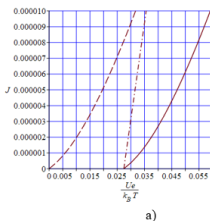


Рис.1.

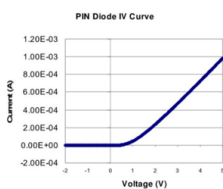
Застосування методу примезових поправок теорії збурень забезпечило можливість уточнити розподіли концентрацій носіїв заряду в зонах p-i- та n-i- контактів (у порівнянні із результатами досліджень, що виконувались межах наближення амбіполарної дифузії [2]) і, що важливо, виокремити розподіл електростатичного поля в активній області діода, яке в основному формується зарядами, які зосереджені у зонах контактів.

Застосовані у дослідженні методи забезпечують проведення декомпозиції вихідної задачі так, що отримані підзадачі мають нижчий рівень складності (вони є лінійними) та відповідне фізичне трактування. Зокрема, примезові поправки описують розподіли концентрацій носіїв заряду в так званих областях просторового заряду (ОПЗ) поблизу n-i- та p-i- контактів

структури, які (у свою чергу) породжують електростатичне поле у досліджуваній області і відповідне падіння потенціалу. Відмітимо, що заряд ОПЗ відіграє суттєву роль у формуванні уявної частини імпедансу структури. Регулярні складові розв'язку задачі описують властивості електронно-



a)



b)

діркової плазми активної області і, в основному, - дійсну частину імпедансу.

Проведено серію комп'ютерних експериментів (а), результати яких корелюються із відомими даними експериментальних досліджень (b) (рис. 2), розкриваючи суть останніх.

Рис. 2.

1. *Bomba A., Moroz I.* Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods // ACIT-2023 Conference Proceedings, Wroclaw, Poland. – P. 117-120.
2. *Sze S., Kwok K.* Physics of Semiconductor Devices. – New York: Wiley-Interscience, 2006. – 815 p. Doi: <https://doi.org/10.1002/0470068329>
3. *Vasil'eva A.B., Butusov V.F., Kalachev L.V.* The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. – SIAM, Philadelphia, 1995.
4. *Smith D.R.* Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 520 p.
5. *Белянин М.П.* Об асимптотическом решении одной модели р-п- перехода // Вычислительная математика и математическая физика. – 1986. – Т. 26. – №2. – С.306-311.
6. *Бомба А.Я., Мороз І.П.* Моделювання розподілу носіїв заряду в активній області р-і-п-структур методами теорії збурень // Вісник НУВГП. Серія: Технічні науки. – Рівне. – Вип. 1(97). – 2022. – С. 291-306.
7. *Пека Г.П., Стрїха В.І.* Поверхневі та контактні явища у напівпровідниках. – К.: Либідь, 1992. – 240 с.

PERTURBATION THEORY METHODS IN A SEMICONDUCTOR P-I-N DIODE CHARACTERISTICS MODELING (HYDRODYNAMIC APPROXIMATION)

A methodology for mathematical modeling of the current-voltage characteristics (CVC) of a semiconductor bulk p-i-n diode based on a systematic approach to investigate the electronic device under study and analyzing the corresponding physical processes using perturbation theory methods is proposed. Modeling the CVC comes down to searching for the distributions of charge carrier concentrations and potential in the structural elements of the studied system. The basis of the mathematical model is the traditional nonlinear singularly perturbed system of the continuity equations for electron-hole currents and the Poisson's equation with the corresponding boundary conditions. Features of the proposed approach are the representation of the posed nonlinear problem solution in the form of asymptotic series, which are constructed by using the method of boundary corrections.

ПРОГНОЗУВАННЯ РОБОТОЗДАТНОСТІ БІМЕТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА ЇХ ІНДУКЦІЙНОЇ ТЕРМООБРОБКИ

Олександр Гачкевич¹, Роман Мусій², Наталія Мельник³

¹Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, dept13@iapmm.lviv.ua
^{2,3}Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, ²roman.s.musii@lpnu.ua, ³natalia.b.melnyk@lpnu.ua

Біметалеві пластини (БП) є функціональними елементами багатьох пристроїв, що використовуються у електроенергетичній, машинобудівній та аерокосмічній галузях. При технологічній обробці БП, як правило, використовують індукційний нагрів (ІН).

Термомеханічну поведінку електропровідних елементів за ІН усталеним електромагнітним полем (ЕМП) достатньо вивчено і розглянуто, зокрема, в роботах [2, 4]. У сучасних технологічних процесах індукційної термообробки часто використовують також неусталені ЕМП (НЕМП). За такої дії у БП виникають нестационарні поля температури та напружень. За певних величин і градієнтів цих полів у кожному n -му ($n=1,2$) складовому шарі БП виникають інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$, значення яких можуть досягати межі пружної деформації $\sigma_d^{(n)}$ матеріалів складових шарів БП і, навіть, перевищувати її. Значення інтенсивності напружень у кожному шарі у площині їх контакту можуть перевищувати межу міцності σ_M з'єднання цих шарів. За умови $\sigma_i^{(n)} \geq \sigma_d^{(n)}$ БП втрачають роботоздатність як конструктивні елементи, а за умови $\sigma_i^{(n)*} \geq \sigma_M$ - втрачають властивості механічного контактного з'єднання шарів [3]. Тому дослідження роботоздатності БП при індукційному нагріві НЕМП є актуальною науковою та інженерно-технічною проблемою.

Розглянемо БП, віднесено до декартової системи координат $OXYZ$, площина XOY якої збігається з площиною $z=0$ з'єднання її складових шарів. БП обмежена основами $z=-h_1$ і $z=h_2$, які перебувають за умов конвективного теплообміну з довкіллям та вільні від поверхневого силового навантаження. Тут h_1 , h_2 - товщини складових шарів БП, а їх матеріали однорідні, ізотропні і неферромагнітні. Фізико-механічні характеристики матеріалів є сталими і рівними їх середнім значенням в розглядуваному діапазоні зміни температури. У площині $z=0$ БП виконуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного контактів [3]. БП підлягає індукційній термообробці НЕМП, яке задається значеннями

дотичної до основ БП компоненти $H_y^{(n)}(z, t)$ вектора напруженості магнітного поля, які описуються виразами [1]

$$H_y^{(1)}(-h_1, t) = H_y^{(2)}(h_2, t) = kH_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}) \cos \omega. \quad (1)$$

Тут H_0 - амплітуда синусоїдальних несучих електромагнітних коливань частоти ω ; k - нормувальний множник; β_1 і β_2 - параметри, що відповідають часам фронтів наростання і спадання НЕМП тривалості t_i . Вираз (1) дозволяє врахувати моменти включення і виключення НЕМП при індукційному нагріві.

Відомо [1, 2], що за дії НЕМП за частот ω з поза околу резонансних частот для таких полів термонапружений стан БП в основному визначається теплом Джоуля $Q^{(n)}$, яке зумовлює температурне поле $T^{(n)}$ і компоненти $\sigma_{ij}^{(n)}$ ($j = x, y, z$) тензора напружень та відповідні їм інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в n -му ($n = 1, 2$) складовому шарі БП.

Знайдено вирази $T^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)}$ та $\sigma_i^{(n)}$ за індукційного нагріву БП НЕМП вигляду (1). Чисельно проаналізовано ці величини залежно від амплітудно-частотних параметрів НЕМП і часу t_i тривалості індукційного нагріву БП. На основі зазначених вище умов встановлено граничні значення параметрів НЕМП, за яких втрачаються робоздатність та властивості контактного з'єднання використовуваних в інженерній практиці БП.

1. *Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В.* Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів, СПОЛЮМ, 2011. – 216 с.
2. *Подстригач Я.С., Буряк Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.* Термоупругость электропроводных тел. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.
3. *Musii R., Melnyk N., Dmytruk V.* Thermoelastic processes analyzer for piecewise homogeneous conductive structures subjected to pulsed electromagnetic action // Journal of Thermal Stresses. – 2018. – Vol. 41, iss. 9. – P. 1125–1135.
4. *Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R.* Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.

PREDICTION OF THE PERFORMANCE OF BIMETALLIC PLATES DURING THEIR INDUCTION HEAT TREATMENT

A methodology for assessing the performance of a bimetallic plate during its induction heat treatment with a transient electromagnetic field is proposed. The critical values of amplitude-frequency parameters and the duration of induction heating, at which the bimetallic plate loses its functionality as a structural element, have been established.

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИМ СТАНОМ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ СТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Олексій Ніколаєв¹, Марія Скіцка²

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків
¹a.nikolaev@khai.edu, ²m.skitska@khai.edu

У доповіді запропоновано новий високоєфективний метод визначення оптимального керування напружено-деформованим станом просторового багатозв'язного складеного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля. Метод розглянуто на прикладі стаціонарної осесиметричної термопружної задачі для простору зі сферичними включеннями і порожниною. Він базується на узагальненому методі Фур'є і зводить вихідну задачу до еквівалентної задачі оптимального керування, в якій стан об'єкту визначається нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, права частина яких параметрично залежить від керування. При цьому функціонал вартості вихідної задачі перетворюється на квадратичний функціонал, а обмеження на розподіл температури замінюється значенням норми керування в просторі l_2 . Метод також вирішує основну проблему еквівалентної задачі – неможливість отримання явної залежності стану системи від керування. В ньому запропоновано подання розв'язків нескінченних систем у параметричній формі, що дозволило звести еквівалентну задачу до задачі на умовний екстремум квадратичного функціонала, який явно залежить від керування. Подальший розв'язок цієї задачі знаходиться методом Лагранжа із застосуванням спектрального розкладу матриці квадратичного функціонала. Розроблений у статті метод строго обґрунтовано. Для всіх нескінченних систем доведено фредгольмовість їх операторів. Як важливий, необхідний для обґрунтування результат, вперше отримано оцінку знизу модуля багатопараметричного визначника розв'язувальної системи крайової задачі спряження – простір зі сферичним включенням – при розв'язанні її методом Фур'є. Доведено теорему, яка встановлює умови існування та єдиності в просторі l_2 розв'язку еквівалентної задачі або задачі оптимального керування без обмеження. Чисельний алгоритм засновано на методі редукції для нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проведено дослідження практичної точності чисельного алгоритму шляхом порівняння оптимального керування, отриманого при різних параметрах редукції. Розрахунки показали стійкість методу і достатньо високу точність навіть при наближенні граничних поверхонь на відносну відстань 0.2. Наведено графіки

оптимального розподілу температури при різних геометричних параметрах задачі та їх аналіз. Метод припускає розповсюдження на інші крайові задачі з різною геометрією.

1. *Николаев О. Г., Скицка М. В.* Локальна модель термопружного стану пористого матеріалу // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – № 1. – С. 161 – 168.
2. *Nikolaev O., Skitska M.* The method of determining optimal control of the thermoelastic state of piece-homogeneous body using a stationary temperature field // Radioelectronic and Computer Systems. – 2024. – № 2. – P. 98-119.

THE METHOD OF DETERMINING THE OPTIMAL CONTROL OF THE THERMOELASTIC STATE OF A PIECE-HOMOGENEOUS BODY USING A STATIONARY TEMPERATURE FIELD

The report proposes a new highly effective method for determining the optimal control of the stress-strain state of a spatially multi-connected composite body using a stationary temperature field. The method is considered on the example of a stationary axisymmetric thermoelastic problem for a space with a spherical inclusion and a cavity. It is based on the generalized fourier method and reduces the original problem to an equivalent problem of optimal control, in which the state of the object is determined by an infinite system of linear algebraic equations, the right-hand side of which parametrically depends on the control. At the same time, the cost functional of the initial problem is transformed into a quadratic functional, which depends on the state of the equivalent system and parametrically on the control, and the limitation on the temperature distribution is replaced by the value of the control norm in space l_2 . The paper proposes a presentation of solutions of infinite systems in a parametric form, which made it possible to reduce the equivalent problem to the problem of the conditional extremum of a quadratic functional, which clearly depends on the control. The further solution of this problem is found by the lagrange method with using the spectral decomposition of the quadratic functional matrix. The method developed in the article is strictly justified. For all infinite systems, the fredholm property of their operators is proved. As an important result necessary for substantiation, for the first time an estimate from below of the module of the multi-parameter determinant of the resolving system of the boundary value problem of conjugation – space with a spherical inclusion – was obtained when solving it by the fourier method. A theorem is proved that establishes the conditions for the existence and uniqueness of the solution of an equivalent problem or an optimal control problem without restrictions in space l_2 . The numerical algorithm is based on the reduction method for infinite systems of linear algebraic equations. Estimates of the practical accuracy of the numerical algorithm showed the stability of the method and sufficiently high accuracy even with the close location of the boundary surfaces. Graphs of optimal temperature distribution for various geometric parameters of the problem and their analysis are given. The method assumes extension to other boundary value problems with different geometries.

АНАЛІЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО РУХУ ПОРТАЛЬНОГО РОБОТА З ДВОЛАНКОВИМ МАНІПУЛЯТОРОМ

Мирослав Демидюк¹, Богдан Проць²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, m_demydyuk@ukr.net

^{1,2}Львівський національний університет ім. І.Франка, м. Львів, ²bogdan.prots@lnu.edu.ua

У доповіді обговорюємо дослідження субоптимального руху портального маніпуляційного робота. Актуальність дослідження зумовлена постійною потребою в удосконаленні наявних та створенні нових зразків маніпуляційних роботів із високими експлуатаційними показникам.

Кінематична схема портального робота наведена на рис. 1. Робот складається з каретки G і дволанкового маніпулятора O_1O_2B . Каретка під дією сили F поступально переміщується вздовж горизонтальної балки I , встановленої на вертикальних колонах 2 і 3. Колони нижніми кінцями закріплені на нерухомій основі. До каретки з допомогою циліндричного шарніра O_1 приєднано дволанковий маніпулятор, ланки якого з'єднані між собою циліндричним шарніром O_2 . Осі шарнірів O_1 , O_2 ортогональні площині OXY . На кінці другої ланки встановлено захоплювач (з вантажем). Робот виконує керований рух у вертикальній площині OXY . Поворот ланок маніпулятора відбувається під дією моментів сил u_1 , u_2 , прикладених відносно осей шарнірів O_1 , O_2 . Каретку й ланки маніпулятора вважаємо твердими тілами, тертям у системі нехтуємо, захоплювач (з вантажем) моделюємо точковою масою m (точка B).

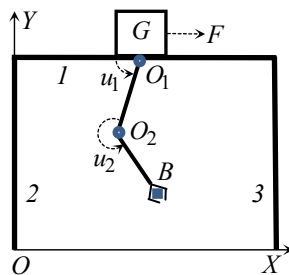


Рис. 1

Нехай задана транспортна операція робота: за заданий час T перенести вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве. Тут положення вантажу задаються в термінах узагальнених координат робота x , α , β (x – відстань від осі OY до полюса O_1 , α , β – кути відхилення ланок маніпулятора від вертикалі):

$$x(\tau) = x_\tau, \alpha(\tau) = \alpha_\tau, \beta(\tau) = \beta_\tau, \dot{x}(\tau) = \dot{\alpha}(\tau) = \dot{\beta}(\tau) = 0, \tau = 0, T, \quad (1)$$

де T , $(x_\tau, \alpha_\tau, \beta_\tau)|_{\tau=0, T}$ – задані сталі параметри операції, крапкою зверху над змінними позначено диференціювання за часом t .

Субоптимальний рух портального робота, що задовольняє умовам опе-

рації (1), знаходимо за умови мінімізації критерія якості руху $\Psi[x, \alpha, \beta]$, де Ψ – заданий функціонал на множині узагальнених координат портального робота. Для цього розв’язуємо таку задачу: визначити керування $F^*(t)$, $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0, T]$, які забезпечать виконання роботом транспортної операції (1) з мінімальним значенням функціонала $\Psi[x, \alpha, \beta]$. Тут за функціонал Ψ можна взяти, наприклад, квадратичний (за керуваннями) функціонал [1, 2], який (за певних припущень) оцінює енерговитрати робота під час виконання транспортної операції.

Субоптимальний розв’язок сформульованої задачі будемо методом параметричної оптимізації [1, 2]. Згідно з цим методом кожен узагальнену координату робота подамо у вигляді суми кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду. Коефіцієнти кубічного полінома визначаємо (в явному вигляді) з граничних умов (1), коефіцієнти тригонометричного ряду знаходимо у вигляді розв’язку допоміжної задачі нелінійного програмування, яку отримуємо із вихідної задачі зазначеною процедурою параметризації.

Побудований алгоритм реалізовано на мові програмування Java (в програмному середовищі IntelliJ IDEA Ultimate). Проведено серію числових розрахунків, які підтвердили ефективність використовуваного методу параметричної оптимізації керованого руху досліджуваного портального робота. На підставі отриманих результатів числового моделювання проаналізовано взаємовплив (у розрізі узагальнених координат) кінематичних та динамічних характеристик побудованого субоптимального процесу.

Розроблене алгоритмічно-програмне забезпечення можна використати в системах автоматизованого проєктування портальних маніпуляційних роботів, зокрема, під час побудови енергоощадливих режимів керування.

1. Demydyuk M.V. Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 746–758.
2. Demydyuk M. V., Hoshovs'ka N.V. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, Is. 2. – P. 174–88.

ANALYSIS OF SUBOPTIMAL MOVEMENT OF A PORTAL ROBOT WITH A TWO-LINK MANIPULATOR

We investigate the problem of optimization of motion laws of a portal robot with a two-link manipulator. The manipulator performs transfer operations in a vertical plane under the action of active actuators. The initial and final positions of the gripping robot, as well as the duration of the operation, are given. The quality of the robot motion is evaluated via a quadratic functional. The algorithm of constructing suboptimal solution of the problem, which is based on the parameterization of generalized coordinates of the robot by the sum of cubic polynomial and finite trigonometric series, a procedure for solving inverse problems of dynamics and numerical methods of nonlinear mathematical programming, is developed. The efficiency of the algorithm is illustrated on results of numerical modeling of the suboptimal motions of the investigated portal robot.

ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗМІННОЇ ТОЛЩИНИ СТІНКИ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ЯК ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Анатолій Дзюба^{1,4}, Раміз Азіз Іскандеров², Лариса Левітіна³, Володимир Сіренко⁴

^{1,3}Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, dzub@ua.fm,

²Азербайджанський університет архітектури та будівництва, м. Баку, r.iskanderov@gmail.com,

⁴Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля, м. Дніпро, v.n.sirenko@i.ua

Оболонкові та пластинчасті елементи широко та досить ефективно використовуються у різних галузях машинобудування, хімічної, нафтогазової промисловості, будівництві, тощо. Виходячи із прагнення економії матеріалу та (або) більш рівномірного розподілу напружень, такі конструктивні елементи часто можуть мати змінну в одному або двох напрямках товщину стінки та інші неоднорідності. Очевидними є також високі вимоги до виконання умов міцності, жорсткості, стійкості та, загалом, співвідношення міцнісної надійності та легкості (матеріаломісткості) таких конструктивних елементів. Це призводить до необхідності врахування досить значної кількості обмежуючих умов різної природи. Вирішення зазначеної проблеми зниження матеріаломісткості є особливо важливим в галузі розробки конструкцій ракетно-космічної техніки.

Застосування методів скінченно-вимірної оптимізації спільно з методом скінченних елементів часто обумовлене наявністю досить великою розмірності виникаючої оптимізаційної задачі та складностями перебудови скінченно-елементної сітки на кожному кроці пошукового алгоритму у зв'язку з поточними змінами варійованих геометричних розмірів елементів конструкцій.

Зазначені аспекти проблеми зумовлюють необхідність розробки нових більш досконалих математичних моделей та маловитратних методів їх прямого розрахунку, а також алгоритмів оптимального проектування, які надавали б якомога більше можливостей для визначення, часто досить значної кількості, варійованих змінних та врахування різноманітних обмежень на параметри стану і особливостей поведінки конструкції за мінімальних обчислювальних витрат на пошук оптимального проекту.

Розглядається задача оптимізації змінної як у меридіональному, так і в окружному напрямку товщини стінки оболонки обертання з довільною у меридіональному напрямку формою при несиметричному навантаженні.

Поданий у роботі підхід ґрунтується на спільному використанні методу прямих та необхідних умов оптимальності у формі принципу максимуму Понтрягіна та спрямований на вирішення проблеми зниження матеріаломісткості неоднорідних оболонок обертання змінної жорсткості складних конструкцій нової техніки.

Для побудови алгоритму розв'язування задачі прямого розрахунку та формулювання задачі оптимізації в термінах теорії оптимального керування пропонується звести систему рівнянь стану оболонки обертання при несиметричному навантаженні у частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами з використанням диференційно-різницевого методу прямих.

Таким чином, оболонка в окружному напрямку умовно поділяється на M смуг шляхом заміни частинних похідних за окружною координатою на їх наближені центральні кінцево-різницеві значення четвертого ступеня точності. Для кожної з таких смуг утворюється система 8 -ми звичайних диференціальних рівнянь.

Прямий розрахунок оболонки здійснюється шляхом послідовного (в окружному напрямку) розв'язування таких окремих для кожної смуги систем диференціальних рівнянь методом ортогональної прогонки з урахуванням коефіцієнтів скінченно-різницевого розкладення, що не належать до поточної смуги, які уточнюються ітераційним шляхом за результатами певної кількості повних обходів. Для прискорення ітераційного оптимізаційного алгоритму та зменшення обчислювальних витрат застосовується метод імітаційного прогнозування.

Використання необхідних умов оптимальності у формі принципу максимуму Понтрягіна для системи утворених таким чином $8 \times M$ звичайних диференціальних рівнянь дозволяє побудувати коректну математичну модель оптимізації, а також врахувати різноманітні умови деформування конструкції, довільні обмеження на зміну її стану, що включають умови міцності, жорсткості, стійкості, конструктивні умови та побудувати ефективний алгоритм реалізації підходу загалом.

Результати вагової оптимізації товщини стінки несиметрично навантаженої циліндричної оболонки подані у вигляді отриманих конфігурацій оптимальної зміни жорсткості оболонки, графіків та відповідного порівняльного аналізу, що демонструють переваги запропонованого підходу.

WEIGHT OPTIMIZATION OF VARIABLE WALL THICKNESS OF SHELLS OF ROTATION AS AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

The methodology of applying elements of the theory of optimal processes in the presence of arbitrary restrictions on varying functions and phase variables, as well as its application for reducing the material intensity of elements of shell structures of modern mechanical engineering, is described.

ЗАСТОСУВАННЯ «МЕТОДУ ЧАСУ» ПРИ ВИГОТОВЛЕННІ КОНСТРУКЦІЙ АДИТИВНИМИ ТЕХНОЛОГІЯМИ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЇХ МІЦНІСНИХ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

Валерій Сатокін

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро, ofsale@gmail.com

Аналіз наявної інформації механічних властивостей конструкцій, виготовлених 3D-друком з пластику показав відхилення значень межі міцності в готових конструкціях від значень межі міцності на зразках, та від заявлених виробником значень у паспорті на використовуваний матеріал. ДП «КБ «Південне» були проведені додаткові випробування на міцність зразків, використовуваних для 3D-друку пластикових матеріалів і подальший аналіз отриманих результатів. Досліджувались зразки матеріалу, надруковані трьома схемами. Напрямок друку – вертикально вгору – вісь Y. Друк шарів для всіх зразків відбувався по однаковій схемі (див. рис. 1).

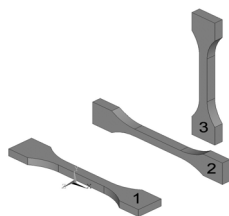


Рис. 1 – Схема друку досліджуваних зразків

Були отримані наступні результати: зразок 1 має 98% від заявленої міцності; зразок 2 має 95% від заявленої міцності; зразок 3 має 73% від заявленої міцності. Аналіз наявної інформації в Internet, даних виробників і проведених в ДП «КБ «Південне» досліджень привів автора до наукового відкриття, яке отримало назву «метод часу» – керування, контролювання і уніфікація часу на друк одного шару дозволяє досягти максимальних механічних властивостей конструкцій, виготовлених за адитивними технологіями.

«Метод часу» названий тому, що єдиним змінним параметром при виготовленні зразків є час, який витрачається принтером на друк одного шару конструкції. Цей же час і є часом, який має шар конструкції перед друком наступного шару на охолодження, полімеризацію, затвердіння та інше. Час друку одного шару конструкції залежить виключно від її площі, тому для порівняння часу друку зразків 1, 2 і 3 використовуватимемо порівняння перерізів Z-X. У зразка 1 – однакове значення за весь час друку, і воно найбільше з трьох зразків. Аналіз значень міцності показує, що характер залежності механічних властивостей зразка від часу друку одного шару не має лінійного характеру. Але, чим менший час від друку одного шару конструкції до другого, тим нижча межа міцності зразка. Це пояснюється тривалістю і температурою полімеризації надрукованих шарів зразків. Час на друк кожного шару зразка 1 однаковий, що є важливим фактором для отримання вищої межі міцності.

