УДК 517.9:519.6

Осереднення та моделювання хвильових процесів у композитах із періодичною структурою

Геннадій Сандраков

д. ф.-м. н., с. н. с., Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64, 01601, Київ, e-mail: gsandrako@gmail.com

Розглядається осереднення та моделювання хвильових процесів із демпфуванням у композиційних матеріалах із періодичною структурою, таких як фотонні кристали. Враховується, що відповідні хвильові рівняння залежать від додаткових малих параметрів, що характеризують мікромасштабність та проникність таких матеріалів. Наведено асимптотичні розвинення розв'язків та осереднені проблеми, через розв'язки яких визначаються асимптотичні розвинення. Такі проблеми є початково-крайовими задачами для інтегро-диференціальних рівнянь із згортками. Присутність згорток у рівняннях, які моделюють процеси у суцільних середовищах або матеріалах, називається ефектом пам'яті. Презентовані оцінки точності для наведених розвинень, які дозволяють спростити чисельне розв'язання і комп'ютерне моделювання для таких хвильових процесів.

Ключові слова: гіперболічні задачі; наближені асимптотики; осереднені задачі; перетворення Лапласа

Вступ. Для розв'язування початково-крайових задач для хвильових рівнянь зазвичай використовуються чисельні методи. Однак, такі методи не завжди можна застосовувати безпосередньо для моделювання процесів у композиційних матеріалах із мікромасштабною періодичною структурою. Для розв'язання такої проблеми відомими фахівцями з обчислювальної математики I. Babuska, N. S. Bakhvalov, A. Bensoussan, J.-L. Lions та and G. Papanicolau був розроблений метод осереднення (гомогенізації). Відповідно до цього методу, наприклад, моделювання процесу теплопровідності у композиційному матеріалі з такою структурою можна замінити на моделювання процесу теплопровідності в однорідному (осередненому) матеріалі з гарантованою точністю [1, 2], що спрощує чисельне розв'язання і комп'ютерне моделювання таких процесів.

Для композиційних матеріалів, які складені із матеріалів з властивостями, що сильно розрізняються, такий підхід не завжди може бути реалізований, оскільки відповідні рівняння можуть залежати від додаткових малих параметрів. Крім того, важливою є геометрія розташування таких матеріалів відносно один одного. Присутність таких параметрів та різноманітної геометрії може ускладнити форми осереднених проблем та асимптотичних апроксимацій для розв'язків. Такі проблеми та асимптотичні розвинення для розв'язків параболічних задач з декількома малими параметрами були отримані та досліджувались у [3, 4], де зокрема були встановлені осереднені задачі для інтегро-диференціального рівнянь зі згортками, які прийнято називати моделями із пам'яттю [5].

За аналогією із звичайними кристалами фізики розробляють фотонні кристали, у яких поширюються оптичні хвилі. Такі кристали зазвичай мають періодичну структуру і складені з неоднорідних матеріалів. Хвильові процеси в таких кристалах моделюються рівняннями Максвела. Іноді, такі рівняння можна редукувати до хвилевих рівнянь із демпфуванням. Осереднення початково-крайових задач для таких рівнянь буде розглянуто у наступних розділах. Асимптотичні розвинення для рівнянь без демпфування було наведено у [6] , де можна знайти більш детальну інформацію та відповідні посилання.

1. Початково-крайові задачі для хвильового рівняння із демпфуванням

Періодичні композиційні матеріали з малим мікромасштабом ε моделюються наступним чином. Нехай для цілого $n \geq 2$ множина F_1 є відкритою зв'язною 1-періодичною (періодичною з періодом 1 за кожною з незалежних змінних) підмножиною R^n з локально ліпшіцевою межею і $F_0 = \mathrm{R}^n \setminus \bar{F}_1$ є множиною з локально ліпшіцевою межею. Для додатного ε позначимо

$$F_1^\varepsilon = \varepsilon F_1 = \{\varepsilon x : x \in F_1\}, \quad F_0^\varepsilon = \varepsilon F_0 = \{\varepsilon x : x \in F_0\}.$$

Отже, множини $F_1 = F_1^1$ і $F_0 = F_0^1$ зі спільною межею ∂F_1 визначаються через $Y_1 = F_1 \cap Y$ і $Y_0 = F_0 \cap Y$ з межею $\Gamma = \partial F_1 \cap Y$, де $Y = (0,1)^n$ позначає комірку періодичності. Припускається, що Y_1 і Y_0 мають додатні міри Лебега $|Y_1|$ і $|Y_0|$.

