**УДК 519.6**

# Наближення розривних 3D функцій розривними інтерфлетаційними сплайнами

Юлія Першина

[1] д. ф.-м. н., завідувач кафедрою, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут, вул. Кирпичова, 2, 64002, Харків, e-mail: yuliapershina78@gmail.com

*У роботі будується метод наближення тримірного тіла, яке описується розривною 3D функцією, використовуючи розривний оператор сплайн-інтерфлетації. Розглядається випадок, коли досліджуване тіло повністю покривається системою елементарних прямокутних елементів (паралелепіпедів). Функція, що описує тривимірне тіло, може мати розриви першого роду на лініях чи площинах заданої системи паралелепіпедів. В статті будується розривний сплайн – інтерфлетант, який в якості експериментальних даних використовує односторонні сліди функції вздовж заданої системи розбиття; наводиться теорема про похибку наближення побудованого розривного сплайна. Такий метод наближення може бути використаних в дистанційних методах дослідження об'єктів.*

**Ключові слова:** інтерфлетація, сплайн, розривна 3D функція, дистанційні методи наближення

**Вступ**. Дана робота відноситься до серії робіт автора, спрямованих на дослідження та вдосконалення математичних моделей у комп'ютерній томографії [1, 2]. На даний час у томографії розроблено багато обчислювальних методів, алгоритмів та програмних засобів, спрямованих на відновлення внутрішніх властивостей об'єкта. Вони добре виявляють себе при відновленні об'єктів з гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів з розривними характеристиками. Тому виникає необхідність створення математичних методів наближення розривних функцій.

Зазначимо істотну обставину: математичні основи томографії були закладені ще на початку минулого століття в працях німецького вченого Й. Радона [3], який розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (перетворення Радона). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, а й інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин. Для наближення розривних функцій існує метод апроксимація тригонометричними сумами Фур'є, який в точках розриву викликає феномен Гіббса. Для зменшення його розроблено багато фільтрів, але вони не можуть повністю подолати феномен. Авторами [4, 5] запропоновано методи реконструкції розривних ліній за допомогою вейвлетів. Існують роботи, в яких пропонується використовувати пряме і зворотне перетворення Радона для реконструкції розривів в комп'ютерній томографії. Автори статтей [6, 7] зробили подальший розвиток цієї методології та інструментів для алгоритмічної реконструкції розривів у комп'ютерній томографії, запропонували підходи, що дозволяють відновити не тільки набір розривів, але й значення стрибків за допомогою перетворення Радона. Ні фільтри, ні згадані методи не дають повного усунення феномену Гіббса.

Цикл робіт авторів [2, 8], присвячений розв'язанню плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії, використовуючи неоднорідність внутрішньої структури двовимірного тіла. Для цього доцільніше використовувати нові інформаційні оператори (інтерлінація, інтерфлетація), оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній або площин. Тобто нові інформаційні оператори є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями. В статті [9] будуються розривні інтерполяційні сплайни для відновлення розривної внутрішньої структури тривимірного тіла. Дана стаття є продовження цього циклу робіт.

В цій статті розглядається задача побудови розривного оператора сплайн-інтерфлетації для відновлення розривної внутрішньої структури 3D тіла.

## 1. Побудова розривного інтерфлетаційного сплайну

Нехай досліджуване тіло повністю покриває область $D=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, що поділена прямими $x_0=0<x_1<x_2<...<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<...<y_n=1$, $z_0=0<z_1<z_2<...<z_p=1$ на елементарні прямокутні елементи (паралелепіпеди).

Розглянемо елемент $\Pi_{ijk}=(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j)\times(z_{k-1},z_k),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p}$.
В якості вхідних даних будемо використовувати сліди функції вздовж границь цього елементу:

$$\varphi1_i^-(y,z)=\lim_{x\to x_i-0} f(x,y,z),\ \varphi1_{i-1}^+(y,z)=\lim_{x\to x_i+0} f(x,y,z),\ \varphi2_j^-(x,z)=\lim_{y\to y_j-0} f(x,y,z),$$

$$\varphi2_{j-1}^+(x,z)=\lim_{y\to y_j+0} f(x,y,z)\ ,\varphi3_k^-(x,y)=\lim_{z\to z_k-0} f(x,y,z),\varphi3_{k-1}^+(x,y)=\lim_{z\to z_k+0} f(x,y,z)\ .$$

