УДК 519.65

Ермітові сплайни з експоненціально-степеневими ланками з непарною кількістю параметрів

Ярополк Пізюр[1], Юрій Карась[2]
[1]канд. фіз.-мат. наук, доцент, Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, e-mail: yaropolk.v.piziur@lpnu.ua
[2]магістрант, Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, e-mail: yurii.karas.mpmpm.2022@lpnu.ua

Побудовано ермітовий сплайн з експоненціально-степеневою ланкою виду $W_{2,2}(x)$ *з п'ятьма параметрами: виведено вирази для обчислення його параметрів і встановлено умови його існування. Наведено формулу для обчислення похибки балансного наближення функцій ермітовими сплайнами з цією ланкою і вираз для ядра похибки наближення. Результати демонструють кращу точність наближення ермітовими сплайнами з експоненціально-степеневою ланкою ніж з многочленною ланкою з тією ж кількістю параметрів.*

Ключові слова: апроксимація функцій, ермітові сплайни, балансне наближення, похибка апроксимації, ядро похибки апроксимації.

Вступ. Для апроксимації функціональних залежностей застосовують метод найменших квадратів, мінімаксні (чебишовські) наближення, наближення сплайнами різних видів тощо. Ряд задач крім наближення функції вимагає також наближення похідних функції. Для цього використовують ермітові сплайни [1,2]. Для покращення точності наближення функцій ланками сплайнів можуть бути не тільки многочлени, а й нелінійні за параметрами вирази [3-8], наприклад експоненціально-степеневі вирази виду,

$$W_{k,l}(x) = a_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x^i\right) x^{\sum_{j=1}^{l} b_j x^{j-1}} , \quad \{a_i\}_{i=0}^{k}, \{b_i\}_{j=1}^{l} \in R .$$

Важливою характеристикою сплайнів, як апарату для наближення функцій є похибка апроксимації. Формули для похибок наближення функцій многочленними ермітовими сплайнами отримано в роботах [9, 10]. За аналогією до чебишовських наближень нелінійниими виразами [11] у роботах [4, 12] доведено теореми, які дозволяють зводити наближення ермітовими сплайнами з нелінійними за параметрами виразами в ланках до многочленних ермітових сплайнів. Як наслідок із цих теорем, для ермітових сплайнів з нелінійними ланками, отримано формули для обчислення похибок балансного наближення функцій, тобто такого, при якому максимальні значення похибок на кожному інтервалі є одинакові [4, 11].

1. Постановка задачі

На множині $X = \{x \in X : \alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = \beta\}$ задано значення функції $f(x)$ та її похідних першого порядку $f(x) \in C^1[\alpha, \beta]$. Потрібно побудувати ермітовий сплайн з експоненціально-степеневою ланкою з п'ятьма параметрами виду

$$W_{2,2}(x) = a_0 \exp\left(a_1 x + a_2 x^2\right) x^{b_1 + b_2 x}, \qquad (1)$$

де $a_i, i = \overline{0,2}$ і $b_j, j = 1,2$ невідомі параметри ланки сплайна.

Метою статті є побудова ермітових сплайнів з експоненціально-степеневою ланкою з п'ятьма параметрами виду (2) для наближення функцій і їхніх похідних першого порядку а також дослідження точності наближення функцій цими ермітовими сплайнами.

2. Побудова ланок ермітових сплайнів

За означенням [4] ермітові сплайни з непарною кількістю параметрів описуються системою рівнянь

$$\begin{cases} f_0 - a_0 \exp\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2\right) x_0^{b_1 + b_2 x_0} = 0 \\ f_0' - a_0 \exp\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2\right) x_0^{b_1 + b_2 x_0 - 1}\left(a_1 x_0 + 2 a_2 x_0^2 + b_1 + b_2 x_0 \left(1 + \ln x_0\right)\right) = 0 \\ f_1 - a_0 \exp\left(a_1 x_1 + a_2 x_1^2\right) x_1^{b_1 + b_2 x_1} = 0 \\ f_2 - a_0 \exp\left(a_1 x_2 + a_2 x_2^2\right) x_2^{b_1 + b_2 x_2} = 0 \\ f_2 - a_0 \exp\left(a_1 x_2 + a_2 x_2^2\right) x_2^{b_1 + b_2 x_2 - 1}\left(a_1 x_2 + 2 a_2 x_2^2 + b_1 + b_2 x_2 \left(1 + \ln x_2\right)\right) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

де $\alpha \le x_0 < x_1 < x_2 \le \beta$, $x_1 = (x_0 + x_2)/2$, $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $i = \overline{0,2}$, $j = 0,1$. З цієї системи визначаємо невідомі параметри $a_i, i = \overline{0,2}$ і $b_j, j = 1,2$. В процесі перетворень систему (2) зводимо до системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно двох невідомих a_1 і a_2

$$a_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1}{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}, \quad a_1 = \frac{\alpha_1 - \gamma_1 b_2}{\beta_1}, \qquad (3)$$