Нехай також задано обмежену область $\Omega \subset \mathrm{R}^n$. Множини F_1^ε і F_0^ε для досить малого фіксованого ε природно визначають моделі $\Omega_1^\varepsilon = F_1^\varepsilon \cap \Omega$ та $\Omega_0^\varepsilon = F_0^\varepsilon \cap \Omega$ для композиційних матеріалів з ε-періодичною структурою в області Ω з межею $\partial\Omega$. Приклади таких матеріалів наведено на рисунку.

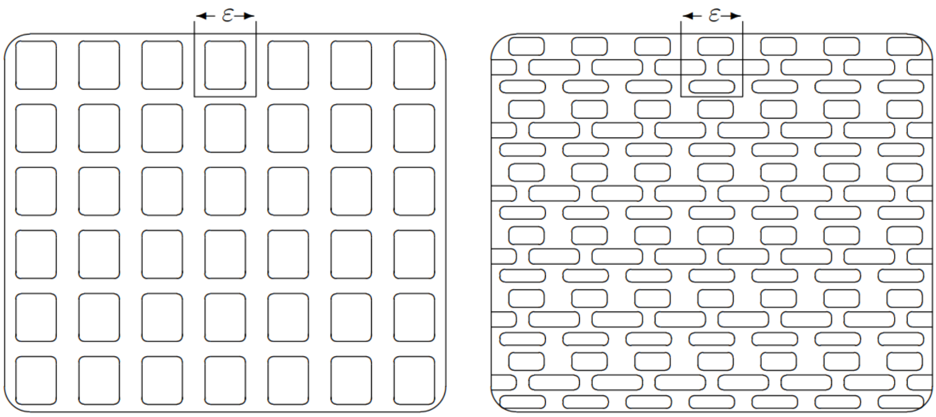

Рис. Моделі композиційних матеріалів

Визначимо реальні матриці проникності для таких композиційних матеріалів Ω_1^ε та Ω_0^ε в області $\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_0^\varepsilon$ рівностями

$$\lambda_\sigma^\varepsilon = \lambda_1 \quad в \quad \Omega_1^\varepsilon \quad та \quad \lambda_\sigma^\varepsilon = \sigma\lambda_0 \quad в \quad \Omega_0^\varepsilon$$

де σ та ε є малим параметрами, й сталі матриці λ_1 і λ_0 є симетричними та еліптичними. Надалі $0 < \sigma \le \sigma_0$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідних додатних σ_0 та ε_0.

Нехай задано функцію $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, де додатне T є фіксованим. Тут і надалі використовуються простори реальних функцій, визначення яких наведено, наприклад, у [5]. Визначимо $u = u(t,x)$ як розв'язок у сенсі розподілів наступної початково-крайової задачі для хвилевого рівняння із демпфуванням

$$u''_{tt} + s u'_t - div\, \lambda_\sigma^\varepsilon(\nabla u) = f \quad в \quad \Omega\times(0,T), \tag{1}$$
$$u|_{t=0} = 0,\ u'_t|_{t=0} = 0 \ в\ \Omega,\quad u = 0\ на\ \partial\Omega\times(0,T).$$

Така задача моделює хвильові процеси із демпфуванням, яке визначається фіксованим параметром s, в неоднорідних періодичних композиційних матеріалах з малим мікромасштабом ε. Для фіксованих параметрів σ і ε задача (1) має єдиний розв'язок, наприклад, відповідно до [5]. Отже, можна спробувати побудувати асимптотичні розвинення такого розв'язку.

