УДК 517.5

Рівність оцінок МНК та Ейткена параметра лінійної моделі регресії, коли коваріаційна матриця відхилень є симетричною матрицею Тепліца загального вигляду

Марта Савкіна

к. ф.-м. н., Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, 01024, Київ-4, e-mail: marta@imath.kiev.ua

В роботі вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x)=ax+b$, *де* a *та* b – *невідомі параметри, а коваріаційна матриця відхилень є симетричною матрицею Тепліца загального вигляду. Наближені значення (спостереження) функції* $f(x)$ *реєструються у рівновіддалених точках відрізку* $[0;1]$. *В роботі наведено теорему, яка дає необхідну і достатню умову на елементи коваріаційної матриці відхилень зазначеного вигляду для збігу оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра* a *такої моделі.*

Ключові слова: регресійна модель; метод найменших квадратів; оцінка Ейткена

Вступ. В класичній регресії передбачається, що коваріаційна матриця відхилень в моделі лінійної регресії має вигляд $\sigma^2 I$, де σ^2 – дисперсія відхилень, I – одинична матриця. Узагальненням цього припущення є коваріаційна матриця вигляду $\sigma^2\Omega$, де Ω – додатноозначена матриця. Якщо відхилення мають різну дисперсію та не корелюють одне з іншим, то матриця Ω буде діагональною, але не одиничною; якщо відхилення корельовані, то матриця Ω не буде діагональною. В такому загальному випадку ефективною оцінкою невідомих параметрів моделі є оцінка Ейткена [1], яка в своїй формулі використовує матрицю Ω.

В статтях [2, 3, 4] вивчається лінійна регресійна модель з двома невідомими параметрами; в статті [2] вона вивчається у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень. Знайдено умови на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена збігається з оцінкою МНК окремо для кожного параметру моделі. При цих умовах оцінки Ейткена та МНК параметра іншого параметру не будуть збігатися.

В статтях [3, 4] така модель вивчається, коли коваріаційна матриця відхилень є симетричною матрицею Тепліца, певна кількість побічних діагоналей якої - нульові. В роботах у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено необхідну та достатню умову на елементи коваріаційної матриці, яка забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена одного з параметрів даної моделі.

1.Оцінки МНК та Ейткена параметрів лінійної регресійної моделі

Розглянемо таку модель лінійної регресії

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i\ , \quad i = 0,1,..., n, \tag{1}$$

де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n -$ випадкові величини з $E\varepsilon_i = 0$ та коваріаційною матрицею $\sigma^2\Omega_d$, $n -$парне , Ω_d $-$додатно визначена матриця, що має вигляд

$$\Omega_d = \begin{pmatrix} \lambda & c_{k-1} & ... & c_2 & c_1 & d & d_1 & d_2 & ... & d_{k-1} & d_k \\ c_{k-1} & \lambda & ... & c_3 & c_2 & c_1 & d & d_1 & ... & d_{k-2} & d_{k-1} \\ . & . & ... & . & . & . & . & . & ... & . & . \\ c_1 & c_2 & ... & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & ... & d & d_1 \\ d & c_1 & ... & c_{k-2} & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & c_{k-2} & ... & c_1 & d \\ d_1 & d & ... & c_{k-3} & c_{k-2} & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & ... & c_2 & c_1 \\ . & . & ... & . & . & . & . & . & ... & . & . \\ d_{k-1} & d_{k-2} & ... & d_1 & d & c_1 & c_2 & c_3 & ... & \lambda & c_{k-1} \\ d_k & d_{k-1} & ... & d_2 & d_1 & d & c_1 & c_2 & ... & c_{k-1} & \lambda \end{pmatrix},$$

$\lambda > 0, \quad k = \dfrac{n}{2}.$

В роботі [4] доведено, що для будь-яких $c_1,..., c_{k-1}, d, d_1,..., d_k$ існує $\overline{\lambda} > 0,$ яке залежить від $c_1, \dots, c_{k-1}, d, d_1, \dots, d_k,$ таке, що для будь-якого $\lambda > \overline{\lambda}$ матриця Ω_d буде додатно визначеною.

В моделі (1) a та b $-$ невідомі параметри, які підлягають оцінюванню.

Згідно з [1] оцінку Ейткена параметрів a та b можна знайти за формулою

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix} = \left(X'\Omega_d^{-1} X \right)^{-1} X'\Omega_d^{-1} \vec{y},$$

де

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{n} & \dfrac{2}{n} & ... & \dfrac{n-1}{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{y}' = \left(y_0, y_0, ..., y_n \right).$$

Якщо в формулі (2) покласти $\Omega_d = I,$ де $I -$одинична матриця, будемо мати оцінку МНК, тобто

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{MNK} \\ \hat{b}_{MNK} \end{pmatrix} = \left(X'X\right)^{-1} X\vec{y}.$$

2. Необхідна та достатня умова рівності оцінок МНК та Ейткена моделі (1) з коваріаційною матрицею Ω_d

Теорема. Оцінка МНК та оцінка Ейткена параметра a моделі (1) збігаються тоді і тільки тоді, коли в матриці Ω_d елементи λ та $d, d_1, d_2, ..., d_k$ будь-які, а

$$c_1 = \frac{k}{k+1} d + d_1 - \frac{k}{k+1} d_2 \,,$$

$$c_j = \left(\frac{k}{k+1}\right)^j d + \left(\frac{k}{k+1}\right)^{j-1} d_1 + \frac{2k+1}{(k+1)^2} \sum_{i=2}^{j} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{j-i} d_i - \frac{k}{k+1} d_{j+1} \,,$$

$$j = 2,3,\ldots,k-1.$$

Розглянемо приклади таких матриць.

