УДК 519.65

doi.org/

Чебишовське наближення функцій багатьох змінних з фіксованим значенням функції та частинної похідної

Петро Малачівський[1], Лев Мельничок[2]

[1] д. т. н., професор, ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com
[2] к. т. н., Львів, e-mail: levkom@gmail.com

Запропоновано метод побудови чебишовського наближення функції багатьох змінних з фіксованим значенням функції та частинної похідної у заданій точці. Побудову такого наближення реалізовано з використанням середньостепеневого наближення з відповідними інтерполяційними умовами. Для побудови середньостепеневого наближення застосовано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією.

Ключові слова: чебишовське наближення, чебишовське наближення з умовою, функції багатьох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція, частинна похідна

Вступ. Задача побудови чебишовського наближення з фіксованим значенням функції та частинної похідної виникає, коли з технічних вимог необхідно щоб апроксимаційний вираз у певній точці відтворював значення деякої функціональної залежності та швидкість зміни її значень. Така задача зустрічаються, зокрема, під час проектування вимірювальних приладів, у яких певному значенню вихідного сигналу сенсора має відповідати конкретне значення вимірюваної величини й забезпечуватися відповідна чутливість [1].

Задачі наближення функцій з інтерполяційними умовами досліджувались багатьма вченими [2, 3]. Чебишовське наближення з інтерполяційними умовами має певні особливості. У випадку наближення функції однієї змінної альтернансна властивість щодо чергування зміни знаку в точках альтернансу не завжди виконується [1].

Постановка задачі. Нехай $f(X)$ функція n змінних, де X вектор $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, неперервна і диференційована в деякій обмеженій області D, $D \subset R^n$ (R^n — n-вимірний векторний простір). Функцію $f(X)$, задану на множині точок $\Omega=\{X_j\}_{j=1}^{s}$, $\Omega \in D$, потрібно наблизити узагальненим поліномом

$$F_m(a; X)=\sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(X) \qquad (1)$$

за системою лінійно незалежних неперервних на D дійсних функцій $\varphi_i(X)$, $i=\overline{0,\,m}$, де a_i, $i=\overline{0,\,m}$ – невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^{m+1}$.

Нехай для функції $f(X)$ існує неперервна частинна похідна першого порядку в точці U_1 і

$$f(U_1)=v_0, \qquad \left.\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_i}=v_1. \tag{2}$$

Чебишовське наближення функції $f(X)$ фіксованим значенням функції та частинної похідної (2) полягає в отриманні поліному (1) степеня $m \geq 2$ на множині Ω з кількістю точок $s > m+2$, який в точці U_1 відтворює значення функції та її частинної похідної

$$F_m(a;U_1)=v_0\ , \qquad \left.\frac{\partial F_m(a;X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_i}=v_1, \tag{3}$$

а найбільша похибка цього наближення

$$\Delta(a)=\max_{X\in\Omega}\left|\, f(X)-F_m(a;X)\right| \tag{4}$$

була найменшою можливою на множині точок Ω.

В праці [1] досліджено існування й встановлено характеристичну властивість чебишовського наближення функцій однієї змінної з відтворенням її значень та значень її похідних в заданих точках. У цій праці запропоновано метод побудови чебишовського наближення функції багатьох змінних узагальненим поліномом із інтерполюванням її значення і значення її частинної похідної у заданій точці.

Метод обчислення параметрів чебишовського наближення функцій багатьох змінних з інтерполюванням значення функції та її частинної похідної

Нехай для функції $f(X)$ на множині точок Ω існує чебишовське наближення поліномом $F_m(a;X)$ з відтворенням значення функції і її частинної похідної за змінною x_1 в точці U_1. Для побудови такого чебишовського наближення використаємо метод послідовних середньостепеневих наближень [4, 5] виразом

$$\overline{F}_m(a;X)=\sum_{i=2}^{m} a_i\varphi_i(X)+a_0\varphi_0(X)+a_1\varphi_1(X), \tag{5}$$