де

$$\alpha_1 = x_0\, f_0' / f_0 - \frac{\ln\left(f_1 / f_0\right)}{\ln\left(x_1 / x_0\right)} + \frac{s}{p} \frac{\ln\left(x_1^{x_1} / x_0^{x_0}\right)}{\ln\left(x_1 / x_0\right)} - \frac{s}{p} x_0 \left(1 + \ln\left(x_0\right)\right),$$

$$\alpha_2 = x_2\, f_2'/f_2 - \frac{\ln(f_2/f_1)}{\ln(x_2/x_1)} + \frac{s}{p}\frac{\ln\left(x_2^{x_2}/x_1^{x_1}\right)}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{s}{p}x_2\left(1+\ln(x_2)\right),$$

$$\beta_1 = \frac{q}{p}\frac{\ln\left(x_1^{x_1}/x_0^{x_0}\right)}{\ln(x_1/x_0)} - \frac{x_1 - x_0}{\ln(x_1/x_0)} - \frac{q}{p}x_0\left(1+\ln(x_0)\right) + x_0\,,$$

$$\beta_2 = \frac{q}{p}\frac{\ln\left(x_2^{x_2}/x_1^{x_1}\right)}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{x_2 - x_1}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{q}{p}x_2\left(1+\ln(x_2)\right) + x_2\,, \quad (4)$$

$$\gamma_1 = \frac{r}{p}\frac{\ln\left(x_1^{x_1}/x_0^{x_0}\right)}{\ln(x_1/x_0)} - \frac{x_1^2 - x_0^2}{\ln(x_1/x_0)} - \frac{r}{p}x_0\left(1+\ln(x_0)\right) + 2x_0^2\,,$$

$$\gamma_2 = \frac{r}{p}\frac{\ln\left(x_2^{x_2}/x_1^{x_1}\right)}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{x_2^2 - x_1^2}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{r}{p}x_2\left(1+\ln(x_2)\right) + 2x_2^2\,,$$

$$p = \frac{\ln\left(x_2^{x_2}/x_1^{x_1}\right)}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{\ln\left(x_1^{x_1}/x_0^{x_0}\right)}{\ln(x_1/x_0)},\; q = \frac{x_2 - x_1}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{x_1 - x_0}{\ln(x_1/x_0)}\,,$$

$$r = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{x_1^2 - x_0^2}{\ln(x_1/x_0)}\,,\; s = \frac{\ln(f_2/f_1)}{\ln(x_2/x_1)} - \frac{\ln(f_1/f_0)}{\ln(x_1/x_0)}\,.$$

Далі обчислюємо наступні параметри ланки ермітового сплайна за формулами

$$b_2 = \frac{s}{p} - a_1\frac{q}{p} - a_2\frac{r}{p}\,,$$

$$b_1 = \frac{\ln(f_1/f_0) - b_2\ln\left(x_1^{x_1}/x_0^{x_0}\right) - a_1(x_1 - x_0) - a_2\left(x_1^2 - x_0^2\right)}{\ln(x_1/x_0)}\,, \quad (5)$$

$$a_0 = f_0\exp\left(-a_1x - a_2x^2\right)x^{-(b_1+b_2x)}\,.$$

Із формул для обчислення коефіцієнтів (3), (4), (5) слідує, що необхідною умовою існування наближення ермітовим сплайном з ланкою (1) є виконання умови $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

3. Похибка наближення функцій ермітовими сплайнами

Відомо [4], що похибка μ балансного наближення, тобто такого при якому максимальні похибки на кожному відрізку є однакові, нелінійними ермітовими сплайнами з непарною кількістю параметрів у ланці має вигляд

$$\mu = \frac{M}{(m+1)!\,r^{m+1}} \left(\int_a^b \left| \frac{\eta(f,F)}{w(x)} \right|^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r} \right) \right], \quad (6)$$

де r – кількість ланок (відрізків) ермітового сплайна на $[\alpha,\beta]$, $w(x)$ – вагова функція, $\eta(f,F)$ – ядро похибки наближення, $M = \left\| ((1-t)t)^{m-k+1} \left(t - \frac{1}{2} \right) \right\|_{C[0,1]}$,
k – дефект ермітового сплайна. Для ермітового сплайна з ланкою (1) кількість параметрів $m+1=5$, дефект сплайна $k=3$, а значення $M = 0{,}8944271*10^{-2}$.