Також був проведений аналіз властивостей конструкцій з металу, виготовлених адитивними технологіями, який показує, що застосування для їхнього друку «методу часу» дозволить покращити і оптимізувати їх механічні властивості, оскільки для надрукованих металевих зразків і конструкцій теж спостерігається розбіжність у властивостях в залежності від напрямку друку,

хоча й менша. На рис. 2 наведені зображення різних стадій друку металеві конструкції, як окремі кадри відео процесу друку [1].

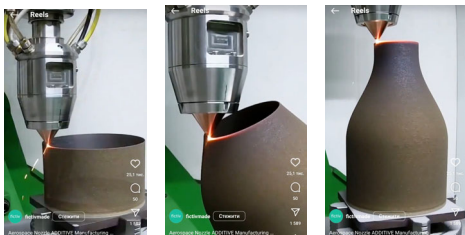


Рис. 2 – друк металевих матеріалів

При нагріванні металів до визначених температур відбувається зміна їх кольору – «кольори мінливості». Явище утворення переливчастої строкато забарвленої оксидної плівки є наслідком інтерференції в ній. Для металів при нагріванні кольори мінливості раніше (до появи пірометрів) використовували в якості індикатора температури нагрівання. Різний колір вказує на різну температуру нагрівання. Там, де друкується широка частина виробу, синьо-фіолетового кольору немає, а там, де вузька – є. Це є наслідком того, що час друку одного шару у вузькій частині є меншим і тому відбувається розігрівання виробу. Це спричинює зміну фізико-механічних властивостей і у підсумку – до різномірної структури готового виробу.

Отже, для отримання оптимального механічного стану конструкції необхідно, щоб від початку друку одного до початку друку наступного шару, час був однаковим для всіх шарів. Це досягається встановленням паузи в системі друку перед переходом до друку наступного шару. Швидкість друку кожного шару однакова, відрізняється тільки пауза перед друком наступного шару. Наприклад, найбільший шар друкується за 23 с, найменший за 4 с, тоді пауза між друком наступного після найменшого шару повинна тривати 19 с, а потім продовжується друк. Проводити друк конструкції треба так, щоб час від початку друку одного шару до початку друку наступного шару був не меншим аналогічного часу для зразка типу 1, котрий визначається індивідуально для кожного використовуваного матеріалу.

Для аналізу впливу часу друку на міцність та отримання її оптимального значення, пропонується провести дослідження, в якому в два, три і чотири рази збільшити час на друк одного шару порівняно з часом, потрібним на друк одного шару зразка типу 1. І хоча такий спосіб друку збільшить час на виготовлення конструкції, але в результаті з'являється можливість отримати конструкцію з більшим значенням межі міцності. Відкриття було зроблене 10 серпня 2022 року. Величезна вдячність Олені Рудаковій та Сергію Багмуту – за натхнення, обговорення, заперечення і тривалі дискусії, саме вони підштовхнули автора до описаного вище відкриття.

1. *Video Reels* профілю @fictivmade в мережі Instagram. Назва допису «Aerospace Nozzle ADDITIVE Manufacturing». 08 лютого 2024 року. www.fictiv.com

APPLICATION OF THE "TIME METHOD" IN THE MANUFACTURE OF STRUCTURES USING ADDITIVE TECHNOLOGIES FOR INCREASE THEIR STRENGTH AND EXPLOITABLE PROPERTIES

Considered scientific discovered "method of time" in process of finding a solution to the problem of reducing the strength of printed structures in accordance with the manufacturer's data.

ДОСЛІДЖЕННЯ СИЛИ ЗАТЯГУВАННЯ ШПИЛЬКОВОГО З'ЄДНАННЯ

Володимир Харченко¹, Дмитро Клименко²

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро
¹volodymyrmx@gmail.com, ²klymenko_dv@hotmail.com

Затяжка стиків конструкцій з контрольованою силою є необхідною умовою забезпечення їх статичної і циклічної міцності при експлуатації. Найбільш поширеним способом контролю сили затягування кріплення при складанні конструкції є затягування кріплення за допомогою моментного ключа. Сила затягування кріплення при заданому моменті на ключі залежить від багатьох факторів: матеріалів кріплення і з'єднаних елементів стиків, чистоти поверхні контактних пар, марки мастила тощо [1].

Мета даної роботи – визначити залежність сили затягування від моменту затягування шпилькового з'єднання М8×1,0 для різних умов складання.

Вирішення поставленої задачі проводилось експериментально. Шпилькове з'єднання закріплювали в спеціальному технологічному оснащенні і прикладали до гайки крутний момент. При цьому фіксували силу розтягування шпильки і її деформацію. Проведено низку досліджень по визначенню залежності сили затягування і тримкої здатності від моменту затягування кріплення (шпилька зі сталі 03X11Н10М2, гайка зі сталі 09X16Н4Б, шайба зі сталі 65Г, мастило ЦИАТИМ-221). В результаті досліджень визначено руйнуючу осьову силу при попередньому затягуванні кріплення і без затягування, тримку здатність кріплення при затягуванні моментним ключем, залежність сили затягування кріплення від моменту затягування, вплив багаторазового складання-розбирання на силу затягування.

Одержані результати використовують при призначенні моменту затягування різьбових з'єднань для забезпечення міцності конкретних силових конструкцій [2].

1. Биргер И.А., Иосилевич Г.Б. Резьбовые и фланцевые соединения. – М.: Машиностроение, 1990. – 368 с.
2. Харченко В.М. Моделирование та визначення напруженого стану стиків ракетних конструкцій із композиційних матеріалів // Прикладні проблеми механіки і математики. Науковий збірник. – 2017. – Вип. 15. – С. 185-190.

STUDY OF THE TIGHTENING FORCE OF A STUD CONNECTION

Results of researches by definition of dependence of force of an inhaling and bearing ability from the tightening moment of a threaded connection M8×1,0 (a hairpin from a steel 03X11H10M2, nut from a steel 09X16H4B, washers from a steel 65G, greasing ЦИАТИМ-221) are resulted.

INFLUENCE OF HYDROGEN ON THE STRENGTH OF METALS

Bogdana Gayvas¹, Veronika Dmytruk²

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, bogdana.gayvas@gmail.com;

²Lviv Polytechnic National University, Lviv, dmytruk15@gmail.com

The advancement of technology requires an increase in the strength of structural materials while simultaneously ensuring reliability, which is determined by fracture toughness. When evaluating the strength and durability of structures, it is necessary to consider changes in the physical and mechanical properties of materials under the influence of external environments. The strength of materials is related to the regularities of crack initiation and growth in metals of various scales caused by hydrogen [1].

Currently, the significance of theoretical models is growing, as they allow for the prediction of hydrogen-induced crack growth characteristics and numerical experiments [2]. As a result, numerous hydrogen materials science centers have been established worldwide. In Ukraine, there are also well-known laboratories for its study, particularly the school of Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine in Lviv: G.V. Karpenko, Z.Sh. Krypiakievych, Yu.I. Babey, V.I. Pokhmursky, I.I. Vasylenko, V.V. Panasyuk, V.I. Tkachev, O.E. Andreykiv, M.M. Shved, V.O. Gembara, V.I. Fedorov, and their colleagues. In the works of Andreykiv O.E., Gembara V.O., Dolinska I.Ya., et al, issues have been developed concerning the interaction of hydrogen with the surface of metal systems, its mass transfer taking into account surface reactions and the real structure of the metal, changes in physical and physicommechanical properties, and a review of methods and installations for determining hydrogen content in metals [1, 3].

The problem of hydrogen interaction with metals has emerged from other fields due to the prospects for the development of aerospace technology, nuclear, thermonuclear, and hydrogen energy, and new metal processing technologies. Hydrogen acts as a cooling element-agent in the rotors of turbo generators during electricity generation. The use of hydrogen in metal-hydrogen systems of nuclear and thermonuclear power plants is increasing, as a fuel for rocket and aviation engines and transport systems.

Accumulating technical experience in the design, construction, and operation of structures is of great importance, with significant advances in mathematical modeling of processes of hydrogen degradation of metals based on physical and mechanical theories of their deformation and interaction with hydrogen. This involves describing problems in determining the fracture toughness characteristics of materials at the crack growth stage under extreme conditions of high pressure and temperature of the environment, which complicate the measurement of crack

length by optical methods during prolonged and cyclic loading. It has been found that higher-strength structural materials are more susceptible to hydrogen effects. The effect of hydrogen increases with its pressure. Therefore, the development of adequate methods for studying the hydrogen resistance of metals is necessary to ensure control over the corresponding qualities of materials and provide the necessary data for calculating the strength and durability of structures.

To solve this complex problem in metal-environment systems, the following interrelated factors have been highlighted:

- a) The pressure of hydrogen gas released in the metal in micropores;
- b) Hydrogen-induced decohesion in the metal lattice (weakening of adhesion forces);
- c) The effect of hydrogen on dislocation mobility;
- d) Surface impact (chemisorption);
- e) Chemical interaction of hydrogen with alloy components, leading to the formation of hydrogen-containing compound phases (hydrides).

Research on the corrosion of metals is distinguished at different structural levels (micro and macroscopic), which is caused by increased microheterogeneity (microlocalization). At the macro level, there is a reduction in the deformation strength characteristics of metals and an increase in signs of brittle fracture. In this regard, a dislocation-decohesion concept of hydrogen's effect on metal fracture has been developed. Based on this, a problem of the residual resource of the pipeline under laminar oil flow is formulated, taking into account the degradation of the material and multiple hydraulic shock.

The solving of the developed problem will allow evaluating the residual strength and durability of the pipeline material in the working environment, which depends, in its turn, on the process rate, on temperature, and on the hydrogen environment pressure.

1. *Andreykiv O., Dolinska I., Nastasiak S., Zviahin N.* Development of a Method for Determining the Residual Life of Structural Elements with Cracks Under the Action of Load and Corrosive Environment, as well as the Application of Corrosion Inhibitors to Enhance It. *Corrosion*, 2024. – Vol. 80 (5) . – P. 530–538.
2. *Andreykiv O., Dolinska I., Nastasiak S., Svirchevskiy O.* Propagation of High-Temperature Creep Cracks in Metals Under the Influence of Hydrogen and Neutron Irradiation. *Procedia Structural Integrity*, 2024. – Vol. 59. – P. 182–189.
3. *Pelek B. L., Syasky, A. A.* Stress distribution around holes in shear-compliant anisotropic shells. Kyiv: Naukova Dumka, 1975. – 197 p.

ВПЛИВ ВОДНЮ НА МІЦНІСТЬ МЕТАЛІВ

Сформульовано задачу про залишковий ресурс трубопроводу за ламінарного потоку нафти з урахуванням деградації матеріалу і багаторазових гідроударів.

МАСШТАБНІСТЬ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ УРАЖЕНЬ СКЛАДНИХ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Олександр Поліщук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
od_polishchuk@ukr.net

Поняття захищеності реальної складної мережевої системи (МС) та класифікації типу цілеспрямованої атаки на неї тісно пов'язані із визначенням масштабності цієї атаки та її наслідків. Зокрема, доцільно розрізняти:

1) масштабність запланованої та здійсненої атаки, яка визначається кількістю цілей, що передбачається уразити, та кількістю задіяних для цього засобів, наприклад, 50 об'єктів енергетичної інфраструктури та 100 крилатих і балістичних ракет, спрямованих на них для знищення;

2) масштабність безпосереднього ураження, тобто кількість цілей, критично пошкоджених або повністю знищених унаслідок атаки, наприклад, із 100 запущених ракет 85 були збиті засобами протиракетної та протиповітряної оборони, а 15 ракет, що залишились, уразили 10 цілей; у цьому випадку масштабність безпосереднього ураження дорівнює відсотку знищених об'єктів із числа запланованих;

3) масштабність опосередковано постраждалих елементів системи, тобто кількість об'єктів, яким було заподіяно певної шкоди унаслідок здійсненої атаки окрім безпосередньо уражених, наприклад, введення графіків відключення світла, спричинених послідовно-одночасними атаками на енергетичну інфраструктуру України.

Масштабність безпосереднього ураження пов'язана із кількісним показником захищеності МС, який дорівнює відсотку знищених засобів ураження із усіх задіяних. Масштабність опосередкованого ураження, як і рівень захисту від нього, обчислити значно складніше, адже вона повинна враховувати порушення структури та дестабілізацію роботи усіх елементів МС і навіть морально-психологічну шкоду, заподіяну унаслідок атаки. Із масштабністю опосередкованого ураження можна пов'язати поняття чутливості системи до наслідків негативного впливу, як відношення кількості безпосередньо уражених до числа опосередковано постраждалих її елементів. Очевидно, що чим ближчим є значення цього показника до нуля, тим чутливішою до цілеспрямованих атак є система, оскільки невелика кількість безпосередньо уражених породжує велике число опосередковано постраждалих елементів МС.

