УДК 519.8

Підхід до обчислення рівноважних потоків продукції конкурентних фірм через мережі ланцюгів постачання при ресурсних обмеженнях і ризикованих умовах

Василь Горбачук[1], Максим Дунаєвський[2], Сеїт-Бекір Сулейманов[3]

[1] д. ф-м. н., старший науковий співробітник, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, просп. Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: GorbachukVasyl@netscape.net
[2] магістр, , Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, просп. Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: MaxDunaievskyi@gmail.com
[3] магістр, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, просп. Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: SBSuleimanov@gmail.com

У роботі наведена методика зведення до системи варіаційних нерівностей задачі пошуку рівноважних за Нешем потоків продукції фірм, які працюють в ризикованих умовах і мають ресурсні обмеження на фактори виробництва, через мережі ланцюгів постачання.

Ключові слова: рівновага Неша; варіаційні нерівності; функція корисності; витрати; дохід.

Вступ. Ефективна й результативна робота критичних для оборони мереж ланцюгів постачання (supply chain networks, SCNs) є суттєвою як для національної, так і глобальної безпеки. Збої в ланцюгах постачання посилюються внаслідок зростаючих екологічних, біологічних, геополітичних та інших ризиків. Такі збої привернули увагу осіб, які розробляють стратегії і приймають рішення у державах, зокрема в секторі оборони.

14 березня 2023 р. на міжнародному Інтернет-семінарі, організованому Інститутом кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, професор Університету Джорджа Мейсона (США) Роман Поляк у своїй лекції згадав про свою публікацію з чисельних методів пошуку рівноваг Неша (Нобелівського лауреата 1994 р.) [1], результати якої створили засади сучасних підходів до пошуку рівноважних рішень у різноманітних прикладних постановках [2–5].

1. Модель мереж ланцюгів постачання та цільових функцій їх учасників

Введемо позначення: n_M^i − виробничі потужності типової оборонної фірми i, яка може використовувати n_D^i центрів дистрибуції (distribution) та розподіляти свій оборонний продукт на n_R ринках оборонного попиту; L^i − множина ланок (links) SCN оборонної фірми $i = 1,...,I$, з n_L елементів; $G = [N, L]$ − граф (graph), що складається з множини N вузлів і множини L ланок. Топологію оборонної SCN можна модифікувати чи адаптувати відповідно до конкретного досліджуваного оборонного продукту [5].

Встановимо рівняння збереження потоку оборонного продукту через рівність попиту (demand) d_{ik} на цей продукт фірми i на кожному ринку $k=1,...,n_R$ оборонного попиту (елементи $\{d_{ik}\}$ даної фірми $i=1,...,I$ формують вектор-стовпець $d^i \in R_+^{n_R}$, а всі такі вектор-стовпці формують вектор $d \in R_+^{n_R I}$) та сумарних потоків $\sum_{p \in P_k^i} x_p$ цього продукту від оборонної фірми:

$$\sum_{p \in P_k^i} x_p = d_{ik} , \qquad (1)$$

де P_k^i – множина шляхів (paths) у SCN фірми $i=1,...,I$, які починаються у вузлі цієї фірми та завершуються на ринку $k=1,...,n_R$ оборонного попиту (P^i – набір усіх n_{P^i} шляхів фірми $i=1,...,I$, P – набір усіх n_P шляхів економіки SCN), x_p – невід'ємний потік оборонного продукту фірми $i=1,...,I$ на шляху $p \in P_k^i$ (елементи x_p фірми $i=1,...,I$ формують вектор-стовпець $x^i \in R_+^{n_{P^i}}$, а всі такі вектор-стовпці формують вектор $x \in R_+^{n_P}$). Тоді випливає обмеження

$$x_p \ge 0 \;\; \forall\, p \in P^i . \qquad (2)$$

Невід'ємний потік (flow) f_a оборонного продукту на будь-якій ланці $a \in L^i$ (всі такі потоки формують вектор-стовпець $f \in R_+^{n_L}$) має рівнятися сумарному потоку:

$$f_a = \sum_{p \in P^i} x_p \delta_{ap} \;\; \forall\, a \in L^i , \qquad (3)$$

де $\delta_{ap} = \{1,\, a \in p;\; 0,\, a \notin p\}$ є булевою змінною – аналогом символа Кронекера. Рівність (3) гарантує, що потік продукту фірми $i=1,...,I$ на будь-якій ланці $a \in L^i$ дорівнює потокам цього продукту на всіх шляхах p, які містять цю ланку.

Припустимо, що випуск f_a продукту на кожній ланці $a \in L^i$ є лінійною функцією трудомісткості (labor input) l_a (на цій ланці), вимірюваній в людино-годинах [5]:

$$f_a = \alpha_a l_a \;\; \forall\, a \in L^i ,\; i=1,...,I , \qquad (4)$$

де α_a – додатний множник, що пов'язує трудомісткість з випуском потоку оборонного продукту на ланці $a \in L^i$. Чим більше значення α_a, тим продуктивніша праця на ланці [5].

