УДК 519.6

Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду

Олеся Нечуйвітер[1], Сергій Іванов[2], Кирило Ковальчук[3]

[1] д. ф.-м. н., професор, Українська інженерно-педагогічна академія, вул. Університетська, 16, 61003, Харків, e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com
[2] аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, вул. Університетська, 16, 61003, Харків, e-mail: ivanov.linsholm@gmail.com
[3] студент, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Юлії Здановської , 55, 03002, Київ, e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com

Сучасний стан розвитку інформаційних технологій спонукає науковців до удосконалення математичних моделей явищ та процесів в багатьох напрямках технічного спрямування. Зокрема, сучасні методи цифрової обробки сигналів та зображень використовують алгоритми з новими інформаційними операторами. Побудовані кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних при різних типах даних. У роботі досліджується наближене обчислення подвійних інтегралів загального виду на класі диференційовних функцій. Запропоновано нову кубатурну формулу, яка в якості допоміжних функцій використовує кусково-лінійні сплайни. Інформація про функції задається слідами на відповідних лініях. Доведено, що кубатурна формула є оптимальною за порядком точності.

Ключові слова: *кубатурна формула, інтеграл від швидкоосцилюючої функції загального виду, клас диференційованих функцій*

Вступ. При вирішенні складних задач в таких галузях науки як астрономія, радіологія, комп'ютерна томографія, голографія широко використовуються методи цифрової обробки сигналів та зображень. Деякі з цих методів базуються в тому числі і на нових підходах до отримання, обробки та аналізу інформації. Мова іде про те, що інформація, зокрема про функції багатьох змінних може задаватися не тільки значеннями функції в точках, а і як сукупність слідів функції на площинах, як набір слідів функції на лініях. Прикладом теорії, де в залежності від типу задання інформації вибирається алгоритм, є теорія обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних [1, 2]. Менше уваги приділено наближеному обчисленню подвійних інтегралів загального виду у випадку, коли інформація про функції задається відповідними слідами на лініях. В [3] на класі диференційовних функцій для наближеного обчислення подвійного інтегралу загального виду представлена оптимальна за порядком точності кубатурна формула, яка в своїй побудові в якості допоміжних функцій використовує кусково-сталі сплайни. Однак, чи залишиться кубатурна формула оптимальною за порядком точності у випадку, коли в якості допоміжних функцій розглядати кусково-лінійні сплайни, в даній роботі досліджується вперше.

1. Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування на класі

Припустимо, що $f(x,y)\in F$, $g(x,y)\in G$, F, G – множини функцій, визначених в області $[a,b]\times[a,b]$. Позначимо через L_N множину всіх квадратурних формул $l_N(f,g)$, що використовують інформацію про значення функцій $f(x,y)$ та $g(x,y)$ не більше ніж на N лініях. Введемо величини

$$I(f,g,\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin(\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y}))dxdy,\; R_N(f,g,\omega,l_N)=\left|I(f,g,\omega)-l_N(f,g)\right|,$$

$$R_N(F,G,\omega,l_N)=\sup_{f\in F,\, g\in G} R_N(f,g,\omega,l_N),\; R_N(F,G,\omega)=\inf_{l_N\in L_N} R_N(F,G,\omega,l_N).$$

Кубатурну формулу $l_N^*(f,g)$, на якій досягається $R_N(F,G,\omega)$, будемо називати оптимальною за точністю кубатурною формулою. Якщо $R_N\left(F,G,\omega,\bar{l}_N\right)\le R_N(F,G,\omega)+\eta$, $\eta>0$, то $\bar{l}_N$ називається оптимальною за точністю формулою обчислення $I(f,g,\omega)$ з точністю до η. Якщо $\eta=O(R_N)$, то $\bar{l}_N$ називається оптимальною за порядком точності.

Розглянемо $H^{2,r}(M,M), r\ge 0$ – клас дійсних функцій $r\ge 0$, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що частинні похідні порядку r по змінній x та y обмежені

$$\left|f^{(r,0)}(x,y)\right|\le M,\quad \left|f^{(0,r)}(x,y)\right|\le M,\quad r\ne 0,\; \left|f^{(r,r)}(x,y)\right|\le M,\quad r\ge 0.$$

Теорема 1. [4] Нехай $f(x,y),\ g(x,y),\in H^{2,r}(M,M)$, функції $f(x,y),\ g(\mathrm{x},\mathrm{y})$ задані слідами на відповідних системах взаємно перпендикулярних прямих в області $G=[0,1]^2$, тоді

$$R_N\left(H^{2,r}(\mathrm{M},M),H^{2,r}(M,M),\omega\right)\ge K\max\left\{\frac{1}{\ell^{2r}},\min\left\{1,\frac{|\omega|}{\ell^{2r}}\right\}\right\}.$$

2. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула

Означення. Під слідом функції $f(x,y)$ на прямих лініях $x_k=k\Delta,\ \ y_j=j\Delta,$ $k,j=\overline{0,\ell},\ \Delta=\frac{1}{\ell}$ розуміємо $f(x_k,y),\ 0\le y\le 1,\ f(x,y_j),\ 0\le x\le 1.$

Введемо наступі позначення:

$$h_{10}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_0,\\ \dfrac{x-x_1}{-\Delta_1}, & x_0<x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\qquad H_{10}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_0,\\ \dfrac{y-y_1}{-\Delta_1}, & y_0<y<y_1,\\ 0, & y\ge y_1,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta_1}, & x_{k-1}<x<x_k,\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta_1}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1},\end{cases}\qquad H_{1j}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{j-1},\\ \dfrac{y-y_{j-1}}{\Delta_1}, & y_{j-1}<y<y_j,\\ \dfrac{y-y_{j+1}}{-\Delta_1}, & y_j\le y<y_{j+1},\\ 0, & y\ge y_{j+1},\end{cases}$$

$$h_{1\ell_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell_1-1},\\ \dfrac{x-x_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1}<x<x_{\ell_1},\\ 0, & x\ge x_{\ell_1},\end{cases}\qquad H_{1\ell_1}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{\ell_1-1},\\ \dfrac{y-y_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & y_{\ell_1-1}<y<y_{\ell_1},\\ 0, & y\ge y_{\ell_1},\end{cases}$$

$$k,j=\overline{1,\ell_1-1},\ \ x_k=k\Delta_1,\quad y_j=j\Delta_1,\quad \Delta_1=\frac{1}{\ell_1}.$$

Аналогічно визначаються сліди функції $g(x,y)$ та функції $h_{2p}(x)$, $H_{2s}(y)$ на прямих $x_p=p\Delta_2$, $y_s=s\Delta_2$, $\mathrm{p,s}=\overline{0,\ell_2}$, $\Delta_2=1/\ell_2$.

Розглянемо два оператори-інтерлінанти

$$Jf(x,y)=\sum_{k=0}^{\ell_1} f(x_k,y)h_{1k}(x)+\sum_{j=0}^{\ell_1} f(x,y_j)H_{1j}(y)-\sum_{k=0}^{\ell_1}\sum_{j=0}^{\ell_1} f(x_k,y_j)h_{1k}(x)H_{1j}(y),$$

$$Og(x,y)=\sum_{p=0}^{\ell_2} g(x_p,y)h_{2p}(x)+\sum_{s=0}^{\ell_2} g(x,y_s)H_{2s}(y)-\sum_{p=0}^{\ell_2}\sum_{s=0}^{\ell_2} f(x_p,y_s)h_{2p}(x)H_{2s}(y).$$

Для обчислення інтегралу $I(f,g,\omega)$ пропонується кубатурна формула

$$\Phi(f,g,\omega)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)\sin\big(\omega Og(\mathrm{x,y})\big)dxdy.$$

Теорема 2. Нехай $f(x,y),g(x,y)\in H_1^{2,1}(M,M)$ та функції $f(x,y)$, $g(\mathrm{x,y})$ задані слідами $f(x_k,y)$, $f(x,y_j)$, $k,j=\overline{0,\ell_1}$, $g(x_p,y)$, $g(x,y_s)$, $p,s=\overline{0,\ell_2}$ на системах взаємно перпендикулярних прямих $x_k=k\Delta_1$, $y_j=j\Delta_1$, $\Delta_1=\dfrac{1}{\ell_1}$ та $x_p=p\Delta_2$, $y_s=s\Delta_2$, $\Delta_2=1/\ell_2$ в області $G=[0,1]^2$. Тоді для формули $\Phi(f,g,\omega)$ справедлива наступна оцінка похибки наближення $I(f,g,\omega)$:

$$\rho\big(I(f,g,\omega),\Phi(f,g,\omega)\big)=\left|I(f,g,\omega)-\Phi(f,g,\omega)\right|\le\frac{M}{9}\frac{1}{\ell_1^{\,2}}+M\min\left(2;\frac{M\omega}{9}\frac{1}{\ell_2^{\,2}}\right).$$

Доведення. Для знаходження оцінки похибки наближення $I(f,g,\omega)$ за формулою $\Phi(f,g,\omega)$ використаємо представлення похибки наближення $f(x,y)$ оператором інтерлінантом $Jf(x,y)$ через $f^{(1,1)}(x,y)$ та функції

$$G_{1,k}(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{\Delta_1}, & x_k\le\xi<x,\\ \dfrac{x-x_k}{-\Delta_1}, & x<\xi\le x_{k+1},\end{cases}\qquad G_{2,j}(y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{y_{j+1}-y}{\Delta_1}, & y_j\le\eta<y,\\ \dfrac{y-y_j}{-\Delta_1}, & y<\eta\le y_{j+1},\end{cases}$$

