

Урахування явищ осмосу при моделюванні процесів типу фільтрація-конвекція у многозв'язних областях методами теорії збурень

Андрій Бомба¹, Оксана Остапчук²

¹ д. т. н., професор, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, 33028, Рівне, e-mail: a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

² к. т. н., доцентка, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, 33028, Рівне, e-mail: o.p.ostapchuk@nuwm.edu.ua

У роботі на основі синтезу методу комплексного аналізу та теорії збурень розроблено новий підхід до урахування осмосу при прогнозуванні процесів типу фільтрація-конвекція в квазіідеальних пористих середовищах (в многозв'язних областях), обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Розв'язок відповідної виродженої задачі одержано на основі розробленого методу нелінійного обернення розв'язків крайових задач на конформні відображення. Побудовано алгоритм розрахунку рівномірної динамічної сітки, ліній розділу течії (кінцевих точок на внутрішньому контурі-поповнювачі течії) і швидкості ідеального фільтраційного поля в тризв'язній області обмеженої еквіпотенціальними лініями. З урахуванням викладеного та розробленого методу характеристик, отримано формули для наближеного розв'язку задач конвективного масоперенесення на збуреному осмосом фільтраційному полі.

Ключові слова: крайова задача, фільтрація, конвекція, осмос, збурення, квазіконформні відображення, числові і асимптотичні методи

Вступ. Крайові задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін-осмос в пористих середовищах розглядалися в працях [1, 2]. У роботах [1-5] розглядалися задачі математичного моделювання процесів фільтрації сольових розчинів з урахуванням взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку та ґрунтового середовища, а також досліджено вплив осмотичних явищ на процес масоперенесення.

Використовуючи методiku переходу від фізичної області до відповідної області комплексного потенціалу разом з аналітичними і чисельно-аналітичними методами, у працях [3-5] отримані розв'язки найбільш типових двовимірних задач конвективного масопереносу при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях, обмежених двома лініями току і двома еквіпотенціальними лініями, а також задач у двозв'язних областях, обмежених двома еквіпотенціальними лініями. Особливість розв'язування такого роду задач для тризв'язної області G_z полягає в тому, що в залежності від співвідношення значень граничних потенціалів, відповідна область комплексного потенціалу G_ω будується неоднозначно, і, разом з побудовою алгоритму чисельного розв'язання нелінійної зворотної задачі на конформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ в кожному з конкретних випадків, виникає “проблема вибору”.

Мета цієї праці – розроблення методу розв'язання задач фільтрації і

конвективного масопереносу для тризв'язної області у випадку, коли один з її обмежуючих внутрішніх контурів поповнює вихідний потік з урахуванням осмосу шляхом збурення.

1. Постановка задачі

Розглянемо (рис. 1а) у деякій тризв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій замкнутими гладкими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, модельну задачу типу “конвекція-фільтрація-осмос”

$$v = \text{grad } \varphi + \varepsilon \text{ grad } c, \quad \text{div } v = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi_0; \quad (1)$$

$$v_x c_x + v_y c_y - c_t = 0, \quad (x, y, t) \in G = G_z \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$c|_{L_*} = c_*(x, y, t), \quad c|_{\{z \in L_0 : \varphi_n > 0\}} = c^0(x, y, t), \quad c|_{t=0, (x, y) \in G_z} = c_0^0(x, y), \quad (3)$$

де $c_*(x, y, t)$, $c^0(x, y, t)$, $c_0^0(x, y)$ – задані досить гладкі та узгоджені на $(\partial G_z, 0)$ функції, $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал швидкості фільтрації $v = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ ($-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$), n – вектор внутрішньої нормалі до ∂G_z , ε – коефіцієнт осмосу (малий параметр) Значення потенціалу φ_0 на додатковому “контурі-поповнювачі” L_0 таке, що $\oint_{L_0} -v_y dx + v_x dy > 0$. Точніше даний контур L_0

складається із двох ділянок, через одну з яких із внутрішності даного контуру має місце перетік до зовнішнього контуру L^* , а інша частина є «втоком» рідини, що поступає із внутрішності контуру L_* . Вважаємо, що початкове забруднення даної області та внутрішності контуру L_* є малими (функції $c_*(x, y, t)$, $c_0^0(x, y)$ – близькі до нуля), а внутрішність контуру L_0 – є джерелом забруднень. В силу відсутності дифузії забрудненою буде деяка ділянка C_2F зовнішнього контуру. Виявляється, що за рахунок осмосу відчутними можуть бути забруднення деякої ділянки A_2D і внутрішнього контуру L_* (за рахунок осмосу). Головний акцент даної роботи ставиться на мало затратному урахуванні осмотичних явищ.