1. $d = 1, \quad d_i = 0, i = 1,2,..., k;$ в цьому випадку

$$c_j = \left(\frac{k}{k+1}\right)^j, \quad j = 1,2,..., k-1.$$

Якщо, наприклад, $k = 2,$ то при $\lambda \geq \dfrac{3}{2}$

$$\Omega_d = \begin{pmatrix} \lambda & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & \lambda & 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & \lambda & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & \lambda & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & \lambda \end{pmatrix};$$

якщо, $k = 3,$ то при $\lambda \geq 2$

$$\Omega_d = \begin{pmatrix} \lambda & 9/16 & 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9/16 & \lambda & 9/16 & 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 9/16 & \lambda & 9/16 & 3/4 & 1 & 0 \\ 1 & 3/4 & 9/16 & \lambda & 9/16 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 & 9/16 & \lambda & 9/16 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 9/16 & \lambda & 9/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 & 9/16 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$2.\left\{d=1,\quad d_i=\left(\frac{1}{2}\right)^i, i=1,2,...,k\right\}\quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{3}{4}\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2},$$

$$c_j=\frac{3k}{2(k-1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)^j+\frac{k+2}{2(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^j,\quad j=2,3,...,k-1.$$

Якщо, наприклад, $k=2$, то при $\lambda\geq\frac{3}{2}$

$$\Omega_d=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1/2 & 1/4\\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1\\ 1/2 & 1 & 1 & \lambda & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix};$$

якщо $k=3$, то при $\lambda\geq 2$

$$\Omega_d=\begin{pmatrix}\lambda & 61/64 & 17/16 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8\\ 61/64 & \lambda & 61/64 & 17/16 & 1 & 1/2 & 1/4\\ 17/16 & 61/64 & \lambda & 61/64 & 17/16 & 1 & 1/2\\ 1 & 17/16 & 61/64 & \lambda & 61/64 & 17/16 & 1\\ 1/2 & 1 & 17/16 & 61/64 & \lambda & 61/64 & 17/16\\ 1/4 & 1/2 & 1 & 17/16 & 61/64 & \lambda & 61/64\\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 & 17/16 & 61/64 & \lambda\end{pmatrix};$$

якщо $k=4$, то при $\lambda\geq 2$

$$\Omega_d=\begin{pmatrix}\lambda & 0.899 & 1.03 & 1.1 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16\\ 0.899 & \lambda & 0.899 & 1.03 & 1.1 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8\\ 1.03 & 0.899 & \lambda & 0.899 & 1.03 & 1.1 & 1 & 1/2 & 1/4\\ 1.1 & 1.03 & 0.899 & \lambda & 0.899 & 1.03 & 1.1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1.1 & 1.03 & 0.899 & \lambda & 0.899 & 1.03 & 1.1 & 1\\ 1/2 & 1 & 1.1 & 1.03 & 0.899 & \lambda & 0.899 & 1.03 & 1.1\\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1.1 & 1.03 & 0.899 & \lambda & 0.899 & 1.03\\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1.1 & 1.03 & 0.899 & \lambda & 0.899\\ 1/16 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1.1 & 1.03 & 0.899 & \lambda\end{pmatrix}.$$

3. $\{d=1, \quad d_i=1, i=1,2,...,k\} \Rightarrow \{c_i=1, i=1,2,...,k-1\}$

Для будь-якого $k \geq 2$ та $\lambda > 1$

$$\Omega_d = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & ... & 1 \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & 1 & 1 & ... & \lambda \end{pmatrix}.$$

Висновки. Таким чином, в роботі сформульовано теорему, яка дає необхідну і достатню умову збігу оцінок МНК та Ейткена параметра a лінійної моделі регресії. Умова накладається на елементи коваріаційної матриці відхилень, яка є додатноозначеною симетричною матрицею Тепліца загального вигляду. В роботі також показано застосування цієї теореми.

Література

[1] *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. — Москва: Финансы и статистика, 1981. – 304 с.

[2] *Савкіна М.Ю.* Умови збігу оцінок МНК та Ейткена параметрів моделі лінійної регресії // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2018. — № 3(129). -- С.36-44.

[3] *Савкіна М.Ю.* Рівність оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2021. — № 2(136). -- С.64-71.

[4] *Савкіна М.Ю.* Необхідна умова збігу оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2022. — № 2. — С.116-125.

Equality of MNK and Aitken estimations of the parameter of the linear regression model, when the covariance matrix of the deviations is a symmetric Toeplitz matrix of the general form

Marta Savkina

In this paper, we study a regression model whose function has the form $f(x)=ax+b$, *where* a *and* b *– unknown parameters, and the covariance matrix of deviations is a symmetric Toeplitz matrix of the general form. Approximate values (observations) of the function* $f(x)$ *are recorded at equidistant points of the segment* $[0;1]$. *The paper presents a theorem that gives a necessary and sufficient condition for the elements of the covariance matrix of deviations of the specified form for the coincidence of the MNK estimation and the Aitken estimation of the parameter* a *of such model.*

Отримано 15.03.23