УДК 517.95, 511.2

Метричні оцінки визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера

Володимир Ільків [1], Михайло Симотюк [2], Ярослав Слоньовський [3]

[1] д. ф.-м. н., професор, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, e-mail: ilkivvv@i.ua
[2] к. ф.-м. н., ст. наук. сп., зав. лаб. математичної фізики відділу диференціальних рівнянь і теорії функцій ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-Б, 79060, Львів, e-mail: quaternion@ukr.net
[3] аспірант кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, e-mail: yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

Встановлено метричні оцінки знизу для характеристичного визначника інтерполяційної задачі Ніколетті за виділеною змінною та умовами періодичності за рештою змінних для гіперболічного рівняння типу Ейлера у випадку, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію.

Ключові слова: багатоточкова задача, рівняння типу Ейлера, метричний підхід, проблема малих знаменників.

Вступ. Будемо використовувати такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbf{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, i – уявна одиниця, $\mathrm{Pol}^{\mathrm{hom}}_{n,p}$ – множина усіх однорідних поліномів степеня n від p змінних, μA – міра Лебега вимірної множини $A\subset\mathbf{R}$; H_q, $q\geq 0$, – гільбертів простір усіх тригонометричних рядів

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^p}\varphi_k\exp(ik,x),\ \ \varphi_k\in\mathbf{C},$$

для яких є скінченною норма $\left\|\varphi(x);H_q\right\|=\left(\sum_k|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2q}\right)^{1/2}$, $C^n([a,b];H_q)$, $n\in\mathbf{Z}_+$, – простір функцій $u(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^p}u_k(t)\exp(ik,x)$, $u_k\in C^n[a,b]$, зі скінченною нормою $\left\|u;C^n([a,b];H_q)\right\|=\sum\limits_{j=0}^{n}\max\limits_{t\in[a,b]}\left\|(t\partial/\partial t)^j u(t,\cdot);H_q\right\|$.

Нехай $n\in\mathbf{N}$, а поліноми $A_j(z_1,\ldots,z_p)\in\mathrm{Pol}^{\mathrm{hom}}_{j,p}$, $j=1,\ldots,n$, є такими, що для кожного $k\in\mathbf{Z}^p$, $k\neq\vec{0}$, многочлен

$$L_n(\lambda,k)\equiv\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(k)\lambda^j \qquad (1)$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2023, вип. 36, 96-100

має різні ненульові суто уявні λ-корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$. Відомо (див., напр. [2]), що для кожного $k \in \mathbf{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, виконуються оцінки

$$\left|\lambda_j(k)\right| \leq C_1(1+|k|), \qquad j=1,\ldots,n, \tag{2}$$

де C_1 – додатна стала, що не залежить від $k \in \mathbf{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$. Умови коректної розв'язності задачі Ніколетті для гіперболічного рівняння типу Ейлера

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j}(D_x)u(t,x) = 0,\ (t,x)\in(0,T)\times\Omega^p, \tag{3}$$

$$(t\,\partial/\partial t)^{j-1}u(t,x)\Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j=1,\ldots,n, \quad 1\leq t_1<\ldots<t_n\leq T, \quad x\in\Omega^p, \tag{4}$$

пов'язані із властивостями таких характеристичних визначників [1, 2]:

$$\Delta_n(k) = \det\left\|(td/dt)^{j-1}y_q(t_j,k)\right\|_{j,q=1}^n, \qquad k\in\mathbf{Z}^p, \tag{5}$$

де

$$y_q(t,k) = \begin{cases} \ln^{q-1} t, & k=\vec{0}, \\ t^{\lambda_q(k)}, & k\neq\vec{0}, \end{cases} \qquad q=1,\ldots,n.$$

Зокрема, при виконанні умови

$$\forall k\in\mathbf{Z}^p \quad \Delta_n(k)\neq 0 \tag{6}$$

задача (5), (6) має єдиний формальний розв'язок, що зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^p}\sum_{j,q=1}^n \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta_n(k)}\varphi_{j,k}\, y_q(t,k)\exp(ik,x), \tag{7}$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $(td/dt)^{j-1}y_q(t_j,k)$, $j,q=1,\ldots,n$, у визначнику $\Delta_n(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k\in\mathbf{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$. Якщо, крім умови (5), існує така стала ω, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbf{Z}^p$ справджується нерівність