2. Асимптотичні апроксимації для розв'язків

Рівняння задачі (1) є гіперболічним для фіксованих σ і ε. Однак, при дуже малих σ ця гіперболічність може вироджуватися на множині Ω_0^ε. Таке виродження призводить до досить складних асимптотичних розвинень, які містять осцилюючі доданки, для визначення яких потрібні додаткові позначення.

Нехай вектор функція $N = N(y)$ є 1-періодичним розв'язком задачі

$$div_y(\lambda_1 \nabla_y N) = 0 \ в\ Y_1,\ \ -\Upsilon\cdot\left(\lambda_1 \nabla_y N\right) = \Upsilon\cdot\lambda_1\ на\ \Gamma,$$

яку прийнято називати задачею на комірці, де Υ позначає зовнішню нормаль до межи $\Gamma = \partial F_1 \cap Y$. Відомо [1, 2], що такий розв'язок існує і є визначеним із точністю до сталої, яку фіксуватимемо умовою $\int_{Y_1} N_1(y)\,dy = 0$. Надалі продовжимо таку вектор функцію на Y_0 як 1-періодичний розв'язок задачі

$$div_y(\lambda_0 \nabla_y N) = 0 \quad в \quad Y_0, \qquad N = N \quad на \quad \overline{Y}_1.$$

Визначимо також функцію $r = r(t,y)$ на комірці Y як 1-періодичний розв'язок наступної нестаціонарної гіперболічної проблеми із демпфуванням

$$(r)''_{tt} + s(r)'_t - \vartheta\, div_y(\lambda_0 \nabla_y r) = 0 \quad в \quad Y_0\times(0,\infty), \tag{2}$$
$$r|_{t=0} = 0,\ \ r'_t|_{t=0} = 1 \ \ в\ \ Y_0,\ \ r = 0 \ \ на\ \ \overline{Y}_1\times(0,\infty).$$

де $\vartheta = \sigma / \varepsilon^2$ розглядається як параметр. Зазвичай, для параболічних задач, випадок $\sigma = \varepsilon^2$ прийнято називати моделлю подвійної пористості. Відомо [5], що єдиний розв'язок такої задачі існує і є визначеним для фіксованого ϑ .

Використовуючи розв'язки таких задач на комірці, визначимо матрицю Λ із сталими коефіцієнтами та функцію $R = R(t)$ наступними рівностями

$$R(t) = |Y_1|^{-1} \int_{Y_0} r''_{tt}(t,y)\, dy + s\,|Y_1|^{-1} \int_{Y_0} r'_t(t,y)\, dy, \quad \Lambda = |Y_1|^{-1} \int_{Y_1} \left(\lambda_1 + \lambda_1 \nabla_y N(y)\right) dy.$$

Перевіряється, що така матриця Λ є симетричною та еліптичною, а функція $R = R(t)$ є визначеною як елемент простору $L^1(0,\infty)$.

У цих позначеннях осереднена початково-крайової задача зі згортками для функції $v = v(t,x)$ має наступний вигляд

$$v''_{tt} + s\,v'_t - R*\left(v''_{tt}\right) - s\,R*\left(v'_t\right) - div\,\Lambda(\nabla v) = f - R*f \;\; в \;\; \Omega\times(0,T), \tag{3}$$
$$v|_{t=0} = 0, \;\; v'_t|_{t=0} = 0 \;\; в \;\; \Omega, \quad v = 0 \;\; на \;\; \partial\Omega\times(0,T).$$

де $*$ позначає оператор згортки відносно часової змінної $t \in [0,\infty)$, наприклад, за визначенням маємо таку рівність $R*(v''_{tt}) \; = \; \int_0^t R(t-\tau)(v''_{\tau\tau}(\tau,x))\, d\tau.$

Слідуючи [4] можна довести, що єдиний розв'язок такої задачі (3) для інтегро-диференціального рівняння існує і досить регулярним для регулярних f . Крім того, можна також довести, що такий розв'язок задачі (3) дійсно наближають розв'язок задачі (1) відповідно до наступного твердження.

