УДК 681.3, 517.11

Категорії як формальні моделі обчислень

Олександр Провотар[1], Олександр Ількун[2]

[1]д.ф.-м.н., професор, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Київ, пр. Глушкова 2,
e-mail: a.i.provotar@gmail.com
[2]Аспірант, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Київ, пр. Глушкова 2,
e-mail: alexander.ilkun@gmail.com

Розглядаються різні формальні моделі обчислень. Зокрема, рекурсивні функції, нечіткі моделі та категорні моделі. Показано, як обчислюються функції на основі таких моделей. В кожній з цих моделей вводиться поняття числа та основні арифметичні операції. Робиться висновок про те, що розглянуті формальні моделі обчислень можна моделювати в рамках тих чи інших категорій і будувати абстрактну теорію обчислюваності і відповідні мови програмування на категорній основі. Тобто мова йде про створення універсальної мови програмування на якій можна було б описувати задачі з різних предметних областей шляхом їх інтерпретації у відповідних категоріях з подальшим використанням універсального категорного апарату для їх розв'язання. Така мова повинна бути орієнтована на наукові задачі.

Ключові слова: категорія, нечітка множина, рекурсивна функція

Вступ. Розглянемо простий приклад. Нехай маємо скінченну множину M натуральних чисел. Необхідно знайти мінімальний елемент цієї множини. Припустимо, що в нас є середовище, яке дозволяє описувати довільні структури даних, зокрема множину M та поняття мінімального елемента. Крім цього, в цьому середовищі є засоби описання і виконання алгоритмів над структурами даних. Тоді в такому середовищі може бути знайдений мінімальний елемент множини M як елемент відповідної структури даних.

Наприклад, множину M можна описати відношенням предпорядку $\subseteq$. За відношенням предпорядку побудувати категорію предпорядку $(M, \subseteq)$. Мінімальний елемент множини M в цьому випадку можна знайти, як початковий об'єкт категорії.

1. Рекурсивні функції

Показати алгоритмічну обчислюваність функцій шляхом її належності до класу частково рекурсивних функцій досить складно, окрім найпростіших функцій. Крім того, в кожному конкретному випадку це потребує побудови математичної моделі функції у вигляді терма із обчислюваних операцій над базовими функціями. Базовими функціями, як відомо [1], називаються найпростіші функції

$o(x) = 0$, $s(x) = x + 1$ та функції-селектори $(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, де $n \geq m \geq 1$.

Основними обчислюваними операціями будуть оператори *суперпозиції* $\boldsymbol{S}^{n+1}$, *примітивної рекурсії* $\boldsymbol{R}$ та *мінімізації* $\boldsymbol{M}$.

Таким чином, функція алгоритмічно обчислювана, якщо існує операторний терм, який її задає.

Виникає цілком закономірне питання про можливість використання конкретних алгоритмів для доведення фундаментальних результатів теорії рекурсивних функцій. Для цього потрібно точно описати основні конструкції алгоритму і переформулювати (конкретизувати) тезу Чорча для більш вузьких класів алгоритмічно обчислюваних функцій.

Теза 1. Клас функцій, що обчислюються всюди визначеними алгоритмами без використання оператора while … doспівпадає з класом примітивно рекурсивних функцій.

Теза 2. Клас функцій, що обчислюються всюди визначеними алгоритмами співпадає з класом рекурсивних функцій.

Теза 3. Клас функцій, що обчислюються довільними алгоритмами співпадає з класом частково рекурсивних функцій.

Таким чином, з одного боку ми маємо алгебраїчний терм, як формальну модель обчислень (алгоритм), з іншого – синтаксичну конструкцію, яка теж є формальною моделлю обчислень (алгоритмом), але дуже наближеною до мов програмування. Тобто, якщо обмежитись, наприклад, множиною натуральних чисел і ввести найпростіші логічні та арифметичні операції, обчислювальні в рамках класичної обчислювальної парадигми, то можна говорити про побудову теорії обчислювальності в рамках того чи іншого формалізму.

2. Нечіткі моделі

В бінарній логіці, як відомо, істинність твердження (висловлювання) виводиться на підставі істинності складових тверджень (висловлювань). Подібне виведення задається у вигляді схеми: над горизонтальною рискою записуються всі складові твердження, а під – саме твердження.

В нечіткій логіці [2] використовується узагальнене (нечітке) правило виведення *modus ponens* визначається наступною схемою виведення:

Умова Імплікація	x це A' якщо x це A, то y це B
Висновок	y це B'

де A, $A' \subseteq \boldsymbol{X}$ і B, $B' \subseteq \boldsymbol{X}$ – нечіткі множини, x, y – так звані *лінгвістичні змінні*, значеннями яких є нечіткі висловлювання на природній мові. Висновок нечіткого правила відноситься до деякої нечіткої множини B', яка визначається композицією нечіткої множини A' і нечіткої імплікації $A \to B$, тобто

$$B' = A' \circ (A \to B).$$

Нечітка імплікація $A \to B$ рівнозначна деякому нечіткому відношенню $R \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ з функцією належності $\mu_R(x,y)$. Тому функцію належності нечіткої множини B' можна подати у вигляді

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X}\{\mu_{A'}(x) \overset{T}{*} \mu_{A \to B}(x, y)\}$$

причому $\mu_{A \to B}(x,y) = \mu_R(x,y)$.