$$|\Delta_n(k)| \geq |k|^{-\omega}, \tag{8}$$

то можна встановити збіжність ряду (7) у шкалі просторів $C^n([1,T];H_\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, якщо $\varphi_j\in H_{\alpha_j}$ для деяких $\alpha_j\in\mathbf{R}$, $j=1,\ldots,n$. Тому для обгрунтування коректності задачі (3), (4) актуальним завданням є дослідження питання про можливість виконання оцінки (8). У цьому й полягає основна мета даної праці. Тут доведено оцінку (8) для випадку, коли вузли інтерполяції $t_1,\ldots,t_n$ в умовах Ніколетті (6) є логарифмічно рівновіддаленими, тобто виконуються рівності

$$t_j = t_1^j, \quad j=1,\ldots,n, \quad t_1>1. \tag{9}$$

За допомогою метричного підходу [3, 4] показано (див. нижче теорему 1), що при $\omega > (p-1)n(n-1)/2$ оцінка (8) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}$) чисел $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbf{Z}^p$. Для доведення теореми 1 використано допоміжні твердження: лему 1 про оцінки мір виняткових множин гладких функцій спеціального вигляду, лему 2 про оцінку знизу модулів чисел $\lambda_j(k)$ та їх різниць $\lambda_j(k) - \lambda_q(k)$, а також лему Бореля-Кантеллі. Зауважимо, що метричні оцінки для характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння зі змінними коефіцієнтами є новими; раніше такі оцінки встановлено у [2] для випадку рівняння зі сталими коефіцієнтами.

2. Допоміжні твердження.

Для доведення основного результату використовуємо такі допоміжні твердження.

Для функції $f : I \to \mathbf{R}$, заданої на проміжку $I \subset \mathbf{R}$, через $E(f, \varepsilon, I)$, $\varepsilon > 0$, позначимо множину $E(f, \varepsilon, I) = \{t \in I : \left| f(t) \right| < \varepsilon\}$.

Лема 2 [1]. *Нехай функція* $f(t)$ *має вигляд*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j t^{\lambda_j}, \quad \lambda_j \neq \lambda_q, \quad j \neq q,$$

де $\lambda_j, p_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, m$, причому $\left| p_1 \right| + \ldots + \left| p_m \right| > 0$.

Якщо для всіх $t \in [a, b] \subset [1, +\infty)$ *виконується умова*

$$\left| (t\, d/dt)^n f(t) + a_1 (t\, d/dt)^{n-1} f(t) + \ldots + a_n f(t) \right| \geq \delta > 0,$$

де $a_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, n$, *то для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *справджується оцінка*

$$\mu E(f, \varepsilon, [a, b]) \leq C_2 \Lambda (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad \Lambda \equiv 1 + \max_{1 \leq j \leq m} \left| \lambda_j \right|,$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A \equiv 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left| a_j \right|^{1/j}$, $C_2 = C_2(a, b, m, n)$.

Лема 2 [2]. *Існують сталі* $C_3, C_4 > 0$ *такі, що для всіх* $k \in \mathbf{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, *виконуються оцінки*

$$|\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \geq C_3 \left| k \right|, \; n \geq j > q \geq 1, \tag{10}$$

$$|\lambda_j(k)| \geq C_4 \left| k \right|, \; j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Лема 3 (Бореля-Кантеллі, [3, 4]). *Нехай* $A_q \; (q = 1, 2, \ldots)$ – *послідовність вимірних за Лебегом множин з* $\mathbf{R}$, *причому ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$ *є збіжним. Тоді міра Лебега множини тих дійсних чисел, які належать до нескінченної кількості* *множин* A_q *, дорівнює нулю.*

3. Метричні оцінки для характеристичного визначника у випадку логарифмічно рівновіддаленних вузлів.

Встановимо оцінки знизу для визначника (5) у випадку, коли вузли $t_1,\ldots,t_n$ є членами геометричної прогресії зі знаменником $t_1 \in (1, T^{1/n}]$, тобто виконуються рівності (9). У цьому випадку визначник (5) обчислюється за формулою

$$\Delta_n(k) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ \lambda_1(k) t_1^{2\lambda_1(k)} & \ldots & \lambda_n(k) t_1^{2\lambda_n(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1}(k) t_1^{n\lambda_1(k)} & \ldots & \lambda_n^{n-1}(k) t_1^{n\lambda_n(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= t_1^{\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k)} \prod_{n\ge j>q\ge 1} \left(\lambda_j(k) t_1^{\lambda_j(k)} - \lambda_q(k) t_1^{\lambda_q(k)} \right), \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0}. \qquad (12)$$

При виведенні (12) враховано формулу для визначника Вандермонда чисел
$\lambda_1(k) t_1^{\lambda_1(k)},\ldots,\lambda_n(k) t_1^{\lambda_n(k)}$.