Теорема. *Для* $f \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ *нехай* u *є розв'язком задачі (1) та* v *є розв'язком задачі (3). Тоді*

$$\| u - v \|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \| u - v + r_\varepsilon*(v''_{tt}) + s\,r_\varepsilon*(v'_t) - r_\varepsilon*f \|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C\,(\,\varepsilon + \sigma\,),$$

де $r_\varepsilon = r(t, x/\varepsilon)$ *визначається через розв'язок задачі (2) та стала* C *не залежить від* $\sigma,\; \varepsilon$ *при* $0 < \sigma \le \sigma_0,\; 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *для відповідних* ε_0 *і* σ_0.

Для доведення існування розв'язків для задачі (3) використовується перетворення Лапласа. Після застосування перетворення Лапласа (яке є ізоморфізм згідно з [7]) до задачі (3), така проблема перетворюється на еліптичну задачу з параметром. В свою чергу, для доведення існування розв'язків такої задачі достатньо отримати апріорні оцінки розв'язків, які ґрунтуються на тому факті, що перетворення Лапласа від функції $R = R(t)$ визначено і є додатним у відповідному розумінні. Така додатність дозволяє довести апріорні оцінки та твердження про регулярність безпосередньо, зокрема такі оцінки не залежать від параметра ϑ , від якого залежить задача (2). Аналогічно, енергетичні методи та перетворення Лапласа використовуються для доведення наведеної теореми.

Висновки. Отже, при моделюванні хвильових процесів із демпфуванням у композиційних матеріалах із періодичною структурою замість розв’язання складної початкової задачі (наприклад, чисельного) можна розв’язувати осереднену задачу з гарантованою точністю для малих мікромасштабності та проникності. Крім того, наведена теорема та оцінка точності відображають появу осцилюючих доданків у розвиненні розв’язків цієї задачі, що характеризує суттєве поглинання енергії на частині із низькою проникністю, що може бути використане для проектування хвиле-поглинаючих композиційних матеріалів.

Робота виконана за підтримки гранта Міністерства освіти і науки України на перспективний розвиток наукового напряму «Математичні науки та природничі науки» у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Література

[1] *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – Amsterdam, North-Holland, 1978. – 700 p.
[2] *Bakhvalov N. S., Panasenko G. P.* Homogenization: averaging processes in periodic media. – Dordrecht, Kluwer, 1989. – 402 p.
[3] *Sandrakov G. V.* The homogenization of nonstationary equations with contrast coefficients. Dokl. Mathematics, vol. 56:1, pp. 586-589, 1997.
[4] *Sandrakov G. V.* Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters. Izvestiya: Mathematics, vol. 71:6, pp. 1193-1252, 2007. 10.1070/IM2007v071n06ABEH002387
[5] *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inequations en mecanique et en physique. – Paris, Dunod, 1972.– 387p.
[6] *Sandrakov G. V.* Modeling of wave processes in porous media and asymptotic expansions. J. Numerical and Applied Mathematics, vol. 2, pp. 132-142, 2022. 10.17721/2706-9699.2022.2.15
[7] *Agranovich M. S., Vishik M. I.* Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. Mathematics Surveys. 1964. vol. 19:63, pp. 53–157.

Homogenization and modeling of wave processes in composites with a periodic structure

Gennadiy Sandrakov

Homogenization and modeling of wave processes with damping in composite materials with a periodic structure, such as photonic crystals, is considered. It is taken into account that the corresponding wave equations depend on additional small parameters characterizing the microscale and permeability of the materials. The asymptotic expansions of solutions and homogenized problems, the solutions of which determine the asymptotic expansions, are given. Such problems are initial boundary value problems for integro-differential equations with convolutions. The presence of convolutions in equations that model processes in continuous media or materials is called the memory effect. Accuracy estimates for the expansions are presented, which allow to simplify the numerical solution and computer modeling for the wave processes.

Отримано 31.03.23