Відповідна область комплексного потенціалу G_ω зображена на рис. 1б, де $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ – комплексний потенціал потоку, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії. Щодо шуканих параметрів Q_0^* , Q_*^0 , Q_*^* (відповідно величин потоків: від L_0 до L^* ; від L_* до L_0 , від L_* до L^* , де $Q_0^* - Q_*^0 = \oint_{L_0} -v_y dx + v_x dy$,

$$Q_*^* + Q_0^* = \oint_{L_0^*} -v_y dx + v_x dy, \quad -Q_*^* - Q_*^0 = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy) \text{ відомо лише, що } Q_0^* > Q_*^0.$$

Розріз $\Gamma = AB \cup BC$ ($A \in L_*$, $B \in L_0$, $C \in L^*$) тризв'язної області G_z умовно

вибирається уздовж однієї з ліній розділу течії і знаходиться в процесі розв'язку задачі.

2. Асимптотика розв'язку

Розв'язок задачі (1)-(3) представимо у вигляді асимптотичного ряду

$$c = c_\varepsilon(x, y, t) = c_0(x, y, t) + \varepsilon \cdot c_1(x, y, t) + \dots + \varepsilon^n \cdot c_n(x, y, t) + R_n^c(x, y, t, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\varphi = \varphi_\varepsilon(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + \varepsilon \cdot \varphi_1(x, y, t) + \dots + \varepsilon^n \cdot \varphi_n(x, y, t) + R_n^\varphi(x, y, t, \varepsilon), \quad (5)$$

де R_n^c , R_n^φ , – залишкові члени, c_i, φ_i ($i = \overline{0, n}$) – шукані члени асимптотики, які знаходяться шляхом підстановки (4), (5) у вихідні рівняння та умови (1-3) з наступним прирівнюванням у відповідних співвідношеннях членів при однакових степенях ε . Для знаходження, зокрема, головних членів асимптотики (при $\varepsilon = 0$, $c = c_0$, $\varphi = \varphi_0$) поступатимемо так.

Аналогічно до [3-5] характеристичну функцію течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i\psi(\varphi, \psi)$, невідомі параметри Q_0^*, Q_*^0, Q_*^* , координати вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ відповідні вузлам (φ_i, ψ_j) кусково-рівномірної сітки в області комплексного потенціалу G_ω (рівномірної в кожній з підобластей $G_\omega^1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, 0 < \psi < Q_*^0\}$, $G_\omega^2 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^4 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$ даної області) шукаємо шляхом побудови наближеного конформного відображення області G_ω на вихідну область $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$ при відповідності кутових точок. Тут

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \Delta\varphi_1 = (\varphi_0 - \varphi_*)/n_1, \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_0)/n_2, \\ \varphi_0 + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, n = n_1 + n_2, n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 \in N, \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} -Q_*^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \Delta\psi_1 = Q_*^*/m_1, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m_1 + m_2}, \text{ для } i \leq n_1, \Delta\psi_2 = Q_0^0/m_2, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_3, & j = \overline{m_1, m_1 + m_3}, \text{ для } i \geq n_1, \Delta\psi_3 = Q_0^*/m_3. \end{cases}$$

Тепер, відповідно до формули для обчислення вектора швидкості даного поля $\vec{v} = \frac{d\omega}{dz} = \left(\frac{dz}{d\omega} \right)^{-1}$, у внутрішніх вузлах динамічної сітки одержимо:

$$v_{xi,j} = v_x(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(x_{i+1,j} - x_{i,j})\Delta\psi, \quad v_{yi,j} = v_y(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j} - y_{i,j})\Delta\psi,$$

де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})$, $v_{i,j} = \sqrt{v_{xi,j}^2 + v_{yi,j}^2}$.

Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (1) і умовах (2), приходимо до відповідної періодичної задачі конвективного масопереносу для області G_ω :

$$v^2(\varphi, \psi) \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (\varphi, \psi, t) \in \Omega = G_\omega \times (0, \infty); \quad (6)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega;$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad t \geq 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_*^0; \quad c(\varphi_0, \psi, t) = c_0(\psi, t), \quad 0 < \psi \leq Q_0^*.$$

На підставі методу характеристик [3-5] її розв'язок представимо у виді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t), \psi), & t \leq f_1(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \\ c_*(\psi, t - f_1(\varphi, \psi)), & t > f_1(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4; \\ c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t), \psi), & t \leq f_2(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \\ c_0(\psi, t - f_2(\varphi, \psi)), & t > f_2(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^2, \end{cases}$$

де f_1^{-1} , f_2^{-1} – функції обернені відповідно до функцій f_1 , f_2 щодо змінної φ .

Лінію фронту (розділу “зон впливу” початкової і граничної умов) у фіксований момент часу t знаходимо в результаті розв'язку рівняння

$$t = f(\varphi, \psi), \quad \text{де } f(\varphi, \psi) = \begin{cases} f_1(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ f_2(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega^2. \end{cases}$$

Для наближеного обчислення виразів $f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t)$, $f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t)$ (у тому числі для обернення відповідних визначених інтегралів із змінною верхньою границею) використовуємо підхід, описаний у роботах [3-5].

У роботах [4, 5] (з урахуванням [6-9]) відповідний алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми.

На рис. 1а зображена динамічна сітка фільтраційної течії при: $L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos(t), \quad y = y_*(t) = \sin(t), \quad 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy :$

$$x = x^*(t) = 4\cos(t), \quad y = y^*(t) = 4\sin(t), \quad 0 \leq t < 2\pi\}, \quad L_0 = \{x + iy :$$

$$x = x_0(t) = 1 + \cos(t), \quad y = y_0(t) = \sin(t)/2, \quad 0 \leq t < 2\pi\}, \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi_0 = 0.6, \quad \varphi^* = 1,$$

$n = 50$ ($n_1 = 30$, $n_2 = 20$), $m_1 = 273$, $m_2 = 26$, $m_3 = 38$. У результаті чисельного розв'язку відповідної задачі на конформне відображення отримані значення витрат $Q_*^0 = 0.527$, $Q_0^* = 0.750$, $Q_*^* = 5.464$.

При цьому при врахуванні осмосу (при $\varepsilon = 10^{-5}$) на ділянці B_2E (внаслідок осмотичного «притягання забрудненнями» рідини) маємо незначне збільшення витрати, а саме $Q_*^0 = 0.52702$ (замість $Q_*^0 = 0.527$). Також на рис. 1в зображено розподіл швидкості вздовж характерних еквіпотенціальних ліній, де вздовж φ_5^* та φ_3^* чітко спостерігається ефект відповідних осмос-збурень.

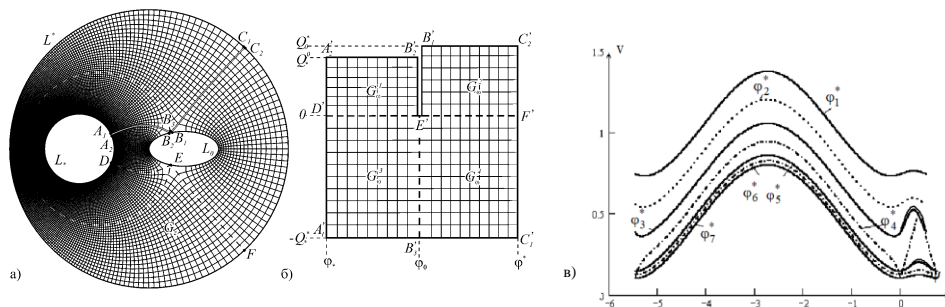


Рис. 1. Динамічна сітка в області фільтрації G_z , відповідна область комплексного потенціалу G_ω та графік розподілу швидкості вздовж характерних еквіпотенціалей

