УДК 519.8

Принцип редукції математичних моделей та його застосування

Ярослав Матвійчук

д.т.н., проф., Національний університет «Львівська політехніка»
(12, вул. Ст.Бандери, Львів 79013 Україна, matv@ua.fm)

Викладено принцип редукції структури математичної моделі за результатами ідентифікацій. Для диференційних рівнянь атрактора Лоренца продемонстровані застосування та результати принципу редукції і також індукції математичної моделі у вигляді диференціальних рівнянь. Показано приклад редукції моделі у вигляді рекурсивної нейронної мережі. Точність моделі у результаті редукції покращилась у 16 раз.

Ключові слова – математична модель, редукція, ідентифікація, некоректність, нейронна мережа, звичайні диференціальні рівняння.

Вступ. Математичне моделювання є базовим у людському пізнанні. Покращення якості математичного моделювання сприяє адекватному зображенню та вивченню навколишнього світу.

Ідентифікація математичних моделей є оберненою некоректною задачею [1]. Часто причиною некоректності є надлишковість моделі, тобто наявність елементів моделі, непотрібних для даної задачі ідентифікації.

Пропонується принцип, за яким можна виявляти та видаляти зайві елементи моделі, або нарощувати модель лише необхідними елементами.

1. Принцип редукції

Допустимо, що для модельованого об'єкта апріорі відома точна математична модель з вектором параметрів $p = (p_1,\ldots,p_n)$, Параметри моделі обчислює деяка процедура параметричної ідентифікації. Нехай нульове значення параметра означає відсутність елемента. Нехай також розв'язок задачі ідентифікації вектор p неперервно залежить від умов задачі в деякому околі цих умов.

Ускладнимо математичну модель, що означає появу надлишкових параметрів у векторі $p = (p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots,p_m)$. Тоді для "зайвих" параметрів $p_{n+1},\ldots,p_m$ процедура ідентифікації обчислить майже нульові значення (в межах точності обрахунків):

$$p_i \approx 0; \quad i = n+1,\ldots,m. \qquad (1)$$

Але тільки за ознакою (1) не можна визначити і видалити "зайві" параметри, бо серед значень "незайвих" параметрів $p_1,\ldots,p_n$ можуть бути близькі до машинного нуля, але безумовно суттєві.

Введемо до умов задачі ідентифікації невеликі збурення *disturb* в межах вказаного вище околу неперервності розв'язку. Вектор параметрів p', обчислений процедурою ідентифікації для збуреної задачі, відрізняється від вектора p незбуреної задачі. Для кожного параметра обчислимо модулі відносних відхилень за формулою

$$\delta_i = abs((p'_i - p_i) / p'_i); \quad i=1,\dots,m. \tag{2}$$

Для "незайвих" параметрів внаслідок неперервної залежності параметрів від збурень абсолютні відхилення ($p'_i - p_i$) прямують до нуля, якщо збурення прямують до нуля. Відповідна ситуація є для відносних відхилень:

$$\delta_i \to 0; \ i = 1,\dots,n, \ \text{if} \ disturb \to 0. \tag{3}$$

Навпаки, для "зайвих" параметрів внаслідок (1) відносні відхилення (2) прямують до одиниці для ненульових збурень в межах околу неперервності:

$$\delta_i \to 1; \ i = n+1,\dots,m, \ \text{if} \ disturb \neq 0. \tag{4}$$

Критерії (3) і (4) отримані для точної моделі. Поширимо їх на довільні математичні моделі.

В загальному випадку "зайві" параметри виявляють себе значно більшими відносними відхиленнями (2) порівняно з "незайвими" параметрами. Послідовне видалення відповідних "зайвих" елементів математичної моделі регуляризує задачу ідентифікації, тобто покращує її точність та стійкість. Численні приклади підтверджують цей висновок [2].

Замість видалення зайвих елементів моделі (редукції) можна нарощувати модель, але кожний новий елемент перевіряти за критеріями (3) і (4) (індукція).

Можна запропонувати механічну ілюстрацію принципу. Механічна конструкція у вигляді ферми моста знаходиться у навантаженому стані. Збурення цієї ферми спричиняють коливання балок. Навантажені (потрібні) балки коливатимуться з меншими амплітудами, ніж ненавантажені (непотрібні).