Масштабність ураження можна кількісно визначати, як у статті [2], порівнюючи структурні і потокові моделі МС до, під час та після цілеспрямованої атаки. Питома вага «обнулених» елементів та рядків і стовпців відповідних матриць суміжності визначає кількість безпосередньо уражених зв'язків та вузлів системи. Опосередковано постраждалими у структурній моделі МС

можна вважати лише суміжні із безпосередньо ураженими вузли та поєднуючі їх зв'язки. Такий підхід достатньо адекватно відображає рівень втрат для асортативних, наприклад, біологічних чи соціальних мереж [1]. Однак, для дисасортативних мереж, до яких належать більшість створених людиною промислових, економічних, фінансових, транспортних, інформаційних та інших систем він є непридатним, оскільки у них багато вузлів пов'язані не прямими зв'язками, а шляхами, визначити які лише на підставі структурної моделі достатньо складно. У цьому випадку більш адекватною є потокова модель системи, а саме, області та потужності вхідного та вихідного впливу та посередництва сукупності безпосередньо уражених вузлів [2] достатньо однозначно визначають усі опосередковано постраждалі елементи МС. Це пояснюється тією обставиною, що вузли-приймачі та вузли-генератори потоків потрібно якимось чином замінити, а для транзитних вузлів – знайти альтернативні шляхи руху цих потоків. Все це має конкретний фінансовий вимір, який і можна використати для підрахунку рівня втрат, що зазнає система. Дійсно, унаслідок санкцій проти росії через її агресію в Україну свої ринки збуту (кінцеві приймачі потоків) втратили чимало провідних компаній світу. У багатьох із них принаймні тимчасово виникли серйозні проблеми із постачанням енергоресурсів та сировини, тобто постало завдання заміщення вузлів-генераторів потоків певного типу. Суттєво також обмежився рух транзитних потоків через територію росії, що потребувало знаходження альтернативних і, зазвичай, дорожчих та довших шляхів руху цих потоків. З подібними обставинами, але вже унаслідок бойових дій на своїй території, зіткнулася і Україна. Слід також враховувати, що навіть повітряні тривоги, які оголошуються унаслідок зльоту носіїв ракет, але не супроводжуються реальним ударом, також призводять до перебоїв у роботі навчальних і медичних установ, а також багатьох торговельних, транспортних, державних та промислових підприємств, та породжують панічні настрої у населення тих регіонів, які постійно страждають від реальних нападів. Тому є сенс вважати, що характер атаки слід визначати не лише за кількістю безпосередньо уражених елементів МС, але й за масштабами опосередкованих втрат, заподіяних системі.

1. *Noldus R., Van Mieghem P.* Assortativity in complex networks // *Journal of Complex Networks.* – 2015. – 3, № 4. – pp. 507-542.
2. *Polishchuk O., Yadzhak M.* On the Vulnerability and Protection Strategies of Complex Network Systems and Intersystem Interactions // *CEUR-WS.* – 2023. – 3538. – pp. 267-281.

THE SCALE AND CLASSIFICATION OF COMPLEX NETWORK SYSTEM LESIONS

Means for determining the scale of real-world complex network systems lesions and methods for classifying the targeted attacks based on them are proposed. Indicators of the level of system protection against various negative influences and its sensitivity to the consequences of such influences are defined.

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАСОБІВ АКТИВНОГО ЗАХИСТУ СКЛАДНИХ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Олександр Поліщук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
od_polishchuk@ukr.net

Одним із дієвих способів захисту реальних мережесистем (МС) від цілеспрямованих атак є застосування так званих активних засобів захисту або контратака на нападника [1]. У випадку російської агресії проти України таким способом є фінансово-економічні санкції, контрнаступи для звільнення захоплених агресором територій країни, знищення його бойових підрозділів, логістичних вузлів та центрів управління військами тощо. Зрозуміло, що організатори таких контратак також несуть чималі втрати. Тобто, постає проблема оптимізації сценаріїв активного захисту, а саме, як знищивши або заблокувавши роботу мінімальної кількості вузлів атакуючої системи, заподіяти їй якнайбільшої шкоди. Очевидно, що при цьому доцільно враховувати не лише масштабність безпосереднього негативного впливу, але й масштабність опосередкованих наслідків ураження.

Покажемо, що використання потокових λ -серцевин порівняно зі структурними k -серцевинами мережесистем є значно ефективнішим під час побудови сценаріїв активного захисту як з погляду можливого ураження функціонально найважливіших елементів МС, так і з метою оптимізації цих сценаріїв за кількістю об'єктів атаки. Тут під k -серцевиною МС ми розуміємо найбільшу підмережу вихідної мережі, центральність за структурним ступенем вузлів якої є не меншою значення $k > 1$ [3], а під її потоковою λ -серцевиною – найбільшу підсистему вихідної системи, елементи потокової матриці суміжності якої мають значення не менші ніж $\lambda \in [0, 1]$ [2]. Розглянемо у якості прикладу залізничну транспортну систему (ЗТС) західного регіону України. На рис. 1а відображено структуру цієї системи, а на рис. 1б – цю ж структуру, але у вигляді зваженої мережі, яка схематично відображає об'єми руху вантажних потоків, які пройшли її ребрами протягом 2021 року (товщина ліній є пропорційною об'ємам потоків). Зазначимо, що загалом ця мережа містить 354 вузли, однак на рис. 1а-б відображено лише 29 вузлів та 62 ребра (транзитні вузли зі структурним ступенем 2 не відображаються, а ребром вважаємо лінію, яка поєднує два вузли зі ступенем, більшим ніж 2). На рис. 1в міститься структурна 4-серцевина ЗТС, до складу якої входить 12 вузлів та 35 ребер, а на рис. 1г – її потокова $0,8$ -серцевина, яка містить 4 вузла та 12 ребер. Одним із основних недоліків k -серцевин порівняно із потоковими серцевинами є можливість виключення функціонально важливих складових мережесистеми (шлях А-В на рис. 1г).

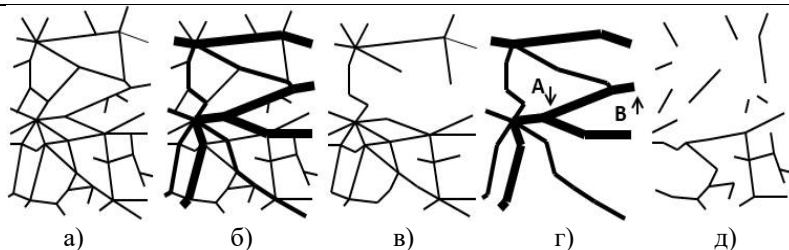


Рис. 1. Приклади структури (а), процесу функціонування (б), структурної 4-серцевини (в), потокової 0,8-серцевини (г) та доповнення до потокової 0,8-серцевини у вихідній структурі (д) залізничної транспортної системи західного регіону України

Очевидно, що потокова 0,8-серцевина відображає функціонально важливішу підсистему ЗТС і ціллю групової атаки на неї є значно менша кількість вузлів, ніж 4-серцевини відповідної структури. Легко переконатись, що в обидвох випадках успішна атака на виділені за допомогою k - та λ -серцевин вузли МС призведе до фактичного припинення процесу її функціонування, оскільки поділяє мережу на незв'язні складові (рис. 1д), але у другому випадку мета атаки досягається значно меншими (у три рази з погляду кількості вузлів та ребер) зусиллями. Таким чином, потоковий підхід дає змогу будувати значно оптимальніші з погляду зусиль атакуючої сторони сценарії активного захисту, ніж структурний. Зазначимо, що запропоновані способи можна успішно використовувати для протидії поширенню нецільових уражень різних типів, наприклад, епідемій небезпечних інфекційних захворювань тощо [2].

1. *Поліщук О.* Стратегії захисту складних мережевих та багатопарових мережевих систем від цілеспрямованих атак та нецільових уражень // 36. праць 1-ї Міжн. наук.-практ. конф. «Інформаційні системи та технології: результати і перспективи» (IST 2024). – Київ, Україна. – 6 березня 2024 р. – С. 218-221.
2. *Поліщук О., Яджак М.* Моделі та методи комплексного дослідження складних мережевих систем та міжсистемних взаємодій. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2023. – 385 с.
3. *Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F.F.* K-core organization of complex networks // Physical review letters. – 2006. – 96, № 4. – 040601.

OPTIMIZATION OF ACTIVE PROTECTION STRATEGIES FOR COMPLEX NETWORK SYSTEMS

Methods for optimizing scenarios of active protection of complex network systems against targeted attacks and non-target lesions of various types are proposed. A real example shows that the use of flow cores of the system is much more effective than the use of its structural cores.

СИСТЕМА ВИЯВЛЕННЯ МІСЦЕЗНАХОДЖЕННЯ ПОРАНЕНИХ ВІЙСЬКОВОСЛУЖБОВЦІВ

Христина Середницька¹, Микола Шевцов², Олексій Пушкарик², Олександр Ковальчук²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів, ser.kristina@gmail.com

²Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, mykola.shevtsov@lnu.edu.ua, oleksii.pushkaryk@gmail.com, sashakovalchuk1955@gmail.com

Дослідження, що стосуються оборони Держави є актуальними на даний час і важливими для збереження життя і здоров'я військовослужбовців у місцях військових дій. Одним з таких завдань є надання швидкої допомоги бійцям на полі бою. Багато розробок в цьому напрямку пов'язані з швидким виявленням та евакуацією поранених з зони бойових дій. Всі вони базуються на використанні давачів з вбудованими GPS для передачі координат з місця отримання поранення. Проте виявлення факту поранення і його ступені важкості потребує застосування більш складніших та ефективніших систем з врахуванням їх вартості.

В даній доповіді запропоновано прототип системи виявлення місцезнаходження поранених за допомогою відстеження можливих падінь військовослужбовців. Дана система є доволі простою і не потребує великих затрат, може бути використана в зонах бойових дій, які знаходяться на невеликих відстанях від рятувальної служби. Система створена на основі мікроконтролера ESP-32 за допомогою акселерометра і гіроскопа. Принцип роботи наступний - давачі подають сигнал про падіння, мікроконтролер активує Bluetooth модуль для відправлення оповіщення на смартфон, тоді отримане оповіщення через додаток, який використовує Wi-Fi надсилається у вигляді повідомлення службам швидкого реагування.

В межах даного проекту було проведено проектування системи виявлення та оповіщення про падіння, що відображено на блок-схемі поданій на рис. 1. Виготовлено прототип системи виявлення та оповіщення про падіння у вигляді пристрою прикріпленого до майки солдата, який складається з мікроконтролера ESP32, акселерометра гіроскопа MPU-9250 6500 9DoF, живлення Power Bank, антени GPS 1575.42 МГц SMA і GPS NEO-7M. Реалізовано алгоритм роботи мікроконтролера

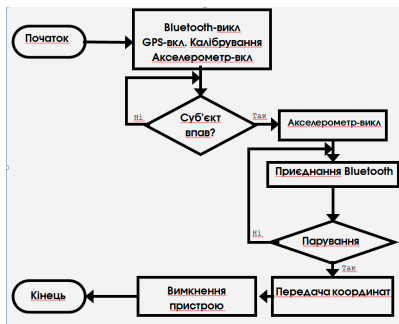


Рис. 1.

гіроскопа MPU-9250 6500 9DoF, живлення Power Bank, антени GPS 1575.42 МГц SMA і GPS NEO-7M. Реалізовано алгоритм роботи мікроконтролера

ESP32 та розроблено мобільний додаток для оповіщення про пораненого. Проведено тестування прототипу, що передбачає виконання безлічі різноманітних тестів, що стосується розташування об'єкту. Зокрема виконується кілька тестів з врахуванням падіння спереду, ззаду та збоку. На етапі тестування збираються дані про прискорення та орієнтацію і вносяться необхідні модифікації та налаштування системи для досягнення найкращого результату передачі даних про падіння. Функціональність системи виявлення та оповіщення про падіння визначається надійністю та точністю передачі даних, тобто прототип повинен надійно виявляти падіння людини і точно диференціювати його від повсякденної діяльності.

Розроблений прототип звичайно має свої переваги та недоліки і потребує доопрацювання. До переваг слід віднести підвищення безпеки військових (служби швидкого реагування зможуть легко знаходити поранених), портативність (пристрій (девайс) можна легко переносити з собою не турбуючись про його існування), низьке споживання енергії (для роботи девайсу потрібно невеликий Power Bank, який витримує до 10 годин роботи), мініатюрність (девайс можна закріпити на ремені або інтегрувати в майку). До недоліків слід віднести те, що пристрій не може працювати на великих відстанях і використовує бездротові технології комунікацій з фіксованою частотою. Дана розробка знаходиться на стадії удосконалення стосовно передачі даних та факту виявлення пораненого.