**Означення.** Розривним інтерфлетаційним поліноміальним сплайном в області $D$ відповідним заданому розбиттю на підобласті $\Pi_{ijk}$ будемо називати наступну функцію:

$$L(x,y,z)=L_{ijk}(x,y,z),\ (x,y,z)\in\Pi_{ijk}\ ,$$

$$L_{ijk}(x,y,z)=L1_{ijk}(x,y,z)+L2_{ijk}(x,y,z)+L3_{ijk}(x,y,z)-L12_{ijk}(x,y,z)-$$
$$-L13_{ijk}(x,y,z)-L23_{ijk}(x,y,z)+L123_{ijk}(x,y,z),\ (x,y,z)\in\Pi_{ijk}\subset D \qquad (1)$$

$$L1_{ijk}(x,y,z)=\varphi1^+{}_{i-1}(y,z)\cdot h_i(x)+\varphi1^-{}_i(y,z)\cdot h_{i-1}(x);$$

$L2_{ijk}(x,y,z),L3_{ijk}(x,y,z)$ – визначаються аналогічно;

$$L12_{ijk}(x,y,z)=\varphi12_{i-1,j-1}^{++}(z)h_i(x)h_j(y)+\varphi12_{i-1,j}^{+-}(z)h_i(x)h_{j-1}(y)+$$

$$+\varphi 12^{-+}_{i,j-1}(z)h_{i-1}(x)h_j(y)+\varphi 12^{--}_{i,j}(z)h_{i-1}(x)h_{j-1}(y);$$

$L13_{ijk}(x,y,z)$, $L23_{ijk}(x,y,z)$ – визначаються аналогічно;

$$L123_{ijk}(x,y,z)=C^{+++}_{i-1,j-1,k-1}h_i(x)h_j(y)h_k(z)+$$
$$+C^{++-}_{i-1,j-1,k}h_i(x)h_j(y)h_{k-1}(z)+C^{+-+}_{i-1,j,k-1}h_i(x)h_{j-1}(y)h_k(z)+$$
$$+C^{-++}_{i,j-1,k-1}h_{i-1}(x)h_j(y)h_k(z)+C^{+--}_{i-1,j,k}h_i(x)h_{j-1}(y)h_{k-1}(z)+$$
$$+C^{-+-}_{i,j-1,k}h_{i-1}(x)h_j(y)h_{k-1}(x)+C^{--+}_{i,j,k-1}h_{i-1}(x)h_{j-1}(y)h_k(z)+C^{---}_{i,j,k}h_{i-1}(x)h_{j-1}(y)h_{k-1}(z),$$

де $h_i(x)=\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}$, $h_{i-1}(x)=\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$, $\varphi 12^{++}_{i-1\,j-1}(z)=\lim\limits_{\substack{x\to x_{i-1}+0\\ y\to y_{j-1}+0}} f(x,y,z)$,

$C^{+++}_{i-1,j-1,k-1}=\lim\limits_{\substack{x\to x_{i-1}+0\\ y\to y_{j-1}+0\\ z\to z_{k-1}+0}} f(x,y,z)$, функції $\varphi 12, \varphi 13, \varphi 23$ та С знаходяться аналогічно.

**Теорема 1.** Якщо $\varphi 1^{+}_{i-1}(y_{j-1},z_{k-1})=\varphi 2^{+}_{j-1}(x_{i-1},z_{k-1})=\varphi 3^{+}_{k-1}(x_{i-1},y_{j-1})=C^{+++}_{i-1\,j-1\,k-1}$,

$$\varphi 1^{-}_{i}(y_{j-1},z_{k-1})=\varphi 2^{+}_{j-1}(x_i,z_{k-1})=\varphi 3^{+}_{k-1}(x_i,y_{j-1})=C^{-++}_{ij-1k-1}$$
$$\varphi 1^{+}_{i-1}(y_j,z_{k-1})=\varphi 2^{-}_{j}(x_{i-1},z_{k-1})=\varphi 3^{+}_{k-1}(x_{i-1},y_j)=C^{+-+}_{i-1\,jk-1}$$
$$\varphi 1^{+}_{i-1}(y_{j-1},z_k)=\varphi 2^{+}_{j-1}(x_{i-1},z_k)=\varphi 3^{-}_{k}(x_{i-1},y_{j-1})=C^{++-}_{i-1\,j-1k}$$
$$\varphi 1^{-}_{i}(y_j,z_{k-1})=\varphi 2^{-}_{j}(x_i,z_{k-1})=\varphi 3^{+}_{k-1}(x_i,y_j)=C^{--+}_{ijk-1}$$
$$\varphi 1^{-}_{i}(y_{j-1},z_k)=\varphi 2^{+}_{j-1}(x_i,z_k)=\varphi 3^{-}_{k}(x_i,y_{j-1})=C^{-+-}_{ij-1k}$$
$$\varphi 1^{+}_{i-1}(y_j,z_k)=\varphi 2^{-}_{j}(x_{i-1},z_k)=\varphi 3^{-}_{k}(x_{i-1},y_j)=C^{+--}_{i-1\,jk}$$
$$\varphi 1^{-}_{i}(y_j,z_k)=\varphi 2^{-}_{j}(x_i,z_k)=\varphi 3^{-}_{k}(x_i,y_j)=C^{---}_{ijk}$$