Розглянемо приклади застосування принципу редукції.

2. Тестова реконструкція атрактора Лоренца

Класичні рівняння атрактора Лоренца (5) є зручні для тестової перевірки принципу редукції, тому що допускають аналітичне перетворення в еквівалентну форму (6), зручну для нашої ідентифікації [2].

$$\begin{aligned} x_1' &= 10x_2 - 10x_1; \\ x_2' &= 40x_1 - x_2 - x_1x_3; \\ x_3' &= -8/3 \cdot x_3 + x_1x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1. \\ y_1' &= y_2; \\ y_2' &= y_3; \\ y_3' &= 1040y_1 - \frac{88}{3}y_2 - \frac{41}{3}y_3 + 11\frac{y_2^2}{y_1} + \frac{y_2y_3}{y_1} - y_1^2y_2 - 10y_1^3; \end{aligned} \tag{6}$$

Отже, задачу реконструкції точної моделі (6) поставимо так: маючи дискретний сигнал $y_1=x_1$, треба обчислити три похідні цього сигналу $y_1'=y_2$, $y_2'=y_3$, y_3', і розв'язати ідентифікаційну задачу (7).

$$\min_{\bar{a},\bar{b}} \sum_{m=1}^{M} \left(y_{3m}' - \sum_{i,j,k=0}^{4} a_{ijk} y_{1m}^i y_{2m}^j y_{3m}^k - \sum_{i,j,k=0}^{4} b_{ijk} y_{1m}^i y_{2m}^j y_{3m}^k y_{1m}^{-1} \right)^2. \tag{7}$$

З усіх 50 поліноміальних коефіцієнтів задачі (7) для точної моделі (6) потрібні лише 7 коефіцієнтів. Решта коефіцієнтів є зайвими.

Оскільки значення коефіцієнтів точної моделі відомі, зручно перевірити застосування принципу редукції.

Дискретний сигнал $y_1=x_1$ обчислено чисельним інтегрування рівнянь (5) за методом Рунге-Кутта з кроком 0.02 сек. від 0 сек. до 34 сек. На отриманій множині точок збудований інтерполяційний сплайн п'ятого степеня та аналітично обраховані його три похідні. Числові значення сплайна та його похідних утворили масиви даних y_{1m}, y_{2m}, y_{3m}, y'_{3m}, (m=1,…,1701), для задачі ідентифікації (7).

Далі була застосована поелементна редукція масивів коефіцієнтів a_{ijk}, b_{ijk}, згідно принципу редукції. До значень y'_{3m} додавались збурення відносною величиною 10^{-5}, обчислювались відносні відхилення δ_i згідно (2) та видалявся елемент з найбільшим δ_i.

Критерій завершення редукції – утворення компактної множини залишкових відносних відхилень. Ознака цього така: кількість елементів з відносними відхиленнями, що більші та менші середнього значення залишкової області, повинна співпасти.

В процесі редукції обчислювались величина області відносних відхилень max(δ_i)-min(δ_i), а також середня відносна похибка обчислення коефіцієнтів моделі (6). Після 43 кроків редукції залишились 7 коефіцієнтів точної моделі з середньою відносною похибкою відтворення 0.0016.

Залежність розмірів області відносних відхилень від кроку редукції показано на рис. 1. Той же графік у збільшеному масштабі – на рис. 2. Добре видно процес формування компактної області.