Для знаходження членів $\varphi_1 = \varphi_1(x, y)$, $c_1 = c_1(x, y)$ (в результаті окресленої вище процедури) розв'язуємо задачі (для спрощення викладок вважатимемо, що k не залежить від φ) для рівнянь виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b_1(x, y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + d_1(x, y, \varphi_1) = 0, \quad (7)$$

$$v_x(c_1)_x + v_y(c_1)_y + d^1(x, y, \dots) - (c_1)_t = 0, \quad (x, y, t) \in G = G_z \times (0, \infty), \quad (8)$$

де коефіцієнти a_1, b_1, d_1, d^1 виражаються через коефіцієнти розкладів в ряди Фур'є функцій, що входять у вихідні рівняння та відомі «складові» асимптоти розв'язку одержані на попередньому кроці. Зауважимо, що на відміну від (6) дані рівняння є неоднорідними. Їх розв'язки можна одержати з використанням [3-5], а розв'язання (7) можливе трьома шляхами: із застосуванням триангуляції області [2]; переходом від даного криволінійного чотирикутника до деякого параметричного прямокутника [1]; представленням вільного члена у вигляді композиції похідних від деякої функції з наступним введенням відповідного фіктивного потенціалу і застосування методу квазіконформних відображень аналогічно як до задачі (6).

Висновки. З вище викладеного бачимо перевагу переходу від прямих крайових задач на конформні відображення до обернених при розв'язанні розглянутих задач типу “конвекція-фільтрація” (при цьому автоматично усувається проблема побудови сітки, спрощується рівняння конвективного переносу, задача зводиться до канонічної області, а розв'язок вдається представити в чисельно-аналітичному вигляді). Крім того, паралельно з побудовою динамічної сітки і поля швидкості,

розроблений алгоритм дає можливість визначати лінії (точки) розділу течії, величини відповідних їм потоків, що істотно спрощує процес розв'язку задач конвективного переносу. Запропонований підхід в десятки разів пришвидшує як час, так і об'єм обчислень. Результати числових розрахунків вчергове підкреслюють факт, що в переважній більшості випадків, осмос доцільно враховувати лише вздовж окремих ділянок розглядуваного середовища.

Література

- [1] Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів: монографія. Рівне: НУВГП, 2004. 211 с.
- [2] Власюк А.П., Остапчук О.П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах: монографія. Рівне: НУВГП, 2015. 214 с.
- [3] Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М. Нелінійні сингулярно збуджені задачі типу «конвекція-дифузія»: монографія. Рівне: НУВГП, 2008. 252с.
- [4] Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярощак С.В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
- [5] Бомба А.Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збуджень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: монографія Рівне: О. Зень, 2017. 291 с.
- [6] Lavrentev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of function of complex variable. Nauka. Moscow, 1987, 544 p.
- [7] Godunov S.K., Ryabenkii V.S. Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory. Elsevier Science, Amsterdam, 1987.
- [8] Lyashko I.I., Makarov V.L., Skorobogatko A.A. The method of calculations. Kyiv, 1977. 408 p.
- [9] Samarskii Alexander A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001. 761 p.

Consideration of osmosis phenomena in modeling processes by the type of filtration-convection in multiply connected areas using perturbation theory methods

Andrii Bomba, Oksana Ostapchuk

In this paper considers the synthesis of methods of complex analysis and perturbation theory. A new approach has been developed to take into account osmosis when predicting filtration-convection processes in quasi-ideal porous media (multiply connected areas) bounded by flow lines and equipotential lines. The solution of the corresponding degenerate problem is obtained on the basis of the developed method of non-linear mapping of solutions of boundary value problems onto conformal reflections. An algorithm for calculating a uniform dynamic grid, flow dividing lines (finite points on the internal contour-filler of the flow) and the speed of an ideal filtration field in a three-connected area limited by equipotential lines is built. Taking into account the above and the developed method of characteristics, formulas for the approximate solution of problems of convective mass transfer on the filtration field perturbed by osmosis are obtained.

Отримано 17.03.23