де

$$a_0=\left(v_{1,0}-\sum_{i=1}^{m} a_i\varphi_i(U_1)\right)\Big/\varphi_0(U_1),\quad a_1=\frac{v_{1,1}-\sum\limits_{i=2}^{m} a_i \left.\dfrac{\partial\varphi_i(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_1}-a_0\left.\dfrac{\partial\varphi_0(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_1}}{\left.\dfrac{\partial\varphi_1(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_1}}\ .$$

Вираз $\overline{F}_m(a;X)$ отримано з поліному (1) з врахуванням інтерполяційної умови (2), (3) щодо відтворення значення функції $f(X)$ і значення її частинної похідної за змінною x_1 в точці U_1. Врахування цієї умови полягає у вилученні параметрів a_0 і a_1 з поліному (1). При вилученні параметра a_0 ми припустили, що $\varphi_0(U_1)$ не дорівнює нулеві, а при вилученні a_1 припустили, що значення частинної похідної за змінною x_1 в точці U_1 не дорівнює нулеві.

Для обчислення значень параметрів чебишовського наближення поліномом $\overline{F}_m(a;X)$ на множині точок $\Omega_u = \Omega \setminus U_1$ щодо невідомих параметрів a_i $\left(i=\overline{2,m}\right)$ використаємо ітераційну схему на основі методу найменших квадратів

$$\sum_{X\in\Omega_u} \rho_{p-2}(X)\left(f(X)-\overline{F}_{m,p}(a;X)\right)^2 \xrightarrow[a\in A]{} \min, \quad p=2,3,4,\ldots \tag{6}$$

з послідовним уточненням значень вагової функції [19]

$$\rho_0(X)\equiv 1, \quad \rho_r(X)=\rho_{r-1}(X)\left|\Delta_r(X)\right| = \rho_0(X)\prod_{i=1}^{r}\left|\Delta_i(X)\right|, \quad r=1,\ldots,p-2, \tag{7}$$

де $\Delta_k(X)= f(X)-\overline{F}_{m,k+1}(a;X)$, $k=\overline{1,r}$, $\overline{F}_{m,k}(a;X)$ – наближення функції $f(X)$ виразом (5) за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_{k-2}(X)$ на множині точок Ω_u, яке відповідає середньостепеневому наближенню степеня k. Побудова чебишовського наближення функції $f(X)$ полягає послідовному обчисленні середньостепеневих наближень $f(X)$ виразом $\overline{F}_m(a;X)$ для $p=2,3,4,\ldots$, які відповідно до [18, 19] збігаються до чебишовського наближення.

Завершення ітерацій (6) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$\left|\mu_{p-1}-\mu_p\right| \le \varepsilon\mu_p, \tag{8}$$

де

$$\mu_p = \max_{X\in\Omega_u}\left|f(X)-\overline{F}_{m,p}(a;X)\right|.$$

З виконанням цієї умови чебишовське наближення функції $f(X)$ заданої на множині точок Ω з відтворенням значення функції $f(X)$ і значення її частинної похідної за змінною x_1 в точці U_1 поліномом (1) буде

$$F_m(a;X)=\overline{F}_{m,p}(a;X). \tag{9}$$

Задаючи значення ε в (8), досягаємо потрібну точність обчислення параметрів шуканого чебишовського наближення.

Приклад. Побудуємо чебишовське наближення функції

$$z(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2+x^4y^4}\ ,$$

заданої в точках (x_i,y_j), $i=\overline{0,20}$, $j=\overline{0,20}$, де $x_i=0.05i$, $y_j=0.05j$, поліномом

$$P_{3,3}(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3\left(x^2+y^2\right)+a_4xy+a_5\left(x^3+y^3\right) \tag{10}$$

за змінними x та y з інтерполюванням у точці $(0.3,0.3)$ значення функції та її частинної похідної за змінною x.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon=0.003$ за 9 ітерацій (6) з ваговою функцією (7) для $z(x,y)$ отримано поліном

$$\begin{aligned}P_{3,3}(x,y)&=1.011614557-0.02259728775x-0.02110846424y-\\&-0.2225902564\left(x^2+y^2\right)+0.2134504065xy+0.637591667\left(x^3+y^3\right),\end{aligned} \tag{11}$$

який забезпечує наближення функції $z(x,y)$ з абсолютною похибкою – 0.011862596. В процесі ітерацій похибка наближення набувала таких значень:

0.018145539, 0.014416268, 0.012857721, 0.012649105, 0.012431550,
0.012210566, 0.012023069, 0.011877396, 0.011862596.