то на границі елемента $\Pi_{ijk}$ функція $L_{ijk}(x,y,z)$ задовольняє інтерфлетаційним властивостям, тобто $L_{ijk}(x,y,z)\big|_{x=x_{i-1}}=\varphi 1^{+}_{i-1}(y,z)$, $y_{j-1}\le y\le y_j$, $z_{k-1}\le z\le z_k$

$$L_{ijk}(x,y,z)\big|_{y=y_{j-1}}=\varphi 2^{+}_{j-1}(x,z),\ x_{i-1}\le x\le x_i,\ z_{k-1}\le z\le z_k$$
$$L_{ijk}(x,y,z)\big|_{z=z_{k-1}}=\varphi 3^{+}_{k-1}(x,y),\ x_{i-1}\le x\le x_i,\ y_{l-1}\le y\le y_l$$

**Зауваження.** Припускається, що розриви функції $L(x,y,z)$ можуть існувати лише на границях одного або декількох елементів.

**Теорема 2.** Якщо виконуються умови теореми 1, то для похибки наближення такої розривної функції $f(x,y,z)$ відповідним розривним інтерфлетційним сплайном $L(x,y,z)$ буде виконуватись співвідношення:

$$\left|f(x,y,z)-L(x,y,z)\right|=O(\Delta 1^2\Delta 2^2\Delta 3^2),\ (x,y,z)\in\Pi_{pls}\ne\Pi_{i,j,k},$$
$$\Delta 1=\max_p(x_p-x_{p-1}),\ \Delta 2=\max_l(y_l-y_{l-1}),\Delta 3=\max_s(z_s-z_{s-1})$$

при умові, що $f(x,y,z)\in C^{(2,2,2)}(\Pi_{ijk})$.

*Приклад.* Нехай $m=2, n=2, p=2$, $x_0=0,\ x_1=0.5, x_2=1$, $y_0=0$, $y_1=0.5$, $y_2=1$, $z_0=0$, $z_1=0.5$, $z_2=1$. Лінії утворюють вісім елементарних прямокутних елементів $\Pi_{ijk},\ i,j,k=\overline{1,2}$.

Будемо задавати односторонні значення функції $f(x,y,z)$ в кутових точках кожного елементу $\Pi_{ijk}$ наступною матрицею:

$$C_{ijk}=\begin{pmatrix} f^{+++}(x_i,y_j,z_k) & f^{++-}(x_i,y_j,z_{k+1}) & f^{+--}(x_i,y_{j+1},z_{k+1}) & f^{+-+}(x_i,y_{j+1},z_k) \\ f^{--+}(x_{i+1},y_{j+1},z_k) & f^{-++}(x_{i+1},y_j,z_k) & f^{-+-}(x_{i+1},y_j,z_{k+1}) & f^{---}(x_{i+1},y_{j+1},z_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$C_{000}=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\1&2&2&1\end{pmatrix},\ C_{100}=\begin{pmatrix}3&5{,}5&4{,}5&2\\-1&-2&0{,}5&1{,}5\end{pmatrix},\ C_{010}=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$C_{001}=\begin{pmatrix}0&3&6&3\\1&0&3&4\end{pmatrix},\ C_{110}=\begin{pmatrix}0{,}5&1&2&1{,}5\\4&1{,}5&2&4{,}5\end{pmatrix},\ C_{101}=\begin{pmatrix}-1{,}5&0&1&-0{,}5\\1{,}5&0&3&4{,}5\end{pmatrix},$$

$$C_{011}=\begin{pmatrix}1&1{,}5&3&2\\1&0&0{,}5&2\end{pmatrix},\ C_{111}=\begin{pmatrix}5{,}5&6&8&6{,}5\\6&5&5&4\end{pmatrix}.$$