Оскільки нестача кваліфікованої робочої сили є великою проблемою в критичній для оборони SCN, то важлива верхня межа $\overline{l_a}$ наявності праці на ланці $a \in L^i$:

$$l_a \le \overline{l}_a \;\; \forall a \in L^i. \tag{5}$$

Функція корисності (utility)

$$U^i = R^i - C^i, \tag{6}$$

оборонної фірми $i = 1,...,I$ − це прибуток, що рівняється різниці між її доходом (revenue)

$$R^i = \sum_{k=1}^{n_R} d_{ik} \rho_{ik}(d)$$

та її загальними витратами (costs)

$$C^i = \sum_{a \in L^i} \left\{ \hat{c}_a(f) + w_a l_a + \beta_i r_a(f) \right\},$$

де $\rho_{ik}(d)$ − функція ціни попиту на оборонний продукт фірми i на ринку $k = 1,...,n_R$ оборонного попиту, $\hat{c}_a(f)$ − пов'язані з ланкою $a \in L$ загальні операційні витрати, w_a − витрати на зарплату (wage) одиниці праці на ланці $a \in L$, $r_a(f)$ − пов'язана з ланкою $a \in L$ функція ризику (risk), β_i − невід'ємна вага, застосована до оцінювання загального ризику фірми i (елементи β_i формують вектор-стовпець β), $\sum_{a \in L^i} \hat{c}_a(f)$ − загальні операційні витрати для SCN фірми i, $\sum_{a \in L^i} w_a l_a$ − загальна виплата (payout) працівникам фірми i, $\beta_i \sum_{a \in L^i} r_a(f)$ − зважений загальний ризик фірми i.

2. Зведення задачі до розв'язання системи варіаційних нерівностей

Функції корисності $U^i = R^i - C^i$, $i = 1,...,I$, вважаються увігнутими, де функції $\rho_{ik}(d)$ є монотонно спадними, а функції $\hat{c}_a(f)$ та $r_a(f)$ є опуклими; нехай функції $\rho_{ik}(d)$, $\hat{c}_a(f)$, $r_a(f)$ є неперервно диференційованими.

Кожна оборонна фірма $i = 1,...,I$ прагне максимізувати свою цільову функцію (6) при обмеженнях (1)−(5).

Покажемо, що цільову функцію (6) можна виразити лише через змінні потоків x_p шляхів $p \in P_k^i$. В силу нерівностей (2) і рівностей (3) виражаємо $\forall a \in L$ елементи $f \in R_+^{n_L}$ через елементи $x \in R_+^{n_P}$:

$$\hat{c}_a(f) = \tilde{c}_a(x), \qquad r_a(f) = \tilde{r}_a(x).$$

В силу рівностей (1) виражаємо елементи $d \in R_+^{n_R I}$ через елементи $x \in R_+^{n_P}$:

$$\rho_{ik}(d) = \tilde{\rho}_{ik}(x), \; i = 1,...,I, \; k = 1,...,n_R.$$

Крім того, з рівнянь (3) і (4) $\forall a \in L$ випливає рівність [N, N]

$$\alpha_a l_a = f_a = \sum_{p \in P^i} x_p \delta_{ap} , \qquad l_a = \frac{1}{\alpha_a} \sum_{p \in P^i} x_p \delta_{ap} .$$

Звідси

$$\tilde{R}^i(x) = R^i = \sum_{k=1}^{n_R} d_{ik} \rho_{ik}(d) = \sum_{k=1}^{n_R} \tilde{\rho}_{ik}(x) \sum_{p \in P_k^i} x_p ,$$

$$\tilde{C}^i(x) = C^i = \sum_{a \in L^i} \left\{ \hat{c}_a(f) + w_a l_a + \beta_i r_a(f) \right\} = \sum_{a \in L^i} \left\{ \tilde{c}_a(x) + \frac{w_a}{\alpha_a} \sum_{p \in P^i} x_p \delta_{\alpha p} + \beta_i \tilde{r}_a(x) \right\},$$

$$\tilde{U}^i(x) = U^i = R^i - C^i = \tilde{R}_i(x) - \tilde{C}_i(x), \tag{7}$$

а обмеження (5) переписується як

$$\frac{1}{\alpha_a} \sum_{p \in P^i} x_p \delta_{ap} = l_a \le \bar{l}_a \quad \forall a \in L^i . \tag{8}$$

Таким чином, задача зводиться до пошуку $x \in R_+^{n_P}$, що максимізує функції (7) при обмеженнях (8), $i = 1,...,I$.