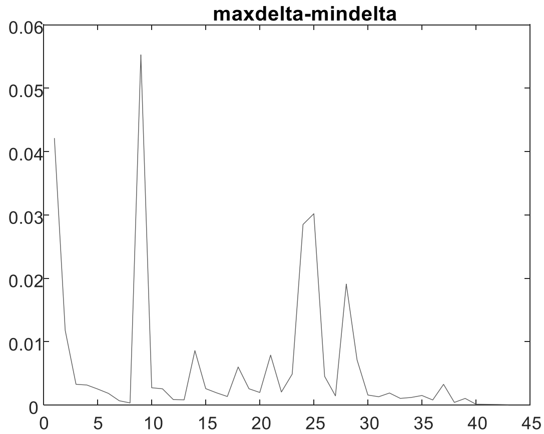


Рис. 1. Зміна розміру області відносних

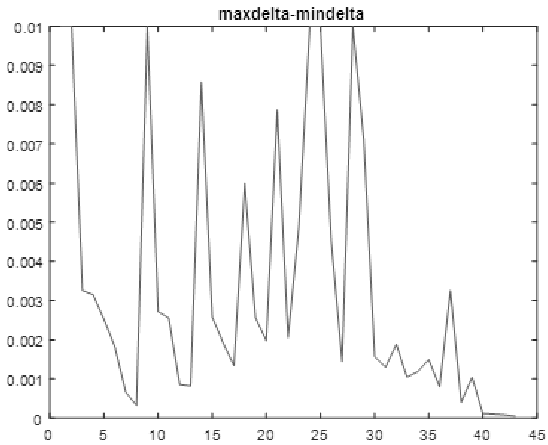


Рис. 2. Графік на рис. 1 у збільшеному масштабі

На моделі Лоренца була перевірена процедура нарощування (індукції) моделі.

Для цього обчислено відносні відхилення (2) для всіх 50 коефіцієнтів. Далі, починаючи з трьох коефіцієнтів з найменшими відносними відхиленнями, послідовно вводились до моделі коефіцієнти з найменшими відносними відхиленнями серед решти коефіцієнтів.

Критерієм припинення індукції є утворення компактної області відносних відхилень через 4 кроки.

Легко помітити переваги процесу індукції порівняно з редукцією. По-перше, обрахунок відносних відхилень не треба повторювати на кожному кроці. Достатньо обчислити їх на початку індукції. По-друге, кількість кроків може бути меншою.

Отже, на тестовому прикладі реконструкції атрактора Лоренца перевірено справедливість основних положень принципу редукції.

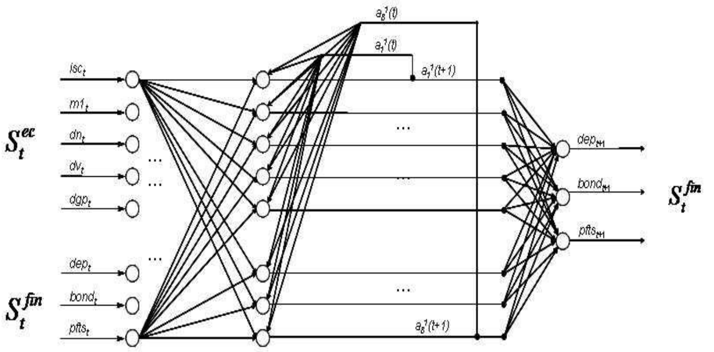
3. Редукція нейронної мережі

Принцип редукції вже багато років застосовується для регуляризації математичних моделей у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь [2]. Розглянемо редукцію нейронної мережі, яка апроксимує економічну систему дохідностей акцій, облігацій та відсоткової ставки за депозитами на основі часових рядів макроекономічних показників та показників фондового ринку [3].

На вхід мережі подаються 8 економічних показників: індекс споживчих цін; грошова маса; доходи населення; державні видатки; внутрішній валовий продукт; середньозважена ставка за депозитами; індекс облігацій kinbonds; індекс фондової торгівельної системи. Вихідними даними є дохідності середньозваженої ставки депозитів, індексу облігацій, індексу першої фондової торгівельної системи.

За цими даними методом back propagation навчається тришарова рекурсивна нейронна мережа з 12 нейронами у прихованому шарі. Функція активації – сигмоїд з α=0.5. Змінними параметрами є 276 передач між нейронами. Критерій апроксимації – середньоквадратичне значення похибки відтворення вихідних даних.

Структура мережі показана на рис.3.



$$\mathbf{a}^1(t+1) = f(\mathbf{IW}\cdot(\mathbf{S}_t^{ec}, \mathbf{S}_t^{fin}) + \mathbf{DW}\cdot\mathbf{a}^1(t) + \mathbf{b}^1)$$

$$\mathbf{S}_{t+1}^{fin} = g(\mathbf{LW}\cdot\mathbf{a}^1(t+1) + \mathbf{b}^2), \qquad t = \overline{0, T-1}, \quad \mathbf{a}^1(0) = 0.$$

Рис. 3. Структура нейронної мережі та її рівняння: IW – матриця передач з входів до проміжного шару нейронів; DW – матриця зворотніх зв'язків; LW – матриця передач з проміжного шару до виходів; $a^1(t)$ – вихідний вектор проміжного шару.

