УДК 517.94:519.62

Вкладені методи з двосторонньою оцінкою локальної похибки для розв'язування нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь

Ярослав Пелех[1], Андрій Кунинець[2], Богдан Пахолок[3]

[1] к. ф.-м. н., ст. н. с., доцент, Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери,12, 79013, Львів, e-mail :yaroslav.m.pelekh@lpnu.ua
[2] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери,12, 79013, м. Львів, e-mail: andrii.v.kunynets@lpnu.ua
[3] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери,12, 79013, Львів, e-mail: bohdan.b.pakholok@lpnu.ua

Побудовано вкладені числові методи розв'язання задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра. При відповідних значеннях параметрів можна одержувати наближення до точного розв'язку першого та другого порядку точності. Запропоновано множину параметрів, при яких отримуємо розрахункові формули, які на кожному кроці інтегрування дають верхнє і нижнє наближення до точного розв'язку. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень, а модуль піврізниці дає похибку методу. Виведено розрахункові формули, які дозволяють знаходити не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку, а також обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки методу без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

Ключові слова: числові методи, задача Коші, інтегро-диференціальне рівняння, двосторонні наближення.

Вступ. Багато прикладних задач у загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. В обчислювальній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення. При розрахунку таких задач виникає потреба знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, але й отримувати оцінку похибки результату. Одним з ефективних способів побудови таких наближень є ланцюгові (неперервні) дроби.

1. Постановка задачі

Розглянемо на відрізку $I_L:[x_0, x_0+L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g\left[x, s, u(s)\right] ds\right] \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, \qquad x \in [x_0, x_0 + L]. \tag{2}$$

Припустимо, що розв’язок (1)-(2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю.

Пропонуються обчислювальні схеми, які дають можливість на кожному кроці інтегрування отримувати наближення до точного розв’язку задачі (1)-(2) першого та другого порядку точності. Виписано значення параметрів, при яких отримуємо двосторонні наближення до точного розв’язку. Знайдено явний вираз для головного члена локальної похибки, величину якого можна порахувати без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

2. Побудова методів Рунге-Кутта

На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів [1] та теорію побудови методів Рунге-Кутта, наближений розв’язок задачі (1)-(2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу:

$$u_1^{[k,\,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}}. \tag{3}$$

При $k + l = 2$ $(k = 1,2; l = 0,1)$

$$c_0 = u_0,\ d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0},\ d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0},\ d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2},$$

$$\delta_i = h\sum_{j=1}^{2} a_{ij}k_j, \qquad i = 1,2, \qquad k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0], \tag{4}$$

$$k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21} h k_1, \gamma_{21} K_1],\ K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma h k_1],$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ – невідомі параметри.

Розвинення розв’язку задачі (1)-(2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + h(F)_0 + \frac{1}{2}h^2\{(F_x)_0 + (F_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g)_0\} +$$

$$+ \frac{h^3}{6}\left\{(F_{xx})_0 + 2(F_{xu})_0(F)_0 + (F_{uu})_0\left(F^2\right)_0 + (F_x)_0(F_u)_0 + \right.$$

$$+\left(F_{zz}\right)_0\left(g^2\right)_0+2\left(F_{xz}\right)_0\left(g\right)_0+2\left(F_{uz}\right)_0\left(F\right)_0\left(g\right)_0+2\left(F_z\right)_0\left(g_x\right)_0+$$

$$\left.+\left(F_z\right)_0\left(g_u\right)_0\left(F\right)_0+\left(F_z\right)_0\left(g_s\right)_0+\left(F_u^2\right)_0\left(F\right)_0+\left(F_u\right)_0\left(F_z\right)_0\left(g\right)_0\right\}+O\left(h^4\right). \quad (5)$$