3. Арифметика нечітких чисел

В теорії нечітких систем виділяються нечіткі множини, які визначаються на осі дійсних чисел і є нормальними, випуклими, а також мають неперервні функції належності. Такі нечіткі множини називається *нечіткими числами.*

Основні арифметичні операції – сума, різниця, множення і ділення двох нечітких чисел A_1, $A_2 \subseteq \boldsymbol{R}$ задаються за допомогою принципу розширення. Наприклад, сума двох нечітких чисел A_1 і A_2(позначається $A_1 \oplus A_2 = B$) обчислюється як

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1 x_2 \\ y = x_1 + x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}.$$

Натуральні числа в цьому випадку можуть ототожнюватись з нечіткими трикутними числами.

Алгоритм обчислення довільних функцій над множиою натуральних чисел може бути описаний наступною синтаксичною конструкцією:

```
function s(x, y)
   begin
      if x is (a1, x, b1) and y is (a2, y , b2) then
            s′ is (a1+a2, x+y, b1+b2)
      s = x+y
   end,
```

де (a_1, x, b_1) та (a_2, y, b_2) – нечіткі трикутні числа, які моделюють натуральні числа x та y відповідно.

4. Категорії

Нехай $\mathfrak{I}$ – категорія [3] з кінцевим об’єктом 1 і класифікатором підоб’єктів Ω. Декартово замкнута категорія з класифікатором підоб’єктів називається топосом.

4.1. Логічні функції в топосі. Виходячи з того, що область значень будь-якої класичної логічної функції – це двохелементна множина $\mathbf{2} = \{0,1\}$, таку функцію можна розглядати, як характеристичну функцію деякої підмножини її області визначення. Або, іншими словами, як характеристичну функцію образу деякого

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2023, вип. 37, 98-102

мономорфізму. Саме це дозволяє дати визначення логічних функцій за допомогою діаграм в довільному топосі.

Наприклад, функція кон'юнкції $\wedge:\Omega\times\Omega\to\Omega$ визначається декартовим квадратом

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "<true{,}true>"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "true"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

тобто є характером добутку морфізмів <*true*, *true*>: $1\to\Omega$.

Інші логічні функції $\vee$, $\neg$ та $\Rightarrow$ визначаються аналогічно відповідними декартовими квадратами.

Справедлива

Теорема. Морфізми $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$ ведуть себе згідно наступних таблиць:

$\neg$ *true false*	$\wedge$ *true false*	$\Rightarrow$ *true false*	$\vee$ *true false*
false true	*true true false*	*true true false*	*true true true*
	false false false	*false true true*	*false true false*

4.2. Натурально-числовий об'єкт. Натурально-числовий об'єкт (NNO) – це об'єкт N разом з парою морфізмів $1 \xrightarrow{O} N \xrightarrow{s} N$ таких, що для будь-якого обєкта a і морфізмів $1 \xrightarrow{x} a \xrightarrow{f} a$ існує единий морфізм h: $N\to a$ для якого діаграма

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[ur, "O"] \arrow[r, "x"'] & a \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

комутує.

Таким чином, натуральне число – це морфізм n:$1\to N$ в топосах з натурально-числовим об'єктом.

В топосі з NNO можна визначати арифметичні операції. Зокрема, операція додавання визначається як єдиний морфізм, для якого діаграма

$$\begin{tikzcd}
 & N\times N \arrow[r, "1_N\times s"] \arrow[d, "\oplus"] & N\times N \arrow[d, "\oplus"] \\
N \arrow[ur, "<1_N{,}O_N>"] \arrow[r, "1_N"'] & N \arrow[r, "s"'] & N
\end{tikzcd}$$

комутує.

Наприклад, обчислення суми m + 0 натуральних чисел зводиться до обчислення композицій

$$m \circ \langle 1_N, O_N \rangle \circ \oplus = m \circ 1_N = m.$$

Переваги останнього підходу до побудови формальних моделей алгоритмів полягають в тому, що під натурально-числовим об'єктом можна розуміти все що завгодно, починаючи від класичних моделей в категорії ***Set*** і кінчаючи категорією доведень, об'єкти якої – формули, а морфізми – формальні виведення одних формул із інших в деякій системі дедуктивного виведення.

Висновки. Оскільки існують категорії нечітких множин, нечітких функцій, частково рекурсивних функцій, то розглянуті моделі обчислень можна розглядати в рамках тих чи інших категорій і будувати абстрактну теорію обчислюваності і відповідні мови програмування на категорній основі. Розробка мови Haskell є першим кроком в цьому напрямку.

Література

[1] *E. Mendelson.* Introduction to Mathematical Logic. D. Van Nostrand Company, INC. – 1975. – 320 p.
[2] *L. Rutkowski*. Metody i TechnikiSztucznejInteligencji (inPolish). Wydawnictwo Naukove PWN, Warszava, 2009. – 452 p.
[3] *M. Barr, C. Wells.* Category Theory for Computing Science. Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 22, 2012.

Categories as formal models of calculations

Oleksandr Provotar, Oleksandr Ilkun

Various formal models of calculations are considered. In particular, recursive functions, fuzzy models and categorical models. It is shown how functions are calculated based on such models. In each of these models, the concept of number and basic arithmetic operations are introduced. It is concluded that the considered formal models of calculations can be represented within certain categories and an abstract theory of computability and relevant programming languages can be built on a categorical basis. That is, we are talking about the creation of a universal programming language in which it would be possible to describe problems from various subject areas by interpreting them in the appropriate categories with the futher use of a universal categorical apparatus for their solution. Such a language should be oriented to scientific problems.

Отримано 31.03.23