1. Інструкція ESP32. URL: <https://docs.arduino.cc/arduino-cloud/guides/esp32/> (дата звернення: 16.04.2024)
2. ESP-IDF Programming Guide. URL: <https://docs.espressif.com/projects/esp-idf/en/stable/esp32/index.html> (дата звернення: 16.04.2024)
3. ESP32-DevKitC. URL: <https://docs.espressif.com/projects/esp-dev-kits/en/latest/esp32/esp32-devkitc/index.html> (дата звернення: 16.04.2024)

SYSTEM FOR DETECTING THE LOCATION OF WOUNDED MILITARY SERVANTS

In order to organize the security of military personnel, it is necessary to create an effective system of rapid response when the wounded are detected on the battlefield. On the basis of the ESP-32 microcontroller, a prototype of a system for monitoring possible falls of military personnel using an accelerometer and a gyroscope has been developed. If the sensors detect a fall, the microcontroller activates the Bluetooth module to send a notification to the smartphone. A notification received on the phone triggers an app that uses Wi-Fi to send a message to emergency services. This system is based on wireless communication technologies and motion sensors. A prototype of the system is tested using a developed device that attaches to a soldier's shirt. The development of such a system can contribute to the effective identification of the wounded, which will ensure proper conditions for preserving the health and lives of people.

АНАЛІЗ ЗУСИЛЬ ТА МОМЕНТІВ В ІНТЕРФЕЙСНИХ ТОЧКАХ КОСМІЧНИЙ АПАРАТ (КА) - РАКЕТА НОСІЙ (РН), ВИЗНАЧЕННЯ ЇХ ТЕРМОПРУЖНИХ, МОНТАЖНИХ ТА ІНЕРЦІЙНИХ СКЛАДОВИХ З МОМЕНТУ ЗБИРАННЯ ДО ВІДДІЛЕННЯ КА ВІД РН

Дмитро Акімов¹, Дмитро Клименко²

ДП «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро,
¹Akimoff2017@gmail.com, ²klymenko_dv@hotmail.com

При інтеграції КА на РН однією з головних задач для виробника КА є визначення навантажень в інтерфейсних точках на всіх етапах його експлуатації. Особливу важливість ця задача має, коли граничні по міцності навантаження вже визначені для виготовлених КА, що не дає розробнику можливості вносити суттєві конструктивні зміни. Крім того, великий вплив на розподіл зусиль і моментів в інтерфейсних точках КА має схема інтеграції КА на РН та матеріали елементів конструкцій, які стикаються. Особливого значення це завдання набуває, коли КА встановлений в космічну головну частину, вертикально по осі РН, в цьому випадку точки кріплення навантажуються нерівномірно на всіх етапах експлуатації КА в складі РН.

Розглянемо рішення даної задачі на прикладі розрахунку зусиль та моментів в інтефейсних точках КА з моменту складання двох КА з РН в «чистій» камері, в процесі наземної експлуатації, старту і польоту РН до відділення КА.

При розрахунку зусиль і моментів в інтерфейсних точках КА враховано:

- вплив навантажень, що виникають через зміну температури конструкцій (термопружні навантаження);
- вплив навантажень, що виникають при збиранні через похибки виготовлення конструкцій (монтажні навантаження);
- вплив інерційних навантажень на всіх етапах експлуатації.

У даній роботі представлені результати розрахунку сумарних навантажень в інтерфейсних точках КА з урахуванням вищевказаних складових та проведено оцінку впливу кожної зі складових на всіх етапах експлуатації. Для проведення розрахунку використаний програмний комплекс MSC.NASTRAN на основі методу скінченних елементів. Визначення напружено-деформованого стану проводились з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності (тип аналізу Nonlinear Static). При скінченно-елементному моделюванні використовувалися типи скінченних елементів – Solid, Beam, Plate.

Результати розрахунків зусиль та моментів в інтерфейсних точках КА показали, що максимальний вплив термопружних складових навантажень реалізується при складанні, наземної експлуатації та при відділенні КА.

Максимальний вплив монтажних складових реалізується при складанні двох КА з РН.

Максимальний вплив інерційних складових реалізується при транспортуванні КА в складі РН та особливо при польоті РН.

Проведений аналіз зусиль та моментів в інтерфейсних точках КА дозволив визначити сумарні навантаження в кожній точці кріплення КА на всіх етапах експлуатації та визначити вплив кожного з факторів на їх величину.

Порівняння визначених сумарних навантажень у кожній інтерфейсній точці КА з допустимими значеннями виробником КА показало, що вони їх не перевищують і забезпечують стійкість до рівня діючих навантажень у площині інтерфейсу КА – РН на всіх етапах експлуатації.

**ANALYSIS OF STRESSES AND MOMENTS AT KA-PH INTERFACE POINTS,
DETERMINATION OF THEIR THERMAL ELASTIC, ASSEMBLY AND INERTIAL
COMPONENTS FROM THE MOMENT OF ASSEMBLY TO THE MOMENT
OF SEPARATION OF KA FROM PH**

This paper presents the results of calculating the total loads at the interface points of the spacecraft taking into account the above components, and an assessment of the impact of each of the components at all stages of operation is carried out.

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ РУЙНІВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ СКОБИ ПРИ ЗМІННИХ УМОВАХ ЗАКРІПЛЕННЯ ТА НАВАНТАЖЕННЯ

Володимир Бабуров

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро, literator11@i.ua

Під час розробки відповідальних конструкцій виникають задачі пов'язані з їх послідовним навантаженням для врахування на кожному етапі напружено-деформованого стану (НДС) попереднього етапу при подальшому навантаженні з новими умовами закріплення. У цій роботі наведено результати оцінки необхідного зусилля при встановленні скоби, НДС при експлуатації з урахуванням історії навантаження та оцінка її тримкої здатності. Використано програмний комплекс MSC.NASTRAN на основі методу скінченних елементів. Визначальним параметром навантаження на скобу при експлуатації є дія осової розтягувальної сили. Діаметр скоби 4,5 мм, матеріал – сталь 1. Робота скоби проводиться за наступною схемою: встановлення скоби, навантаження скоби до «відгину» її країв, дія експлуатаційного навантаження на неї.

Аналіз НДС проводився в наступній послідовності:

- визначення НДС скоби за дії зусилля розтиснення (Q_y) та розрахунок його величини;
- розрахунки НДС скоби при дії розтягувального зусилля (Q_z^1) до «відгину» країв скоби та визначення його величини;
- розрахунки НДС та тримкої здатності за дії зусилля розтиснення (Q_y), розтягувального зусилля (Q_z^1) до «відгину» та розтягувального зусилля (Q_z) при експлуатації скоби з врахуванням НДС кожного етапу.

НДС розраховано з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності (тип аналізу Nonlinear Static) зі скінченними елементами типу Solid. Показано, що необхідне зусилля розтиснення $Q_y \approx 1,73$ кгс на сторону, при цьому скоба працює в зоні пластичних деформацій та наявні залишкові напруження $\sigma_m^{\text{зал}} \approx 860$ кгс/см², а необхідне зусилля «відгину» $Q_z^1 \approx 26$ кгс. При оцінці тримкої здатності для максимального розтягувального зусилля отримане значення $Q_z \approx 240$ кгс. Руйнівне навантаження визначалось за межею міцності матеріалу скоби та максимальним напруженням по Мізесу. При проведенні конструкторських випробувань руйнуюче навантаження на скобу складало $\approx 200 - 250$ кгс при її діаметрах 4,2 – 4,5 мм.

ANALYSIS OF THE STRESS-DEFORMED STATE AND PREDICTION OF THE DESTRUCTIVE LOADING OF THE BRACKET UNDER VARIABLE FASTENING AND LOADING CONDITIONS

This paper presents the results of the assessment of the required effort when installing the bracket, the stress-strain state during operation, taking into account the load history, and the assessment of its bearing capacity.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І ТЕХНІЧНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ РЕСУРСУ СТВОЛІВ АРТИЛЕРІЙСЬКИХ СИСТЕМ

Олександр Андрейків¹, Ірина Долінська², Петро Болкот³, Петро Ванкевич³

¹Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, andreykiv@ipm.lviv.ua

²Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів, ira_dolinska@ukr.net

³Національна академія сухопутних військ ім. Гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів, p.a.bolkot@gmail.com

Як показує практика, від зносостійкості внутрішньої поверхні артилерійських стволів залежить точність ураження і результат ведення бою. При вистрілі між поверхнею ствола і кільцями м'якшого металу на снаряді (це для герметичності системи) проходить тісний контакт, що призводить до активного їх стирання, навіть твердіших матеріалів ствола. В результаті цього порушується герметичність порохових газів, відповідно сила вистрілу і дальність польоту снаряду. Разом з тим, збільшується амплітуда коливання снаряда при його проходженні через ствол. Це в свою чергу порушує точність ураження цілі, особливо на великих відстанях. Для ближнього бою, це не є великою проблемою, але в даний час найбільше мають значення далекобійні артилерійські системи. У зв'язку з цим в даній роботі запропоновано технологію виготовлення гарматного ствола з найбільш зносостійкою внутрішньою поверхнею. Описано схему технології виготовлення нарізних танкових стволів з підвищеним ресурсом прицільних уражень. В основу методики покладена розроблена авторами технологія поверхневого їх гартування струмами високої частоти і шліфування мікротріщин, які в результаті цього появляються. Основні фактори, які забезпечують високий ресурс стволів згідно технології це їх високі жаростійкість і зносостійкість. Жаростійкість досягається оптимізацією матеріалу на зразках, зносостійкість – оптимізацією параметрів технології поверхневого гартування внутрішньої поверхні ствола. Наведено математичну модель розрахунку живучості ствола, коли після гартування і шліфування ствола на його внутрішній поверхні залишилася мікро тріщинка.

MATHEMATICAL MODELS AND TECHNICAL TECHNOLOGIES FOR INCREASING THE RESOURCE OF BARRELS OF ARTILLERY SYSTEMS

The scheme of the manufacturing technology of rifled tank barrels with an increased resource of aiming lesions is described. The methodology is based on the technology of their surface hardening with high-frequency currents and grinding of microcracks, which appear as a result, developed by the authors. The main factors that ensure a high resource of barrels according to the technology are their high heat resistance and wear resistance.

МАТЕМАТИЧНЕ Й КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТОСОВНО ПРОБЛЕМИ КОНСТРУКЦІЙНОЇ МІЦНОСТІ КОРПУСІВ ДВИГУНІВ РАКЕТНОЇ ТА РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

Михайло Марчук^{1, 2}, Богдан Дробенко¹, Назарій Лопух¹, Дмитро Клименко³, Віра Пакош^{1, 2},
Володимир Сіренко³, Володимир Харченко³, Микола Хом'як^{1, 4}

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
mv_marchuk@ukr.net,

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

³Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро,

⁴Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Двигуни сучасних ракетних носіїв та елементів ракетного озброєння поділяються на два типи: рідкопаливні (РД) та твердопаливні (РДТП). РД використовуються здебільшого в конструкціях ракетно-космічної техніки, а РДТП – в основному для оснащення ракетних систем залпового вогню.

Дослідження механічної поведінки складних конструкцій типу ракетних двигунів до недавнього часу проводили переважно на основі результатів реальних натурних повномасштабних експериментів, руйнівних випробувань і тестів та відповідного адаптування числових результатів, отриманих у рамках спрощених математичних моделей. Однак, можливості дослідження поведінки конструкцій при таких випробуваннях є доволі обмеженими і надзвичайно затратними. З огляду на це, визначення деформованого стану складних структурно-неоднорідних конструкцій все частіше проводять на основі уточнених, як оболонкових, так і просторових математичних моделей.

Корпуси сучасних РДТП у більшості випадків виготовляються з композитів на полімерній основі за технологією неперервної намотки. Внаслідок цього їхні тримкі елементи мають форму осесиметричних оболонок обертання за геометрією та шарувату структуру будови за товщиною. З метою визначення та дослідження напружено-деформованого стану (НДС) вказаних елементів РДТП для проведення оцінки їхньої конструктивної міцності та тримкої здатності розроблені уточнені математичні моделі статички та динаміки оболонок із шаруватих композитів з урахуванням дискретності будови за товщиною й специфічних особливостей їх деформування.