Розглянемо формули (3)-(4) при $k=1$, $l=1$:

$$u_1^{[1,1]}=\frac{u_0}{1-\dfrac{h\dfrac{\left(a_{11}k_1+a_{12}k_2\right)}{u_0}}{1+\dfrac{h\left(a_{11}k_1+a_{12}k_2\right)^2-u_0\left(a_{21}k_1+a_{22}k_2\right)}{u_0\left(a_{11}k_1+a_{12}k_2\right)}}}, \quad (6)$$

$$k_1=F\left[x_0+\alpha_1h,u_0,0\right], \qquad k_2=F\left[x_0+\alpha_2h,u_0+\beta_{21}hk_1,\gamma_{21}K_1\right],$$

$$K_1=hg\left[x_0+\alpha h,x_0+\beta h,u_0+\gamma hk_1\right]. \quad (7)$$

Невідомі параметри a_{ij},α_j $\left(i=1,2;\,j=1,2\right)$, β_{21}, γ_{21}, α, β, γ виберемо з умови, щоб $R_{[1,1]}=\left|u\left(x_0+h\right)-u_1^{[1,1]}\right|=O\left(h^3\right)$. Для цього спочатку перетворимо формулу (6) до вигляду:

$$u_1^{[1,1]}=u_0+\frac{h\left(a_{11}k_1+a_{12}k_2\right)^2}{\left(a_{11}-a_{21}\right)k_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)k_2}=u_0+\frac{P_{[1,1]}}{Q_{[1,1]}}. \quad (8)$$

Представлення формули (6) у вигляді (8) дає можливість проводити розрахунки при $u_0\equiv 0$, а також, як показують подальші викладки, якщо $a_{11}k_1+a_{12}k_2=0$, то $\left|u\left(x_0+h\right)-u_1^{[1,1]}\right|=O\left(h^3\right)$. Розвинувши $P_{[1,1]}$ і $Q_{[1,1]}$ в ряди Тейлора в околі точки x_0, а також знайшовши різницю $u\left(x_o+h\right)-u_1^{[1,1]}$, випишимо вирази для коефіцієнтів чисельника при степенях h і h^2:

$$h\left(F\right)_0^2: \quad a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}-\left(a_{11}+a_{12}\right)^2. \quad (9)$$

$$h^2\left(F\right)_0\left(F_x\right)_0:\left(a_{11}-a_{21}\right)\alpha_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)-2\left(a_{11}+a_{12}\right)\left(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2\right).$$

$$h^2\left(F\right)_0\left(F_u\right)_0:\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)+\left(a_{12}-a_{22}\right)\beta_{21}-2\left(a_{11}+a_{12}\right)a_{12}\beta_{21}.$$

$$h^2\left(F\right)_0\left(F_z\right)_0\left(g\right)_0:\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)+\left(a_{12}-a_{22}\right)\gamma_{21}-2\left(a_{11}+a_{12}\right)a_{12}\gamma_{21}.$$

Якщо прирівняти коефіцієнти при h і h^2 до нуля і розв'язати відповідну систему алгебраїчних рівнянь, то отримаємо метод другого порядку точності.

Випишимо дві множини розв'язків:

I. $\alpha_1=\alpha_2$:

$$a_{11}=1-a_{12},\ \ a_{21}=-a_{22},\ \ \alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2},\ \ \gamma_{21}=\beta_{21}=\frac{1}{2(a_{12}+a_{22})} \tag{10}$$

де a_{12}, a_{22} - параметри.

II. $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$a_{11}=1-a_{12},\ \ a_{21}=a_{12}+\frac{2\alpha_1-1}{2(\alpha_2-\alpha_1)},\ \ a_{22}=\frac{1-2\alpha_1}{2(\alpha_2-\alpha_1)}-a_{12} \tag{11}$$

$$\beta_{21}=\gamma_{21}=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1},$$

де α_1, α_2, a_{12} – довільні числа $(\alpha_1 \neq 1)$.

3. Побудова двосторонніх розрахункових формул.