Розривний сплайн будемо будувати у вигляді:

$$L(x,y,z)=\begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x,y,z)\in\Pi_{111}\\ -10x-6y+8+8xy+5z, & (x,y,z)\in\Pi_{211}\\ -4xy+2x+2y+2z-1, & (x,y,z)\in\Pi_{121}\\ -8xy+6z+6y-3, & (x,y,z)\in\Pi_{112}\\ 4xyz+z+y-x, & (x,y,z)\in\Pi_{221}\\ 2xy+6zx+y-3, & (x,y,z)\in\Pi_{212}\\ 2zy+y-2x, & (x,y,z)\in\Pi_{122}\\ 4zy-2xz+5, & (x,y,z)\in\Pi_{222} \end{cases}.$$

Задамо наближувану функцію у вигляді: $\forall(x,y,z)\in\Pi_{ijk},\ i,j,k=\overline{1,2}$

$$f(x,y,z)=L_{ijk}(x,y,z)+\frac{(x-x_{i-1})(x_i-x)(y-y_{j-1})(y_j-y)(z-z_{k-1})(z_k-1)}{6},$$

Таким чином, в кожному з восьми паралелепіпедів наближувана функція має частинну похідну $\left|f^{2,2,2}(x,y,z)\right|\equiv1$, $\forall(x,y,z)\in\Pi_{ijk}$. Тому, згідно з теорією, похибка наближення такої розривної функції, написаним вище розривним сплайном, буде задовольняти нерівності:

$$\max_{(x,y,z)\in\Pi_{ijk}}\left|f(x,y,y)-L_{ijk}(x,y,z)\right|\le\left|f^{(2,2,2)}(\xi,\eta,\zeta)\right|\cdot\frac{\Delta i^2\Delta j^2\Delta k^2}{2!\cdot2!\cdot2!}=$$

$$=1\cdot\frac{(0{,}5)^2(0{,}5)^2(0{,}5)^2}{2!\cdot2!\cdot2!}=\frac{1}{512}\approx0.002.$$

**Висновки.** В статті запропонована побудова розривного сплайн-інтерфлетанта для наближення розривної функції трьох змінних. Функція, що описує тривимірне тіло, може мати розриви першого роду на лініях чи площинах заданої системи елементарних прямокутних елементів (паралелепіпедів), що повністю покривають досліджуване тіло. Причому побудовані розривні інтерфлетаційні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни. Методи, що використовують нові інформаційні оператори, можуть бути викорситані в дистанційних методах дослідження, зокрема, в комп'ютерній томографії.

## Література

[1] *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції. – Доповіді НАНУ, 2005. – С. 67-71

[2] *Сергієнко І.В., Задірака В.К,, Литвин О.М., Першина Ю.І.* Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія – К. : Наук. думка, 2017. – 314 с.

[3] *J. Radon*, "Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten", Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl,1917,vol.69, pp. 262 – 277.

[4] *Suresh V., Koteswarao S. Rao, Thiagarajan G., and Das R.P.* Denoising and detecting discontinuities using wavelets. – Indian Journal of Science and Technology, №9(19), 2016. – pp. 1-4.

[5] *Bozzini M., and Rossini M.* The detection and recovery of discontinuous curves from scattered data. – Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, № 240.– pp. 148-162.

[6] *Faridani A., Finch D. V., Ritman E. L., Smith K. T.* Local tomography. II. – SIAM J. Appl. Math., 1 997, 57 (4). – pp. 1095–1127.

[7] Louis A. K. Feature Reconstruction in Inverse Problems – Inverse Problems, 2011, 27 (6), Art. 065010.

[8] *Pershyna I. I.* Restoration of discontinuous functions by discontinuous interlination splines. – Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя, 2022. – № 4. С. 29 – 39.

[9] *Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій трьох змінних розривними інтерполяційними сплайнами. – Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів: Інститут прикладниї проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2021. – Вип.33 – С. 99-104.

# Approximation of discontinuous 3D functions by discontinuous interflatation splines

Iuliia Pershyna

*The paper develops a method of approximating a three-dimensional body, which is described by a discontinuous 3D function, using a discontinuous spline interflatation operator. The case is considered when the studied body is completely covered by a system of elementary rectangular elements (parallelepipeds). A function describing a three-dimensional body can have discontinuities of the first kind on the lines or planes of a given system of parallelepipeds. In the article, a discontinuous spline is constructed - an interfletant, which uses one-sided function traces along a given partition system as experimental data; a theorem on the approximation error of the constructed discontinuous spline is presented. This method of approximation can be used in remote methods of studying objects.*

Отримано 26.03.23