Для комп'ютерної реалізації вказаних математичних моделей запропонована та верифікована нова змішана схема методу скінченних елементів у переміщеннях і контактних напруженнях. Вона покладена в основу розроблення методики розрахунку корпусів типу «кокон» на міцність і стійкість за нерівномірного нагрівання та комплексної дії статичних навантажень з урахуванням можливої наявності гіперпружних шарів і областей з неідеальним міжшаровим контактом.

Створена математична модель для визначення НДС стиків РДТП із суміжними відсіками ракет з урахуванням дискретності будови за товщиною за наявності концентраторів напружень дала змогу розробити методику розрахунку вказаних об'єктів із шаруватих полімерних композиційних матеріалів за дії силових навантажень. На цій основі досліджена міцність штифтово-шпилькового з'єднання корпусу РДТП із суміжними відсіками.

Забезпечення функціонального призначення РДТП залежить також від стану їхнього заряду та характеру його взаємодії з корпусом. Тому була запропонована математична модель поведінки зарядів твердого палива (ТП) в корпусах РДТП із різних матеріалів, у тому числі композитних. При цьому враховані реологічні властивості сумішевих полімерів, котрими є заряди ТП ракетних двигунів за умов зберігання, транспортування та експлуатації. На цій основі шляхом використання методу скінченних елементів розроблено та верифіковане відповідне програмне забезпечення для визначення НДС заряду та корпусу РДТП. Це дозволило розробити методологію оцінки міцності заряду ТП, міцноскріпленого з корпусом ракетного двигуна.

З використанням теорії теплопровідності та неізотермічної термопружно-пластичності анізотропних термочутливих тіл і скінченноелементного підходу в поєднанні з однокроковими різницеvими алгоритмами по часовій координаті розроблена методика розрахунку міцності деталей сопел із вуглець-вуглецевих матеріалів РДТП при інтенсивному термосиловому навантаженні.

Розроблено методологію комп'ютерного моделювання руйнівних випробувань великогабаритних тонкостінних елементів конструкцій РД в рамках загальної моделі геометрично нелінійного пружно-пластичного тіла. На цій основі створено скінченно-елементне програмне забезпечення, з використанням якого досліджено механічну поведінку бака паливного відсіку РД за умов руйнівного випробування, визначено руйнівне навантаження і місце ймовірного руйнування бака.

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING IN RELATION TO THE PROBLEM OF STRUCTURAL STRENGTH OF ENGINES FOR ROCKET AND ROCKET-SPACE TECHNOLOGY

The use of mathematical and computer modeling tools to assess the strength of the main retaining elements of solid-fuel and liquid rocket engines is illustrated.

АНАЛІЗ РЕАЛІЗАЦІЇ ДЕЯКИХ ПАРАЛЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ДАНИХ НА БАГАТОЯДЕРНОМУ КОМП'ЮТЕРІ

Ростислав Вдович¹, Михайло Яджак^{1,2}

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
rostyslav.r.vdovych@gmail.com

²Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, yadzhak_ms@ukr.net

Під час дослідження реальних складних систем з ієрархічно-мережевою структурою [2, 4–6] використовують значні обсяги даних про стан і особливості функціонування їх об'єктів. У більшості випадків ці дані є спотвореними, надходять неперервно і для подальшого використання потребують попереднього опрацювання в режимі реального часу. З цією метою було запропоновано низку ефективних паралельних алгоритмів фільтрації, зорієнтованих для реалізації на сучасних паралельних обчислювальних засобах (комп'ютерах з багатоядерними процесорами, кластерах, гібридних архітектурах, засобах зі структурно-процедурною організацією обчислень, квазісистолических структурах, спецпроцесорах для виконання нейрообчислень тощо) [8]. При цьому важливою залишається проблема аналізу реального прискорення цих алгоритмів з використанням різних сучасних програмних засобів реалізації паралелізму.

Для виконання на багатоядерному комп'ютері з процесором Intel Core i5-9600 KF (6 обчислювальних ядер) було вибрано два паралельних алгоритми цифрової фільтрації даних. Один з них використовує синхронну схему обчислень, а інший є алгоритмом з обмеженим паралелізмом і автономними гілками, для побудови якого використано ідеї методу піраміди для розпаралелювання циклів [1, 3]. Ці алгоритми порівнювались з відповідним, еквівалентним за інформаційним графом, послідовним алгоритмом фільтрації. Програмна реалізація здійснювалась на мові високого рівня C# у середовищі Visual Studio 2022 із залученням бібліотек System (містить часто використовувани класи) та System.Threading (для роботи з потоками). При цьому кожен із паралельних алгоритмів фільтрації був реалізований двома способами із застосуванням ThreadPool та Parallel.For (створене відповідне програмне забезпечення розташоване на веб-сервісі GitHub [7]). Зазначимо, що виконання обчислень здійснювалось для заданих наборів параметрів одновимірної задачі цифрової фільтрації [8]. З метою забезпечення належної точності оцінок складності паралельних алгоритмів для кожного такого набору параметрів використовувалась певна кількість різних попередньо сформованих масивів вхідних даних.

Унаслідок багатьох проведених чисельних експериментів було встановлено, що найбільше реальне прискорення обчислень дає алгоритм з обмеже-

ним паралелізмом і воно є доволі значним (в 4,78 рази). При цьому застосування різних способів реалізації паралелізму не суттєво вплинуло на оцінки прискорення досліджуваних паралельних алгоритмів виконання одновимірної фільтрації.

На підставі викладеного вище можна зробити висновок, що алгоритм з обмеженим паралелізмом є більш ефективним для цифрової фільтрації даних. Одержані в роботі результати можуть бути використані для аналізу відповідних паралельних алгоритмів розв'язання задач фільтрації більшої розмірності під час комплексного оцінювання [2] в режимі реального часу стану та процесів функціонування об'єктів (елементів, підсистем відповідних рівнів ієрархії, системи загалом) складних ієрархічно-мережевих систем різних типів і призначення та викладання основ паралельного програмування у вищих навчальних закладах.

1. *Вальковський В.О., Яджак М.С.* Проблеми подальшого розвитку та модифікації методу пірамід для розпаралелювання циклів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – **43**, № 1. – С. 68-75.
2. *Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Моделі та методи комплексного дослідження складних мережевих систем та міжсистемних взаємодій. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С Підстригача НАН України, 2023. – 385 с.
3. *Яджак М.С.* Модифікація методу пірамід для розпаралелювання циклів: організація обмінів між гілками // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – **43**, № 4. – С. 68-72.
4. *Polishchuk O., Polishchuk D., Tyutyunnyk M., Yadzhak M.* Big data processing in complex hierarchical systems I: Structures and information flows // *AASCIT Communications.* – 2016. – **3**(3). – P. 112-118.
5. *Polishchuk O., Yadzhak M.* Models and methods of evaluation the vulnerability of complex hierarchical network systems // *CEUR-WS.org/Vol-3513/paper35.pdf.* – 2023. – P. 420-434.
6. *Polishchuk O., Yadzhak M.* On the vulnerability and protection strategies of complex network systems and intersystem interactions // *CEUR-WS.org/Vol-3538/paper_24.pdf.* – 2023. – P. 267-281.
7. *Vdovych R.R.* CDF_V2. – 2024. – Режим доступу: https://github.com/RostyslavR/Vdovych/CDF_V2.
8. *Yadzhak M.S.* Parallel algorithms for data digital filtering // *Cybernetics and Systems Analysis.* – 2023. – **59**, № 1. – P. 39-48.

ANALYSIS OF THE IMPLEMENTATION OF SOME PARALLEL ALGORITHMS OF DATA DIGITAL FILTERING ON A MULTI-CORE COMPUTER

In the paper analyzes the real speed up of two parallel data digital filtering algorithms on a multi-core computer. One of these algorithms is based on a synchronous computations scheme, and the other is an algorithm with limited parallelism and autonomous branches. For construction an algorithm with limited parallelism the pyramids method is used. The obtained results can be used during the study of complex hierarchical network systems objects on modern supercomputers.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАДАЧ ТА АЛГОРИТМІВ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ ВИКЛАДАННЯ ОСНОВ ПАРАЛЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Михайло Яджак^{1,2}

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
yadzhak_ms@ukr.net

²Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Зараз основним підходом до прискорення обчислень є їх тотальне розпаралелювання. Для цього широко використовуються сучасні програмні та апаратні [5] засоби реалізації паралелізму. Тому у вищих навчальних закладах на багатьох спеціальностях значна увага приділяється викладанню дисциплін з паралельного програмування. При цьому розглядаються як методи розпаралелювання ациклічних та циклічних ділянок обчислень, так і архітектура відповідних паралельних комп'ютерів, на яких ці методи можуть бути ефективно реалізовані. Важливим тут є і використання не лише абстрактних фрагментів обчислень, а й реальних обчислювальних задач для застосування тих чи інших методів розпаралелювання. До таких задач можна віднести задачі цифрової фільтрації (ЗЦФ) різної розмірності, для розв'язання яких запропоновано низку паралельних методів і алгоритмів, орієнтованих на реалізацію на різних архітектурах обчислювальних засобів. Формулювання ЗЦФ є чіткими та зрозумілими і дозволяють доволі наглядно застосовувати методи розпаралелювання та будувати і досліджувати відповідні паралельні алгоритми.

У загальному випадку розглядувана нами ЗЦФ полягає у виконанні деякої кількості переобчислень згладжування масиву значень змінних через рухоме вікно заданого розміру [3, 6]. Зазвичай таку задачу потрібно розв'язувати в режимі реального часу, використовуючи паралельні алгоритми. Зокрема, в [4] для розв'язання варіанту одновимірної ЗЦФ було запропоновано систолічні алгоритми, а в [6] – паралельні алгоритми, що реалізують синхронну та асинхронну схеми обчислень; алгоритм на основі методу гіперплощин для розпаралелювання циклів та оптимальний за швидкодією паралельно-конвеєрний алгоритм (ПКА) фільтрації сигналів.

Пізніше нами було розвинуто [2] систолічні методи Кунга-Лейзерсона організації обчислень під час одновимірної фільтрації, що дозволило оптимально завантажувати елементи обчислювальних структур. У праці [3] запропоновано квазісистолічний метод обчислень для побудови оптимальних за швидкодією ПКА розв'язання ЗЦФ різної розмірності. Крім цього, в [7] зроблено ефективні паралельні алгоритми з автономними гілками для розв'язання задач фільтрації на кластерах, комп'ютерах з багатоядерними процесорами та гібридних архітектурах. У праці [8] проаналізовано можливість виконання деяких ПКА фільтрації на системах зі структурно-процедурною організацією обчислень (ССПОО). Нами досліджувались також підходи до ефекти-

вної реалізації нейрообчислень [1].

Наведені вище відомі та нові наукові результати були використані під час розроблення навчального курсу «Паралельні алгоритми: побудова та аналіз», який читається магістрам першого року навчання на факультеті прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка. У цьому курсі значна увага приділяється конвеєризації та паралельно-конвеєрному виконанню обчислень, застосуванню методів гіперплощин та пірамід для розпаралелювання циклів до розв'язання ЗЦФ різної розмірності, розробці та дослідженню паралельних алгоритмів фільтрації на систолічних і квазісистолічних структурах, ССПОО та прискорювачах нейрообчислень. Також розглядаються алгоритми розв'язання задач лінійної алгебри великої розмірності на MIMD-комп'ютерах. Особлива увага звертається на проблему покращення прискорення паралельних алгоритмів.

В описуваному курсі вивчаються і компоненти комунікаційного середовища паралельних обчислювальних систем. Це важливо, оскільки обміни між паралельними гілками алгоритмів можуть суттєво впливати на прискорення обчислень. Також, під час побудови паралельних алгоритмів, зокрема і фільтрації, приділяється увага роботі з пам'яттю комп'ютера.

Отже, нами показано, що ЗЦФ та алгоритми їх розв'язання є сучасною, перспективною і зручною основою для викладання курсів з паралельного програмування у вищих навчальних закладах.

1. *Вальковський В.О., Яджак М.С.* Про організацію паралельних обчислень у нейронних мережах // Відбір і обробка інформації. – 2003. – Вип. 19 (95). – С. 138-144.
2. *Яджак М.С.* Деякі обчислювальні засоби реалізації алгоритмів цифрової фільтрації // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С. 90-99.
3. *Anisimov A.V., Yadzhak M.S.* Construction of optimal algorithms for mass computations in digital filtering problems // Cybernetics and Systems Analysis. – 2008. – 44, No 4. – P. 465-476.
4. *Kung H.T., Leiserson C.E.* Systolic arrays (for VLSI) // Proc. of the Sympos. On Sparse Matrix Comput., Knoxville, 1978. – Philadelphia: SIAM. – 1979. – P. 256-282.
5. *The list Top500:* [Electronic resource]. – Available: www.top500.org.
6. *Valkovskii V.A.* An optimal algorithm for solving the problem of digital filtering // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1994. – 4, No 3. – P. 241-247.
7. *Yadzhak M.S.* Parallel algorithms for data digital filtering // Cybernetics and Systems Analysis. – 2023. – 59, No 1. – P. 39-48.
8. *Yadzhak M.S., Tyutyumyk M.I.* An optimal algorithm to solve digital filtering problem with the use of adaptive smoothing // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – Vol. 49. – P. 449-456.