У зв'язку з відсутністю ефективного способу оцінки похибки наближеного розв'язку виникла необхідність розробки двосторонніх методів [2].

Побудуємо розрахункові формули, які дають двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2). Прирівняємо у співвідношеннях (8) перше і останнє рівняння до нуля, а друге, третє і четверте відповідно до $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1-(a_{11}+a_{21}+a_{12}+a_{22})=0 \\ \frac{1}{2}-(a_{11}+a_{21})\alpha_1+(a_{12}+a_{22})\alpha_2=\omega_1 \\ \frac{1}{2}-(a_{12}+a_{22})\beta_{21}=\omega_2 \\ \frac{1}{2}-(a_{12}+a_{22})\gamma_{21}=\omega_3 \\ (a_{11}+a_{12})^2-(a_{11}+a_{21}+a_{12}+a_{22})=0. \end{cases} \tag{12}$$

Тоді похибка в точці $x=x_1$ має вигляд:

$$R_1^{[1,1]}=\{\ \omega_1 h^2(F)_0(F_x)_0+\omega_2 h^2(F)_0(F_u)_0+\omega_3 h^2(F)_0(F_z)_0(g)_0\}/Q_{[1,1]}.$$

При різних значеннях $\omega_i\,(i=1,2,3)$ побудовано двосторонні наближення на різних класах функцій.

Якщо, наприклад, покласти $\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega$ і

$$a_{11}=1-a_{12},\ a_{21}=a_{12}-\frac{1-2\omega}{2\beta_{21}},\ a_{22}=\frac{1-2\omega}{2\beta_{21}}-a_{12},$$

$\alpha_1=0$, $\alpha_2=\beta_{21}, \gamma_{21}=\beta_{21}$, $(\omega \neq 1/2)$, де a_{12}, $\beta_{21}\,(\beta_{21}\neq 0)$ - параметри, тоді

$$R_1^{[1,1]}=\omega h^2(F)_0 u''(x_0)/Q_{[1,1]}+O(h^3)=\omega\frac{hk_1(k_2-k_1)}{(2\alpha_2+1)k_1-k_2}+O(h^3).$$

Отже, отримано розрахункові формули, які дозволяють знаходити не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2) в точці x_1, а також обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки методу без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

Для знаходження наближень у наступних точках $x_n\left(n \geq 2\right)$ користуємося способом рухомого початку.

Висновки. Виведено розрахункові формули розв'язання задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. При відповідних значеннях параметрів можна отримувати наближення до точного розв'язку задачі Коші (1)-(2) першого та другого порядку точності.

Знайдено множину параметрів, при яких можна отримати двосторонні розрахункові формули. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень. Модуль піврізниці двосторонніх наближень дає похибку методу.

Виведено розрахункові формули, які дозволяють знаходити не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку, а також обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки методу без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

Запропоновану методику знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь застосовано для побудови числових методів більш високого порядку точності.

Література

[1] *Джоунс У. Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. - М.: Мир, 1985. – 416 с.

[2] *Добронец Б.С. Шайдуров В.В.* Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука. – 1990. – 206 с.

Embedded methods with two-sided local error estimation for solving nonlinear integro-differential equations

Yaroslav Pelekh, Andrii Kunynets, Bohdan Pakholok

Two-sided numerical methods for solving the Cauchy problem for Volterra's nonlinear integro-differential equations are constructed. With appropriate parameter values, it is possible to obtain an approximation to the exact solution of the first and second order of accuracy. A set of parameters is proposed for which we obtain calculation formulas that at each integration step give the upper and lower approximations to the exact solution. For the approximate solution, we take the half-sum of two-sided approximations, and the modulus of the half-difference gives the error of the method. Calculation formulas are proposed that make it possible to find not only two-sided approximations to the exact solution, but also to calculate the explicit expression of the main term of the local error of the method without additional calculations of the right side of the integro-differential equation.

Отримано 15.03.23