Щоб скористатись формулою (6), потрібно мати вираз для ядра похибки $\eta(f,F)$ наближення функції сплайном з ланкою (1). Відомо, що побудову наближень ермітовими сплайнами з нелінійними за параметрами виразами в ланках, як і для мінімаксних наближень, можна звести до наближення ермітовими сплайнами з многочленними ланками [11]. Використовуючи теорему із [4] і властивості ядер похибок, для експоненціально-степеневого виразу $W_{k,l}(x)$ отримуємо вираз для ядра похибки

$$\eta(f, W_{k,l}) = f(x) \frac{d^{l+1}\left[x^k \left(\ln(f(x)) \right)^{(k)} \right]}{x^k dx^{l+1}},$$

а для експоненціально-степеневого виразу $W_{2,2}(x)$ (1) ядро похибки має вигляд

$$\eta(f, W_{2,2}) = \frac{1}{x^2}\left[6 f'''(x) - 18 \frac{f''(x) f'(x)}{f(x)} + 12 \frac{f'''(x)}{f^2(x)} \right] +$$
$$+ \frac{6}{x}\left[f^{(4)}(x) - 4 \frac{f'''(x) f'(x)}{f(x)} + 12 \frac{f''(x)(f'(x))^2}{f^2(x)} - 3 \frac{(f''(x))^2}{f(x)} - 6 \frac{(f'(x))^4}{f^3(x)} \right] +$$
$$+ f^{(5)}(x) - 5 \frac{f^{(4)}(x) f'(x)}{f(x)} + 20 \frac{f'''(x)(f'(x))^2}{f^2(x)} - 10 \frac{f'''(x) f''(x)}{f(x)} -$$
$$- 60 \frac{f'''(x)(f'(x))^3}{f^3(x)} + 30 \frac{(f''(x))^2 f'(x)}{f^2(x)} + 24 \frac{(f'(x))^5}{f^4(x)}.$$

При апроксимації функції $\frac{1}{1+x^2}$ на відрізку [0.1,10.0] ермітовим сплайном з ланкою (1) отримано похибку наближення 0.126427, а похибка наближення ермітовим сплайном з ланкою у вигляді многочлена четвертого степеня дорівнює 0.379258. При апроксимації функції $tg(x)$ на відрізку [0.1, π/3] цими ж ермітовими сплайнами отримано похибки 0.854547E-2 і 0.149716E-1 відповідно.

Висновки. У статті встановлено умови існування наближення ермітовим сплайном з ланкою у вигляді експоненціально-степеневого виразу з п’ятьма параметрами. Для побудови ланки ермітового сплайна потрібно спочатку обчислити значення параметрів a_2 і a_1 за формулами (3), далі параметри b_2, b_1 і a_0 за формулами (5). Оскільки похибка наближення функцій ермітовими сплайнами з ланкою (1) в деяких випадках є меншою ніж у многочленного ермітового сплайна, то їх доцільно застосовувати для наближення функцій. Перспективою досліджень у даному напрямку є побудова ермітових сплайнів з більшою кількістю параметрів, а також з іншими нелінійними виразами в ланках.

Література

[1] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций.– М.: Наука 1980.–352 с.

[2] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.- М.: Наука, 1984.- 352 с.

[3] Пізюр Я.В. Ермітові сплайни з ланками у вигляді логарифма від многочлена з парною кількістю параметрів // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика, 1998 р., № 337, Том 2.- С. 374-377.

[4] Пізюр Я.В. Наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками // Вісник НУ «Львівська політехніка». «Фізико-математичні науки», -2007.- №566.- С. 68-75.

[5] Пізюр Я. В., Гнатів Б. В. Ермітові сплайни з ланками у вигляді суми многочлена та експоненти з непарною кількістю параметрів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології: науковий збірник. – 2021. – № 33. – С. 110–114.

[6] Markovych B., Medynskyi I., Pizyur Ya. Modeling of functional dependences by hermitian splines with exponential-power expression in links // Mathematical Modeling. – 2022. – Vol. 6, No. 1. – P. 3–5.

[7] Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V., Andrunyk V. Chebyshev approximation by the sum of the polynomial and logarithmic expression with hermite interpolation // Cybernetics and Systems Analysis. – 2018. – Vol. 54, No. 5. – P. 765–770.

[8] Malachivskyy P., Pizyur Y. Chebyshev approximation of the steel magnetization characteristic by the sum of a linear expression and an arctangent function // Mathematical Modeling and Computing. – 2019. – Vol. 6, № 1. – P. 77–84.

[9] Лигун А.А., Сторчай В.Ф. О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами // Укр. мат. журн.- 1980.- 32, № 6.- С. 824-830.

[10] C. de Boor. A Practical Guide to Splines. – Springer-Verlag, 1978.

[11] Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989.- 272 с.

[12] Пизюр Я.В., Попов Б.А. Эрмитовые сплайны с экспоненциальными и логарифмическими звеньями // Отбор и обработка информации.– 1989.– Вып. 3.– С. 26-31.

Hermitian splines with exponential power links with an odd number of parameters

Yaropolk Pizyur, Yurii Karas

A Hermitian spline with an exponential-power link of the form $W_{2,2}(x)$ with five parameters is constructed: expressions for calculating its parameters are derived and the conditions for its existence are established. The formula for calculating the error of the balanced approximation of functions by Hermitian splines with this link and the expression for the kernel of the approximation error are given. The results demonstrate better accuracy of approximation by Hermitian splines with an exponential-power link than with a polynomial link with the same

Отримано 16.03.23