Допустима множина $K_i(x^i)$ для оборонної фірми $i = 1,...,I$ визначається лінійними обмеженнями

$$K_i(x^i) = \left\{ x^i : x^i \in R_+^{n_{P^i}} ; \frac{1}{\alpha_a} \sum_{p \in P^i} x_p \delta_{ap} \le \bar{l}_a \, \forall a \in L^i \right\}, \tag{9}$$

а допустима множина для всіх таких фірм – як декартовий добуток $K(x) = \prod_{i=1}^{I} K_i(x^i)$. Очевидно, що $K(x)$ є опуклою множиною.

Якщо кожна оборонна фірма $i = 1,...,I$ максимізує по x^i свою функцію корисності (7), то ці фірми некооперативно конкурують, досягаючи певної рівноваги Неша – рівноваги Неша оборонного SC. Зразок потоку $x^* \equiv (x^{1*},...,x^{I*}) \in K(x)$ шляхів (path flow pattern) називають рівновагою Неша оборонного SC, якщо для кожної оборонної фірми $i = 1,...,I$ має місце нерівність

$$\tilde{U}^i(x^*) \ge \tilde{U}^i(x^{1*},....,x^{i-1*}, x^i, x^{i+1*},...,x^{I*}) \quad \forall x^i \in K_i(x^i) . \tag{10}$$

Умови (10) означають, що в рівновазі Неша оборонного SC будь-яка фірма не може збільшити значення своєї функції корисності в односторонньому порядку (не формуючи коаліції). З класичної теорії рівноваг Неша і варіаційних нерівностей випливає, що при вищезазначених припущеннях для $\rho_{ik}(d) = \tilde{\rho}_{ik}(x)$, $\hat{c}_a(f) = \tilde{c}_a(x)$, $r_a(f) = \tilde{r}_a(x)$ рівновага Неша оборонного SC є розв’язком $x^* \in K(x)$ задачі варіаційних нерівностей

$$\sum_{i=1}^{I}\left\langle \nabla_{x^i}\tilde{U}^i(x^*), x^{i*}-x^i \right\rangle \geq 0 \quad \forall x^i \in K_i(x^i), \tag{11}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означає внутрішній добуток у відповідному евклідовому просторі $R_+^{n_P}$, а $\nabla_{x^i}\tilde{U}^i(x^*)$ – градієнт по x^i функції корисності $\tilde{U}^i(x)$ у точці $x = x^*$ [5].

Розв'язок задачі (11) існує, оскільки допустима множина $K(x)$ є компактною, а при вищезазначених припущеннях для $\rho_{ik}(d) = \tilde{\rho}_{ik}(x)$, $\hat{c}_a(f)$ $= \tilde{c}_a(x)$, $r_a(f) = \tilde{r}_a(x)$ функції $\tilde{U}^i(x)$ корисності є неперервно диференційованими [5]. Водночас слід зазначити, що участь довільної фірми $i = 1,...,I$ у SCN передбачає невід'ємність значення її функції корисності (7), залежної від усіх потоків $x \in R_+^{n_P}$, тобто від загальної ситуації. Якщо ж це значення стає від'ємним (фірма зазнає збитків), то за відсутності субсидій чи іншого сприяння ця фірма не входитиме в ринок, тобто обиратиме $x^i = \vec{0}$. З іншого боку, випадки $x^i = \vec{0}$ мають певний практичний інтерес.

Висновки. Таким чином, в роботі запропоновано підхід до обчислення рівноважних потоків продукції конкурентних фірм через мережі ланцюгів постачання при ресурсних обмеженнях і ризикованих умовах.

Література

[1] *Зуховицкий С.И., Поляк Р.А., Примак М.Е.* Два метода отыскания точек равновесия вогнутых игр n лиц. Доклады АН СССР. 1969. 185 (1). С. 24–27.

[2] *Gorbachuk V.* Methods for Nash equilibria search. Nonsmooth Analysis and its Applications to Mathematical Economics. Baku, Azerbaijan: Academy of Sciences of USSR, 1991. P. 65.

[3] *Горбачук В.М., Дунаєвський М.С., Морозов О.О.* Рівноважні інвестиції у кібербезпеку мережі ланцюгів постачання. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 47–52.

[4] *Горбачук В.М., Дунаєвський М.С., Морозов О.О.* Характеристики рівноваг ланцюгів постачання. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. 2019. Вип. 19. С. 31–37.

[5] *Nagurney A.* Defense critical supply chain networks and risk management with the inclusion of labor: dynamics and quantification of performance and the ranking of nodes and links. Amherst, MA: Department of Operations and Information Management; Isenberg School of Management; University of Massachusetts, 2022. 20 p.

An approach to computing the equilibrium product flows of competitive firms through supply chain networks under resource constraints and risky conditions

Vasyl Gorbachuk, Maksym Dunaievskyi, Seit-Bekir Suleimanov

The paper proposes an approach to computing the equilibrium product flows of competitive firms through supply chain networks under resource constraints and risky conditions.

Отримано 29.03.23