USING DIGITAL FILTERING PROBLEMS AND ALGORITHMS FOR TEACHING THE FUNDAMENTALS OF PARALLEL PROGRAMMING

The work substantiates the use of problems and algorithms of digital data filtering during teaching courses on parallel programming in higher educational institutions. The main features of the course "Parallel algorithms: construction and analysis" were noted.

ЗАСТОСУВАННЯ ФІЗИКО-ІНФОРМОВАНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ НАВОДНЮВАННЯ СТІНКИ ТРУБИ ГАЗОПРОВОДУ

Олег Венгринюк¹, Ольга Звірко²

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, м. Львів, ¹olehvenhryniuk@gmail.com;
²olha.zvirko@gmail.com

На сьогодні перспективним завданням є використання наявних газопроводів для транспортування водню, що може посилювати ризик порушення цілісності труб через можливе наводнювання та водневу крихкість металу [1]. Тому при оцінюванні впливу водню на механічну поведінку металу важливо враховувати його дифузію, яка суттєво впливає на акумулювання водню в околі вершини тріщини та її ріст. Метою цієї роботи є моделювання дифузії водню у сталі для визначення розподілу водню по товщині стінки труби із застосуванням фізико-інформованих нейронних мереж. Їм надають перевагу перед іншими методами моделювання у задачах, де мала кількість експериментальних даних.

Класичний підхід із нейронною мережею у ролі універсального апроксиматора функцій посилено використанням знань про фізичні закони, а саме другий закон Фіка. Розглянуто модель труби, як порожній циліндр, у якого довжина h значного переважає діаметр d ($h \gg d$), тому скористались симетрією задачі та перейшли до її двовимірного аналогу. Щоб знайти розподіл водню по товщині труби, використано рівняння дифузії (1) та його розв'язок (2) згідно з Райченко [2].

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C(r,t)}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$C(r,t) = C_1 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)} + \pi \sum \frac{c_1 J_0(\beta_n r_1) J_0(\beta_n r_2) U_0(\beta_n r)}{J_0^2(\beta_n r_1) - J_0^2(\beta_n r_2)} e^{-\beta_n^2 D t}. \quad (2)$$

Використано нейронну мережу із наступною архітектурою (рис. 1). Завдяки лос функції (3) враховано крайові умови, а також фізичні закони. Тут $\alpha = 2$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 2$, гіперпараметри, що були підібрані для кращої збіжності алгоритму градієнтного спуску.

$$L = \alpha L_{\text{physics}} + \beta L_{\text{boundary+initial}} + \gamma L_{\text{data}} \quad (3)$$

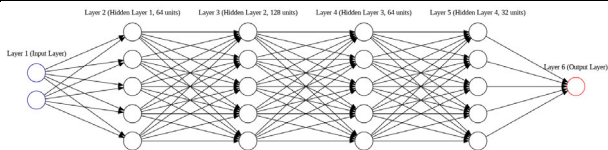


Рис. 1. Схема нейронної мережі

Визначено зміну концентрації водню C з часом по товщині стінки труби (рис. 2, червоні точки – значення аналітичного розв’язку диференційного рівняння, сині – апроксимовані значення нейронної мережі).

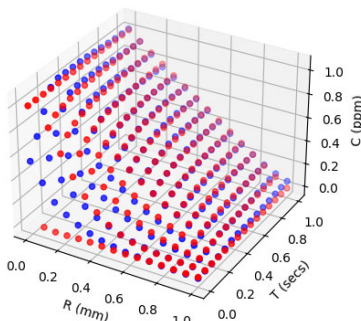


Рис. 2. Розподіл водню по товщині стінки труби в часі

Досягнуто хороших результатів моделювання розподілу водню по товщині стінки труби в часі, похибка склала 0,07 середнього відхилення по модулю, із використанням всього 6 точок із області визначення задачі. Це вказує на доцільність подальшого дослідження застосування та розвитку методів із нейронними мережами для задач фізико-хімічної механіки матеріалів.

1. *Nykyforchyn H., Tsyurulnyk O., Venhryniuk O., Zvirko O.* Techniques for investigation of hydrogen influence on fracture toughness and embrittlement of pipeline steels network // *Procedia Struct. Integr.* – 2024. – 59. – P. 125–130.
2. *Райченко А. И.* Математическая теория диффузии в приложениях. – К.: Наук. думка, 1981. – 396 с.

PINN APPLICATION FOR MODELING OF HYDROGEN CHARGING OF GAS PIPELINE WAL

A physics-informed neural network (PINN) is applied for modeling hydrogen distribution in the wall of a gas pipeline intended for hydrogen service. The neural network approach was enhanced by incorporating Fick's second law of diffusion. The results are compared with analytical solutions, and visualizations of the hydrogen distribution are provided.

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПІЗНАВАННЯ СИТУАЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ СЕМАНТИЧНОГО ПОЛЯ

Петро Жук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, cipt@litech.net

Розглянуто задачу розпізнавання ситуацій в наступному виді, що відповідає деяким поточно актуальним задачам. Нехай є певний простір X параметрів, які можуть сприймаються розпізнаючим суб'єктом, на основі сприйняття яких відбувається розпізнавання; x – сприйнятий стан в підпросторі простору X , на якому має бути розпізнавання, тобто зображення, на якому треба визначити об'єкти; A – множина об'єктів, які треба розпізнати, тобто виявити їх наявність чи відсутність на основі зображення x ; серед об'єктів A може бути множина об'єктів A_1 , для яких бажано не тільки виявити їх наявність, але й знайти їх, при потребі розширивши зображення x ; S – семантичне поле, серед понять якого є об'єкти множини A , а серед прив'язаних до понять фрагментів є фрагменти у підпросторах простору X . Результат, який треба одержати, включає: ймовірності $p(a, x)$ наявності об'єктів a множини A на зображенні x ; області $z(a)$ в підпросторах простору X , в яких знаходяться значення параметрів виявлених об'єктів, на основі яких їх виявлено, тобто місце об'єктів на зображенні; виявлені відношення $y(a, b)$ знайдених об'єктів a з іншими об'єктами b . Якщо об'єктів з A_1 не знайдено, то має бути визначено також сукупність параметрів X_1 простору X , які доцільно сприйняти за межами параметрів зображення x , щоб, ймовірно, знайти об'єкти з A_1 . Семантичне поле (СП) S – інформаційний об'єкт, який складається з семантичного гіперграфа, сенсорних фрагментів траєкторій станів, відображення станів в елементи семантичного гіперграфа: $S = \langle G, H, I \rangle$, де $G = \langle V, R, N \rangle$ – семантичний гіперграф (СГ); V – вершини СГ; R – дуги СГ; N – семантичні характеристики (істинність, позитивність, важливість, активність) дуг та додаткові структурні зв'язки, які задають ідентичність між назвами дуг та вершинами слів-дуг, між реченнями-дугами та вершинами, що відповідають цим реченням, як членам складних речень; H – сукупність сенсорних фрагментів траєкторій станів, тобто сенсорних образів (відчуттів) в просторі станів сенсорних параметрів (параметрів, через які відбувається сприйняття світу інформаційним суб'єктом), так що елемент h з H – стан певної підмножини сенсорних параметрів на певному часовому проміжку, тобто сприйняті протягом певного часу зображення; I – відображення (неоднозначне) фрагментів (вершин, дуг, підграфів) G в об'єднання множини підмножин всіх h з H , це відображення ставить у відповідність семантичним елементам частини сенсорних образів.

Вершинами СГ є поняття, що ними оперує суб'єкт, дугами - твердження, що задають певні співвідношення між ними. Вершинами СГ можуть бути і твердження у складних твердженнях.

Загальний алгоритм розпізнавання ситуацій з використанням СП складається з таких етапів:

1) знаходження x окремих об'єктів з A чи їх семантичного околу в ЗА; ідентичність об'єктів виявляється через певні відношення еквівалентності між їхніми відображеннями, твердження яких є в ЗА; для цього відбувається сканування прив'язаних до об'єктів фрагментів H з ЗА по x з пошуком такої еквівалентності цих фрагментів з частинами x ; якщо цього не виявлено для самих об'єктів, то таке сканування відбувається для зв'язаних з ними відповідно до інформації з ЗА;

2) знаходження таким самим скануванням надоб'єктів з A чи їх околу, як певних абстрактних об'єктів, тобто не цілком, а тільки за частиною параметрів, ідентичним об'єктам з A та їх семантичного околу,- об'єктів певного типу, але невідомо, які конкретно це об'єкти;

3) знаходження відношень знайдених об'єктів з абстрактними об'єктами; для цього перебираються фрагменти H , прив'язані до відношень в ЗА, які відображають властивості цих відношень стосовно абстрактних об'єктів; знайдені конкретні й абстрактні об'єкти підставляються в ці відношення на місце загальних абстрактних об'єктів у відношеннях і виявляється наявність еквівалентностей, що ідентифікують відношення;

4) на основі тверджень в ЗА визначається, з якими об'єктами знайдені об'єкти мають відношення, які виявлені на x ; таким чином на основі ЗА відбувається ідентифікація об'єктів, яких не виявлено на x безпосередньо;

5) якщо знайдених об'єктів недостатньо для одержання потрібного результату, то відбувається переміщення ЗА в напрямі, на який вказують виявлені об'єкти, і для нової ЗА виконуються етапи 1-4;

6) якщо знайдено не всі об'єкти з $A1$, то на основі виведення тверджень на СП формуються рекомендації щодо напрямку розширення простору сприйняття і задача розв'язується для нового сприйнятого зображення x .

Використання ЗА замість всього СП необхідне через дуже великий перебір варіантів, що навіть при надшвидкісних процесорах робить неможливим розв'язання задачі в реальному часі. У зв'язку з великим значенням ЗА актуальною є задача оптимізації ЗА для кожного класу ситуацій, передовсім, визначення її оптимальних розміру та мобільності, тобто потужності умов, при яких має бути її переміщення.

MODELLING OF SITUATIONS RECOGNITION USING THE SEMANTIC FIELD.

An algorithm for recognizing situations on images using semantic information about objects to be detected is proposed, which models recognition by biological purposeful systems, and directions for optimizing the parameters of this algorithm.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОГНОСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Марія Тютюнник

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
tyutmi@ukr.net

Дослідження стану та якості функціонування складних систем (СС) (транспортні мережі міст та регіонів країни, системи електро-, газо-, водопостачання тощо) є алгоритмічно складними задачами. Такі системи, зазвичай, мають ієрархічно-мережеву структуру. З метою формування висновків про стан та якість їх функціонування на різних рівнях ієрархії потрібно враховувати велику кількість параметрів і критеріїв оцінювання, аналізувати різні режими функціонування та значну кількість характеристик системи.

Використання запропонованої в [1] методики потребує розробки та реалізації паралельних алгоритмів з метою оптимізації (за часом) обчислювального процесу під час комплексного оцінювання стану та якості функціонування СС.

Одним із важливих етапів під час формування висновків на різних рівнях ієрархії СС є опрацювання локальних оцінок та їх прогнозування [2, 3]. Великі обсяги локальних оцінок отримують під час неперервного моніторингу та планових оглядів. Зазвичай останні часто рознесені в часі. Спрогнозувати локальні оцінки дозволить детальний аналіз цілком повного та мінімально достатнього набору характеристик елемента, вибору сукупності критеріїв та режимів функціонування, шкал оцінювання тощо.

Зазначимо, що частота планових оглядів та прогнозування оцінок визначається передісторіями стану окремого елемента чи підсистеми. На підставі передісторій локальних оцінок характеристик елемента, оцінювання дозволяє спрогнозувати (на коротко- або довготривалий термін) як саму оцінку, так і поведінку характеристик елементів.

Процедура прогностичного оцінювання поведінки характеристики елемента на підставі екстраполяційного підходу дозволить спрогнозувати її поточкові значення. З метою усунення потенційних ризиків збоїв у функціонуванні елементів системи цю процедуру особливо важливо здійснювати для тих характеристик, для яких одержано негативний прогноз оцінки на момент наступного планового огляду. Важливо, що прогностичний аналіз уточнених бальних оцінок дозволяє визначити момент часу, коли понятійна оцінка зменшиться на одиницю.