Ітераційна редукція мережі полягає у почерговому видаленні зв'язків з найбільшими відносними похибками δ_i згідно з наведеним вище принципом. Найменше значення похибки 0.09 на ітерації 99 (видалено 35% зв'язків). Редукція мережі зменшила похибку у 16 раз.

На рис. 4 і рис. 5 показано зміни діапазону значень відносних похибок δ_i від номеру ітерації. Відносні похибки в редукованій мережі зібрані в компактну групу. Ця ознака є критерієм припинення редукції.

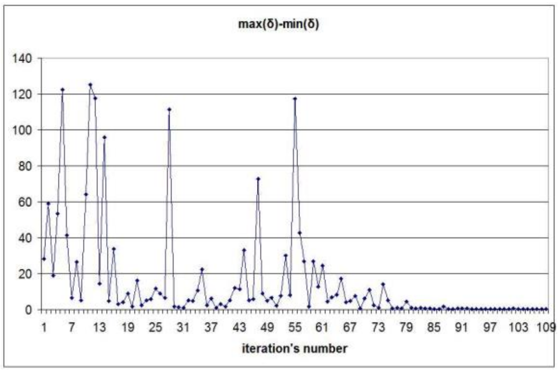


Рис.4. Зменшення діапазону відносносних похибок з редукцією нейронної мережі

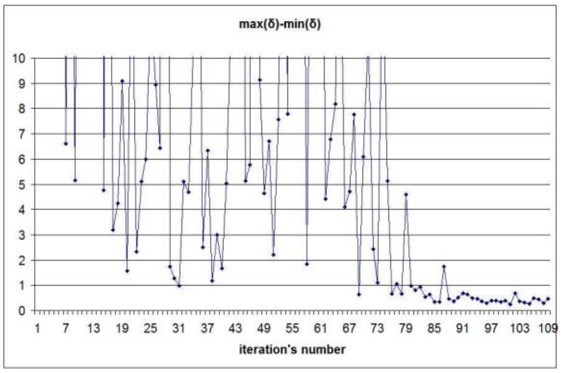


Рис.5. Графік рис.4 у збільшеному масштабі

Висновки. Викладений принцип редукції математичних моделей є загальним і простим.

Застосування для нейронної мережі є простішим інших методів редукції нейронних мереж [3,4,5] і не залежить від методу навчання. Наведений приклад демонструє ефективні регуляризуючі властивості принципу редукції для математичних моделей у вигляді нейронних мереж.

Математичні моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь завдяки редукції можуть відтворювати складні експериментальні залежності і слугувати інструментом вивчення і прогнозування поведінки реальних систем.

Література

[1] *A.N.Tikhonov and V.Y.Arsenin*, Solutions of Ill-Posed Problems, New York, USA: Wiley, 1977.

[2] *Я.М.Матвійчук*. Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія та практика. / Видавн. центр ЛНУ ім.І.Франка, 2000. –215с. http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/22710

[3] *Yaroslav Matviychuk, Olga Karchevska*, Increasing the Correctness of Mathematical Models by Novel Reduction Principle, Proceeding of the 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering, Lviv, Ukraine, September 2-5, 2015

[4] http://ieeexplore.ieee.org/document/7333351/

[5] *Матвійчук Я., Паучок В*. Прогнозування курсу валют методом макромоделювання. // Банківська справа, № 5-6, 2004. С.73-78.

[6] *Матвійчук Я.М., Паучок В.К.* Макромоделі гео-геліогенних величин, ідентифіковані за експериментальними даними // Моделирование-2008. Сб. трудов конф. Киев, 14-16 мая 2008. – Т.1. – С. 114-118.

Mathematical Model Reduction Principle and it's applications

Yaroslav Matviychuk

Abstract: The detection and elimination principle of redundant elements in the mathematical model is proposed in this paper. The efficiency of the proposed approach has been analyzed based on the neural network model of economic system and differential equations models of different nature.

Отримано 30.03.23