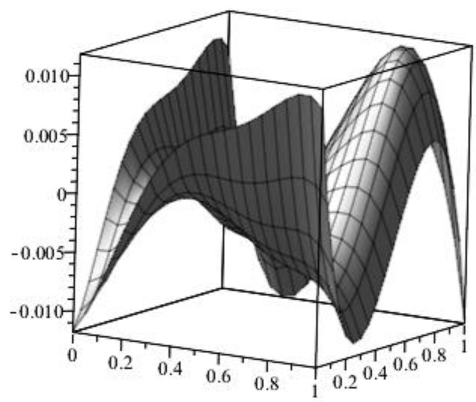

Рис. 1. Графік похибки наближення функції $z(x,y)$ поліномом (11) з інтерполюванням функції та її частинної похідної за змінною x в точці $(0.3,0.3)$

Наближення функції $z(x,y)$ поліномом вигляду (10) для $\varepsilon=0.00003$ отримано за 71 ітерацію (6). Поліном

$$\begin{aligned}P_{3,3}(x,y)&=1.011601943-0.02278518305x-0.02108309553y-\\&-0.2227674844\left(x^2+y^2\right)+0.2145979815xy+0.6374063322\left(x^3+y^3\right)\end{aligned} \tag{12}$$

забезпечує наближення функції $z(x,y)$ з інтерполюванням значення функції та частинної похідної за змінною x в точці $(0.3,0.3)$ з абсолютною похибкою – 0.011684458. З підвищенням точності отримали наближення (12) з дещо меншою похибкою. Використання значення $\varepsilon = 0.003$ забезпечує отримання наближення з двома правильними значущими цифрами похибки.

Висновки. З використання поліному (5) побудова чебишовського наближення функцій багатьох змінних узагальненим поліномом (1) з відтворенням значення функції та її частинної похідної зводиться до обчислення середньостепеневих за ітераційною схемою на основі методу найменших квадратів (6) з ваговою функцією (7). Запропонований метод передбачає можливість обчислення наближення функції багатьох змінних з відтворенням значення функції та її частинної похідної із потрібною точністю. Тестові приклади підтверджують швидку збіжність запропонованого методу.

Література

[1] *Малачівський П. С., Скопецький В. В.* Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення – Київ: Наук. думка, 2013. – 270 с.

[2] *L. Collatz and W. Krabs*, Approximationstheorie: Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen (Teubner Studienbücher Mathematik). Stuttgart: Teubner Verlag; 1973.

[3] *Dunham C., Zhu C.* Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation). Proc. 20th Manitoba Conf. Congr. Numerical Mathematics and Computing, Numerantium 80, Winnipeg, Can. 1990. Winnipeg, 1991. P. 161–169.

[4] *Malachivskyy P., Melnychok L., Pizyur Ya.* Chebyshev approximation of multivariable functions with the interpolation. Mathematical Modeling and Computing. 2022. Vol. 9, N. 3, P. 757–766. https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.757

[5] *P. S. Malachivskyy, Y. V. Pizyur, R. P. Malachivskyi, and O. M. Ukhanska,* Chebyshev approximation of functions of several variables, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 56, No. 1. – Pp. 76–86, 2020. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8

Chebyshev Approximation Multivariable Functions With the Interpolation of the Value of the Function and its Partial Derivative

Petro Malachivskyy, Lev Melnychok

A method for constructing the Chebyshev approximation of a discrete the multivariable functions with reproduction of its values and values of its partial derivatives at given points is proposed. The idea of the method is based on the construction of the limiting average degree approximation with the appropriate interpolation conditions. An iterative scheme based on the method of least squares with a variable weight function was used to construct the average-level approximation. The presented results of the approximation of the function of one variable confirm the fulfillment of the characteristic property of the Chebyshev approximation with the reproduction of the values of the function and the values of its derivatives at the given points.

Отримано 09.02.2023