Оптимізація довгострокового прогнозування на підставі використання апарату часових рядів передбачає одночасне опрацювання даних кількох періодів планових досліджень, включаючи попередню обробку, що зводиться

до фільтрації ряду з метою зменшення збурень методом експоненційного згладжування.

Оптимізувати час прогностичного оцінювання можна унаслідок одночасного виконання описаних процедур для певної кількості оцінок, а також шляхом прогнозування поведінки декількох характеристик елементів у паралельному режимі. З цією метою нами розроблені ефективні алгоритмічні конструкції. Запропоновані конструкції враховують реальні можливості (кількість процесорних елементів, обчислювальних ядер, обсяг оперативної пам'яті) наявних обчислювальних засобів.

Зокрема, на етапі розпаралелювання під час прогнозування поведінки характеристик системи, що функціонує у заданому режимі, у разі відсутності будь-яких обмежень на обчислювальні ресурси, може бути використана конструкція

$$\text{fork } (g_1; g_2; \dots; g_t) \text{ join}, \quad (1)$$

а у випадку обмеження кількості процесорних елементів обчислювальної системи, відповідна алгоритмічна конструкція має вигляд:

$$\text{fork } (\tilde{g}^1; \tilde{g}^2; \dots; \tilde{g}^{t/N}) \text{ join}. \quad (2)$$

Конструкція (1) задає обчислення у вигляді t паралельних автономних гілок g_i ($i = \overline{1, t}$), у кожній з яких прогнозується оцінка або поведінка характеристики елемента. Конструкція (2) задає обчислення у вигляді t/N паралельних автономних гілок \tilde{g}^j ($j = \overline{1, t/N}$), у кожній з яких прогноуються послідовно N оцінок елементів.

Запропоновані алгоритмічні конструкції дозволяють ефективно реалізувати методи прогностичного оцінювання стану та якості функціонування об'єктів СС унаслідок використання сучасних програмних та апаратних засобів.

1. *Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем. Частина II. Локальне та прогностичне оцінювання // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 2. – С. 26-38.
2. *Яджак М.С., Поліщук О.Д., Тютюнник М.І.* Оптимізація методики комплексного оцінювання складних систем на підставі паралельних обчислень // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2016. – 6, № 4. – С. 347-356.
3. *Polishchuk O., Polishchuk D., Tyutyunnyk M., Yadzhak M.* Big Data Processing Complex Hierarchical Network Systems II: Computer Environments and Parallelization // AASCIT Communications. – 2016. – 3(3). – P. 119-124.

OPTIMIZATION OF PROGNOSTIC ASSESSMENT OF COMPLEX SYSTEMS OBJECTS

Some alternatives for parallelizing computations during the prediction of local evaluations and the behavior of system elements characteristics are analyzed.

ЗНАХОДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ СИСТЕМИ ПОЛІНОМІВ У ЗАДАЧІ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Володимир Макаров¹, Наталія Майко², Вячеслав Рябічев³

¹Інститут математики НАН України, м. Київ, Makarovmath@gmail.com

^{2,3}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, ²mayko@knu.ua, ³ryabichev@knu.ua

Одним із ефективних методів розв'язання абстрактних диференціальних рівнянь з необмеженим операторним коефіцієнтом є метод перетворення Келі [1]. Істотну роль у ньому відіграє система поліномів, яка входить у формули для реалізації методу. У випадку рівняння з похідною дробового порядку з постійним операторним коефіцієнтом виникають поліноми Лагерра–Келі [2]. Проілюструємо це на прикладі задачі Коші для абстрактного еволюційного рівняння з секторіальним оператором A у банаховому просторі X [3]:

$$\partial_t u + \partial_t^{-\alpha} A u = 0, \quad t > 0, \quad \text{де } (\partial_t^{-\alpha} u)(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} u(s) ds, & -1 < \alpha < 0, \\ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s) ds, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \quad (1)$$
$$u(0) = u_0,$$

Випадок $-1 < \alpha < 0$ відповідає моделюванню субдифузійного процесу, а випадок $0 < \alpha < 1$ становить інтерес для задач в'язкопружності. Розв'язок задачі (1) можна подати у вигляді

$$u(t) = E_{1+\alpha}(-t^{1+\alpha} A) u_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-t^{1+\alpha} A)^j \frac{1}{\Gamma(1+j(1+\alpha))} u_0,$$

де $E_{\mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(1+j\mu)}$, $z \in \mathbb{C}$ ($\mu > 0$), – функція Міттаг-Леффлера.

Означення 1 [2]. Функції $p_k^{(\alpha)}(t^{1+\alpha})$, які утворюються після розвинення в ряд Маклорена за степенями q функції

$$E_{1+\alpha} \left(-\frac{q}{1-q} t^{1+\alpha} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{q}{1-q} t^{1+\alpha} \right)^j \frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\alpha)}(t^{1+\alpha}) q^n,$$
$$p_n^{(\alpha)}(t^{1+\alpha}) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial q^n} E_{1+\alpha} \left(-\frac{q}{1-q} t^{1+\alpha} \right) \Big|_{q=0}, \quad \alpha > -1,$$

називаються *функціями Лагерра–Келі*, а поліноми $p_n^{(\alpha)}(x)$ – *поліномами Лагерра–Келі* (скорочено ПЛК).

Поліноми Лагерра–Келі $p_n^{(\alpha)}(x)$ можна подати в явному вигляді:

$$p_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^{s+1} C_{n-1}^s}{\Gamma(1+(s+1)(\alpha+1))} x^{s+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad p_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1. \quad (2)$$

Замість ПЛК (2) доцільно розглядати *модифіковані* ПЛК (скорочено МПЛК)

$$v_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{x} p_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^{s+1} C_n^s}{\Gamma(1+(s+1)(\alpha+1))} x^s, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Означення 2. Звичайним диференціальним рівнянням (скорочено ЗДР) m -го порядку загального вигляду з поліноміальними коефіцієнтами над полем раціональних чисел назвемо рівняння

$$L_m u(x) \equiv \sum_{j=0}^m \left(\sum_{p=0}^j a_p^{(j)} x^p \right) \frac{d^j u(x)}{dx^j} = 0. \quad (4)$$

Справджується таке основне твердження.

Теорема. Нехай $\alpha = -k/(k+1)$ ($k \in \mathbb{N}$). Тоді система МПЛК (3) задовольняє ЗДР (4) порядку $m = k + 2$

$$L_{k+2} u(x) \equiv x \frac{d^{k+2} u(x)}{dx^{k+2}} + (-(k+1)x^{k+1} + k+2) \frac{d^{k+1} u(x)}{dx^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} C_{k+1}^j (k+1) (n-k)_j x^{k+1-j} \frac{d^{k+1-j} u(x)}{dx^{k+1-j}} = 0.$$

Для виконання символічних перетворень було використано засоби системи комп'ютерної математики Maple.

1. Gavriljuk, I.P., Makarov, V.L. The Cayley transform and the solution of an initial value problem in Hilbert space // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 1994. – 15, No. 5–6. – P. 583–598.
2. Макаров В.Л., Макаров С.В. Функції і поліноми Келі // Допов. НАН України. – 2022. – № 5. – С. 3–9.
3. Mclean, W., Thomée, V. Numerical solution of a fractional order evolution equation // J. Integral Eq. Appl. – 2010. – 22, No. 1. – P. 57–94.

THE RECONSTRUCTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE SYSTEM OF POLYNOMIALS IN THE PROBLEM WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

We develop the algorithm of reconstructing ODE of the minimum order with polynomial coefficients over the field of rational numbers for a given system of polynomials.

ІНТЕРАКТИВНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ В ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ У ГАЛУЗІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ольга Біляковська¹, Тетяна Соляр^{1,2}

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, olga_bi@ukr.net,

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
t_solyar@ukr.net

Висвітлюється питання впровадження інтерактивних методів навчання у процес підготовки майбутніх фахівців у галузі прикладної математики. Охарактеризовано найбільш оптимальні інтерактивні методи (метод «мозкового штурму», групова дискусія, метод кейсів, метод проєктів). Наголошено, що інтерактивні методи навчання сприяють оптимізації процесу навчання, побудові партнерської взаємодії, спрямовані на залучення здобувачів вищої освіти до активного і самостійного пошуку шляхів для опанування навчальним матеріалом, активізують розвиток творчого професійного та критичного мислення. Забезпечення якості професійної підготовки висококваліфікованих фахівців є першочерговим завданням закладів вищої освіти. На сьогодні значущим є впровадження інноваційних технологій, інтерактивних методів в освітній процес вищої школи. Інновації в освітній діяльності розглядаються як використання нових знань, прийомів, підходів, технологій для одержання ефективного результату під час надання якісних освітніх послуг. В основі сучасних методів навчання лежать інтерактивні методи, які допомагають здобувачам освіти формувати творчий, інноваційний підхід до розуміння майбутньої професійної діяльності, розвивати самостійність і критичність мислення, вміння приймати оптимальні, нестандартні рішення в умовах певної ситуації, генерувати нові ідеї.

На сьогодні традиційна модель викладання, у якій викладач передає знання на лекціях, а студенти вправляються у виконанні практичних завдань під його керівництвом, замінюється новими підходами, які передбачають використання інноваційних практик. Інтерактивні методи навчання є перспективним способом роботи викладача в аудиторії, орієнтовані на запитання та активний пошук. На відміну від традиційних вони ширше охоплюють потенціал студента: рівень та обсяг його компетентності, самостійність, здатність до прийняття рішень, продуктивної взаємодії тощо. Інтерактивні методи викладання і навчання є ефективними стратегіями, що дозволяють створити активну та залучену атмосферу в процесі підготовки майбутніх фахівців у галузі прикладної математики. Ці методи базуються на практичному застосуванні теоретичних знань, сприяють розвитку навичок та вмінь студентів, а також забезпечують ефективну взаємодію між викладачем і здобувачами освіти. Одним із ключових принципів інтерактивних методів є

активна участь студентів у процесі навчання. Замість пасивного слухання лекцій, студенти стають активними учасниками, залучаються до вирішення завдань, обговорення питань, розв'язання проблемних ситуацій, занурюються в атмосферу взаємної співпраці та ділового співробітництва. Це сприяє активізації мислення, стимулює самостійність у вирішенні проблемних питань.

Одним із ефективних інтерактивних методів є метод «мозкового штурму» (brainstorming). Він передбачає групове обговорення проблеми або завдання з метою генерації якомога більшої кількості ідей. Учасники стимулюються висловлювати будь-які думки, незалежно від їх правильності чи оцінки. Метод використовується для розвитку творчості та генерації нових ідей шляхом інтенсивного групового обговорення. Цей метод дозволяє залучити учасників до активного пошуку, розвитку мислення, сприяє розширенню спектру можливих рішень та сприяє колективній інтелектуальній дії.

Групова дискусія використовується для стимулювання активного обміну думками, ідеями та перспективами між учасниками. Цей метод сприяє глибшому розумінню теми, вільному висловленню думок, розвитку критичного мислення. Передбачає формулювання теми, навколо якої буде проводитися дискусія; поділ на групи; обговорення та обмін ідеями, де кожен учасник має можливість висловитися, а інші реагують на висловлене; розробка аргументів учасниками групи, які підтверджують або спростовують висловлені ідеї.

Метод кейсів – ще один із інтерактивних методів, який широко використовується в процесі підготовки фахівців у галузі прикладної математики. Цей метод базується на використанні ситуацій, відомих як «кейси», для сприяння активному навчанню, розвитку аналітичних умінь та прийняттю самостійних рішень. Один з ключових аспектів методу кейсів – це дискусія та обговорення, можливість пропонувати альтернативні рішення.

Важливим у процесі підготовки фахівців у галузі прикладної математики є метод проєктів, який передбачає застосування студентами практичних умінь і навичок. Використання цього методу в процесі навчання формує у здобувачів освіти креативність, здатність працювати в команді стимулює інтелектуальну активність, розвиває комунікативні вміння.

Отже, впровадження в освітній процес інтерактивних методів навчання сприяє формуванню творчого професійного та критичного мислення, побудові партнерської взаємодії між усіма учасниками, підвищенню якості підготовки майбутніх фахівців у галузі прикладної математики.

INTERACTIVE TEACHING METHODS IN THE TRAINING OF FUTURE APPLIED MATHEMATICS PROFESSIONALS

We explore effective strategies for optimizing the teaching of applied mathematics in higher education. These approaches are designed to actively engage students — future professionals — in independent learning, foster critical thinking, promote collaboration and teamwork, and cultivate both professional and personal skills.