Теорема 1. *Нехай справджуються рівності* (9). *Тоді нерівність* (8) *виконується для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbf{R}$) *чисел* $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ *для всіх* (*крім, можливо, скінченної кількості*) $k \in \mathbf{Z}^p$*, якщо* $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.

Доведення . Враховуючи, що $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ суто уявні числа, за допомогою елементарних перетворень формули (12) одержуємо, що

$$|\Delta_n(k)| = \prod_{n\ge j>q\ge 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k) t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}|, \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0}. \qquad (13)$$

Покладемо: $\psi(k,t_1) = \prod_{n\ge j>q\ge 1} \psi_{jq}(k,t_1), \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0}, \quad t_1 \in (1, T^{1/n}],$

$$\psi_{jq}(k,t_1) = \lambda_j(k) - \lambda_q(k) t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}, \quad n \ge j > q \ge 1, \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0},$$

$$R_{jq}\left(t_1 \frac{d}{dt_1} \right) = t_1 \frac{d}{dt_1} + \lambda_j(k) - \lambda_q(k), \quad n \ge j > q \ge 1, \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0},$$

$$E(k) = \{ t_1 \in (1, T^{1/n}] : |\psi(k,t_1)| < \eta(k) \}, \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0},$$

$$E_{jq}(k) = \{ t_1 \in (1, T^{1/n}] : |\psi_{jq}(k,t_1)| < \eta_{jq}(k) \}, \quad n \ge j > q \ge 1, \quad k \in \mathbf{Z}^p,\ k \ne \vec{0},$$

де $\eta(k) = \prod_{n\ge j>q\ge 1} \eta_{jq}(k)$, $\eta_{jq}(k) = |k|^{-(p-1)-\varepsilon}$, $\varepsilon = 2\omega/(n(n-1)) - p + 1 > 0$. Оскільки

$$\left| R_{jq}\left(t_1 \frac{d}{dt_1}\right)\psi_{jq}(k,t_1)\right| = \left|\lambda_j(k)(\lambda_j(k)-\lambda_q(k))\right| \geq C_5\,|k|^2, \tag{13}$$

де $n \geq j > q \geq 1,\ k \in \mathbf{Z}^p, k \neq \vec{0}$, стала $C_5 > 0$ не залежить від вибору k , то з формул (2), (12), (13) на підставі леми 2 дістанемо

$$\mu\, E_{jq}(k) \leq C_6(1+|k|)|k|^{-(p-1)-\varepsilon}/|k|^2 \leq C_7|k|^{-p-\varepsilon}, \tag{14}$$

де $n \geq j > q \geq 1,\ k \in \mathbf{Z}^p, k \neq \vec{0}$. Враховуючи, що $E(k) \subset \bigcup\limits_{n \geq j > q \geq 1} E_{jq}(k)$, з нерівностей (14) отримуємо таку оцінку для мір множин $E(k)$:

$$\mu\, E(k) \leq \sum_{n \geq j > q \geq 1} \mu\, E_{jq}(k) \leq C_8|k|^{-p-\varepsilon},\ \ C_8 > 0\,. \tag{15}$$

Із оцінок (15) випливає збіжність ряду $\sum\limits_k \mu\, E(k)$. Тому за лемою Бореля–Кантеллі для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}$) чисел $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ нерівність $|\psi(k,t_1)| \geq \eta(k) = |k|^{-\omega}$, де $\omega > (p-1)n(n-1)/2$, а отже, й нерівність $|\Delta_n(k)| \geq \eta(k)$ виконуються для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbf{Z}^p$. Теорему доведено.

Висновки. Таким чином, у роботі на підставі метричного підходу встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника задачі Ніколетті для лінійного гіперболічного рівняння типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами, якщо вузли інтерполяції в умовах (4) утворюють геометричну прогресію. Отримані результати можна перенести на випадок задачі Ніколетті для систем лінійних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера.

Література

[1] *Ільків В. С., Симотюк М. М., Слоньовський Я. О.* Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65,** № 1-2. – С. 65–79.
[2] *Матурін Ю. П., Симотюк М. М.* Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2018. – **2,** вип. 2 (33). – С. 100–108.
[3] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
[4] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Metric estimates of the determinant of the Nicoletti problem for the Euler-type equation

Volodymyr Ilkiv, Mykhailo Symotiuk, Yaroslav Slonovskyi

The estimates from below are established for the characteristic determinant of the Nicoletti problem and periodicity conditions on the remaining variables for an Euler-type hyperbolic equation when the interpolation nodes form a geometric progression.