а також похибки наближення $g(x,y)$ оператором $Og(x,y)$ через $g^{(1,1)}(x,y)$ та функції

$$G_{1,p}(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x_{p+1}-x}{\Delta_2}, & x_p\le\xi<x,\\ \dfrac{x-x_p}{-\Delta_2}, & x<\xi\le x_{p+1},\end{cases}\qquad G_{2,s}(y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{y_{s+1}-y}{\Delta_2}, & y_s\le\eta<y,\\ \dfrac{y-y_s}{-\Delta_2}, & y<\eta\le y_{s+1}.\end{cases}$$

Тоді

$$\rho\big(I(f,g,\omega),\Phi(f,g,\omega)\big)=\left|I(f,g,\omega)-\Phi(f,g,\omega)\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1|f(x,y)-Jf(x,y)|dxdy+\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|\left|\sin(\omega g(\mathrm{x,y}))-\sin(\omega Og(\mathrm{x,y}))\right|dxdy\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\sum_{j=0}^{\ell_1-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}f^{(1,1)}(\xi,\eta)G_{1k}(x,\xi)G_{2j}(y,\eta)d\xi d\eta\right|dxdy+$$

$$+2M\sum_{p=0}^{\ell_2-1}\sum_{s=0}^{\ell_2-1}\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\left|\sin\frac{\omega(g(x,y)-Og(x,y))}{2}\right|dxdy\le$$

$$\le M\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\sum_{j=0}^{\ell_1-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left|G_{1k}(x,\xi)\right|\left|G_{2j}(y,\eta)\right|d\xi d\eta dxdy+$$

$$+2M\sum_{p=0}^{\ell_2-1}\sum_{s=0}^{\ell_2-1}\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\min\left(1;\frac{\omega\left|g(x,y)-Og(x,y)\right|}{2}\right)dxdy\le M\ell_1^{\,2}\frac{\Delta_1^{\,2}}{3}\frac{\Delta_1^{\,2}}{3}+$$

$$+2M\min\left(\sum_{p=0}^{\ell_2-1}\sum_{s=0}^{\ell_2-1}\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}dxdy,\frac{M\omega}{2}\sum_{p=0}^{\ell_2-1}\sum_{s=0}^{\ell_2-1}\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\left|G_{1p}(x,\xi)\right|\left|G_{2s}(y,\eta)\right|d\xi d\eta dxdy\right)=$$

$$=\frac{M}{9}\Delta_1^{\,2}+2M\min\left(\ell_2^{\,2}\Delta_2^{\,2},\frac{M\omega}{2}\ell_2^{\,2}\frac{\Delta_2^{\,2}}{3}\frac{\Delta_2^{\,2}}{3}\right)=$$

$$= \frac{M}{9}\Delta_1^{\,2} + M\min\left(2;\frac{M\omega}{9}\Delta_2^{\,2}\right) = \frac{M}{9}\frac{1}{\ell_1^{\,2}} + M\min\left(2;\frac{M\omega}{9}\frac{1}{\ell_2^{\,2}}\right).$$

Теорема 2 доведена.

Маючи результати теореми 1 та теореми 2, можна зробити висновок про оптимальність за порядком точності кубатурної формули $\Phi(f,g,\omega)$ наближеного обчислення інтегралу $I(f,g,\omega)$ на класі диференційовних функцій. Наступним кроком в дослідженні є тестування кубатурної формули.

Висновки. У роботі представлено формулу наближеного обчислення подвійного інтегралу загального виду у випадку, коли в якості допоміжних функцій розглядаються кусково-лінійні сплайни. Інформація про функції задана їх слідами на відповідних лініях. Порівнюючи оцінку знизу для похибки чисельного інтегрування на класі дифренційовних функцій та оцінку похибки наближення інтегралу кубатурною формулою, робимо висновок про оптимальність за порядком точності запропонованої кубатурної формули.

Література

[1] *Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23–28.

[2] *Литвин О. М., Нечуйвітер О.П.* Наближене обчислення 3 D - коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45–50.

[3] *Mezhuyev V., Lytvyn O.M., Nechuiviter O., Pershyna Y, Lytvyn O.O., Keita K.* Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions, *U.P.B. Sci. Bull., Series A,* Vol. 80, Iss. 3, 2018, 169–182.

[4] *Нечуйвітер О.П., Кейта К.В.* Обчислення 2 D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2017. – Вип.15. – С. 139 – 144.

Approximate calculation of double integrals from rapidly oscillating functions of the general form

Olesia Nechuiviter, Serhii Ivanov, Kovalchuk Kyrylo

The current state of development of information technologies encourages scientists to improve mathematical models of phenomena and processes in many areas of technical direction. In particular, modern methods of digital processing of signals and images use algorithms with new information operators. Cubature formulas for the approximate calculation of integrals from rapidly oscillating functions of many variables for different types of data are constructed. The paper investigates the approximate calculation of double integrals of the general form on the class of differential functions. A new cubature formula is proposed, it uses piecewise linear splines as auxiliary functions. Information about the functions is given by traces on the corresponding lines. It is proved that the cubature formula is optimal in order of accuracy.

Отримано 12.03.23